GUÍA DE CONTENIDOS:
" TEOREMA DE PITÁGORAS, ÁREAS Y PERÍMETROS"
Unidad: Geometría
1° Medio 2020

Prof. S. Calderón

Nombre: ……………………………………………………….. Curso: 1°…… Fecha: ……………

Objetivos de Aprendizaje:	**Tema:**
OA 12 (8°) Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con software educativo	**Teorema de Pitágoras.**
OA 13 (7°) Desarrollar y aplicarla fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.	**Área y perímetros:** -Área y perímetro de triángulos, paralelogramos y trapecios. -Resuelven problemas geométricos de la vida cotidiana aplicando áreas.

Introducción:

La Matemática es la ciencia que se ocupa de describir y analizar las cantidades, el espacio y las formas, los cambios y relaciones, así como la incertidumbre. Si miramos a nuestro alrededor vemos que esos componentes están presentes en todos los aspectos de la vida de las personas, en su trabajo, en su quehacer diario, en los medios de comunicación, etc. Las matemáticas, tanto histórica como socialmente, forman parte de nuestra cultura y todos debemos ser capaces de apreciarlas y comprenderlas.

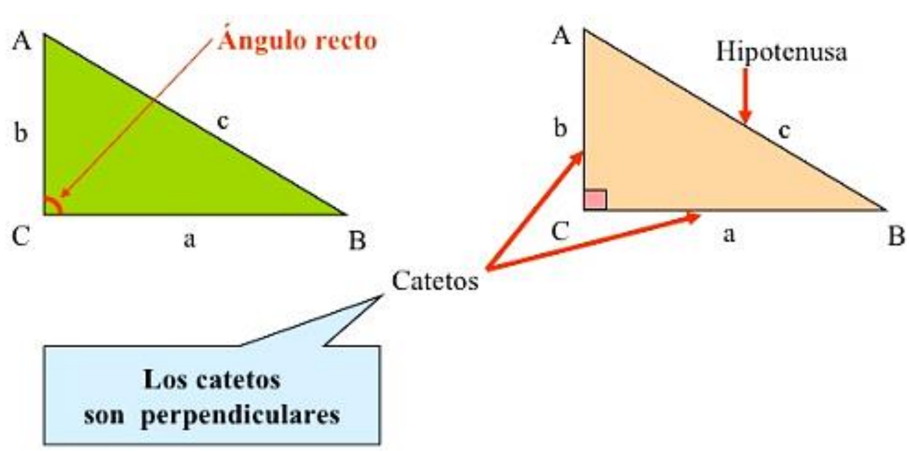
Tu formación como estudiante requiere conocimientos y habilidades matemáticas, para la búsqueda y solución de problemas que se presenten. Por eso, esta guía espera ser una herramienta para apoyarte, proporcionándote los conceptos y habilidades fundamentales para su aplicación en otras asignaturas o en la vida diaria, descubriendo la importancia de las matemáticas en todo lo que nos rodea.

Instrucciones:

- Lea atentamente la guía de autoaprendizaje.
- El estudio de esta guía es fundamental para la evaluación de los contenidos.
- Recuerden que pueden realizar sus consultas por medio del correo institucional del docente a cargo de su curso (nombreapellido@liceo1.cl).

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, los lados menores son los que forman el ángulo recto. Ello se llaman **catetos**. El lado mayor, y opuesto al ángulo recto, se llama **hipotenusa.**



El triángulo ABC de la figura anterior, tiene sus lados:

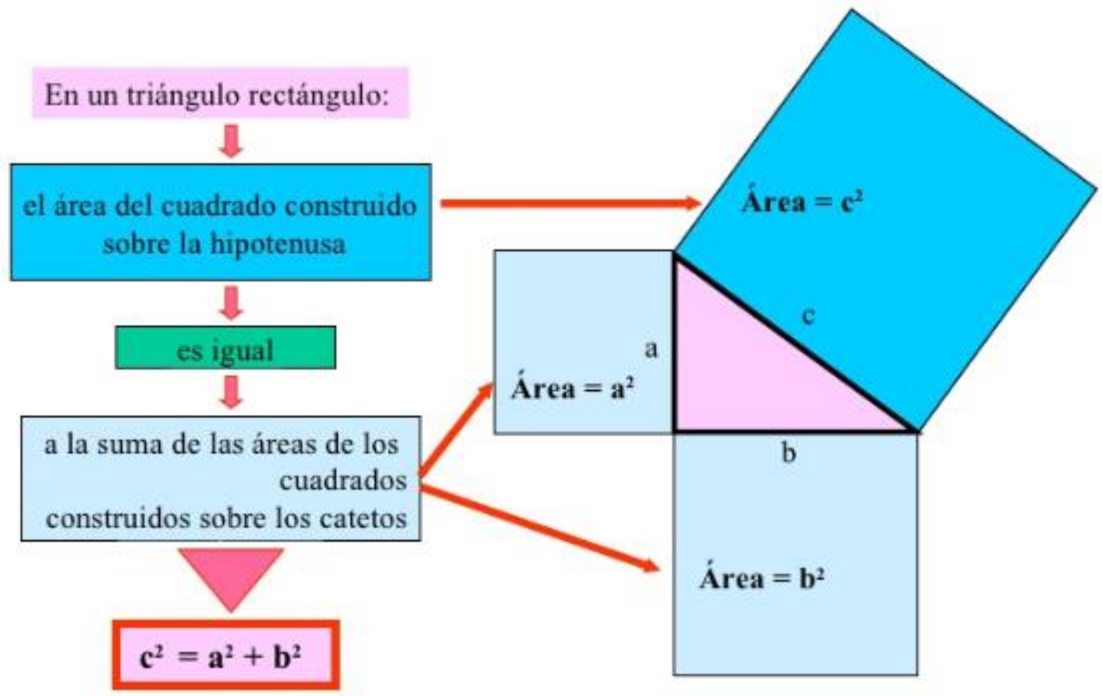
i. **b** y **a** que son los catetos, los cuales son perpendiculares (se intersectan en un ángulo de 90°)

ii. **c** que es la hipotenusa

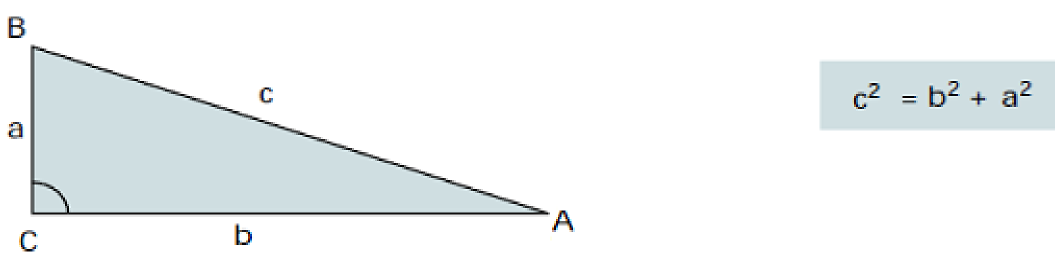
Considerando el triángulo ABC, el **TEOREMA DE PITÁGORAS** dice que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

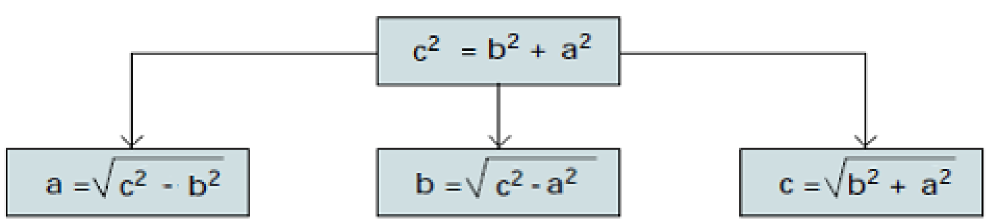
Es decir, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Esto es verdadero solamente si el triángulo es **rectángulo**.



Considerando la fórmula original, se puede obtener tres fórmulas que podernos ocupar, dependiendo del valor desconocido.

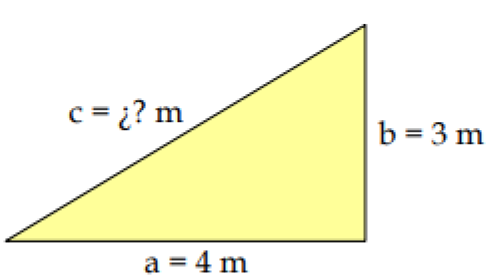


De esta fórmula se obtienen las siguientes:



Ejemplos:

1. Considerando el triángulo rectángulo de la figura, encuentra el lado desconocido ***c***



Solución:

El lado desconocido de este triángulo rectángulo es la hipotenusa, usando el Teorema de Pitágoras podemos encontrar el valor:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

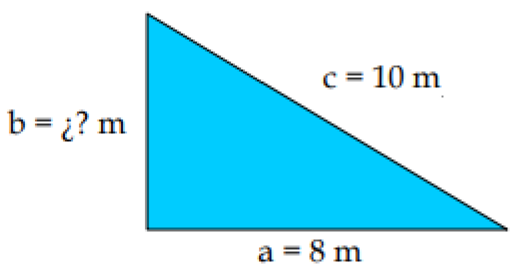
Reemplazamos los valores de los catetos, que en este caso son a=4m y b=3m

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$4^2 + 3^2 = c^2$$
$$16 + 9 = c^2$$
$$25 = c^2$$
$$\sqrt{25} = c$$
$$5 = c$$

Para encontrar el valor de c, debemos encontrar que número al cuadrado me da 25, o encontrar la raíz cuadrada de 25

R: El valor de la hipotenusa es c= 5m

2. Considerando el triángulo rectángulo de la figura, encuentra el lado desconocido ***b***



Esta vez, el lado desconocido es un cateto, pero de la misma forma podremos encontrar su valor al conocer las medidas del otro cateto (8m) y de la hipotenusa (10m) reemplazando en la fórmula general

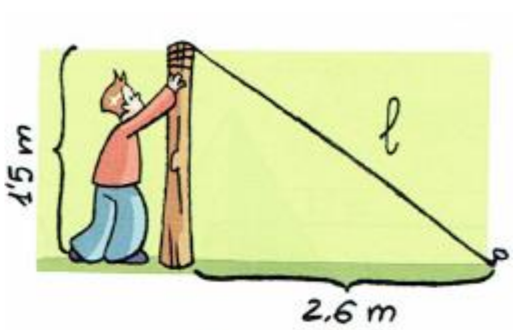
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$8^2 + b^2 = 10^2$$
$$64 + b^2 = 100$$
$$b^2 = 100 - 64$$
$$b^2 = 36$$
$$b = \sqrt{36}$$
$$b = 6$$

Luego de reemplazar, se despeja la incógnita b cuadrado.

Buscamos qué valor al cuadrado da 36, o encontramos la raíz cuadrada de 36

R: El valor del cateto faltante es b= 6m

3. Para sostener un poste de 1,5 m de alto, lo sujetamos con una cuerda situada a 2,6 m de la base del poste. ¿Cuál es la longitud, l, de la cuerda?



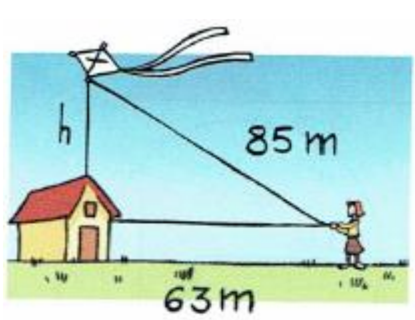
Del triángulo sabemos que es rectángulo y conocemos los dos catetos. Entonces, podemos calcular la hipotenusa, que en este caso es l

$$l^2 = (1{,}5)^2 + (2{,}6)^2$$
$$l^2 = 9{,}01$$
$$l = \sqrt{9{,}01}$$
$$l \approx 3{,}00167\ldots$$

Al no ser un valor exacto, podemos obtener el valor usando calculadora

R: La cuerda mide 3 metros aproximadamente.

4. La cuerda de una cometa mide 85 m, y esta se encuentra volando sobre una caseta que está a 63m de Lucía. ¿A qué altura sobre el suelo está la cometa?

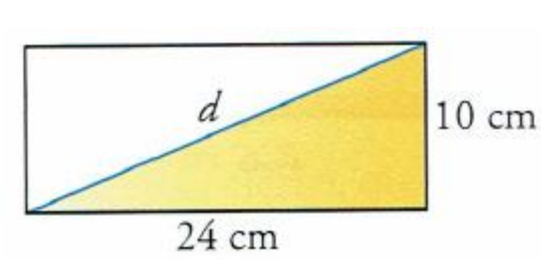


De este triángulo, sabemos que es rectángulo y conocemos el valor de la hipotenusa y de uno de sus catetos. Entonces podemos calcular el otro cateto.

$$h^2 + 63^3 = 85^2$$
$$h^2 + 3969 = 7225$$
$$h^2 = 7225 - 3969$$
$$h^2 = 3256$$
$$h = \sqrt{3256}$$
$$h \approx 57{,}061\ldots$$

R: El cometa se encuentra aproximadamente a 57 metros de altura, más la atura de la mano de Lucía.

5. APLICACIÓN: Las dimensiones de un rectángulo son a=10 cm, b= 24 cm. Calcula la longitud de la diagonal.

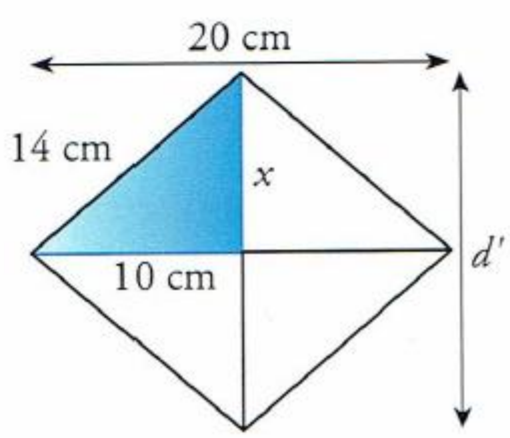


Como se logra observar, los lados y la diagonal forman un triángulo rectángulo, en donde la diagonal es la hipotenusa de este triángulo.

$$d = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26$$

R: La diagonal mide 26 cm.

6. APLICACIÓN: El lado de un rombo mide 14 cm, y una de sus diagonales, 20 cm. Hallar la longitud de la otra diagonal



Las diagonales en un rombo se intersectan en un ángulo recto (90°) y además se dimidian (se cortan justo en la mitad), y es por ello que un lado del rombo con la mitad de cada diagonal de éste, forman un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura. Conocemos la hipotenusa y un cateto, hay que buscar el valor del otro cateto.

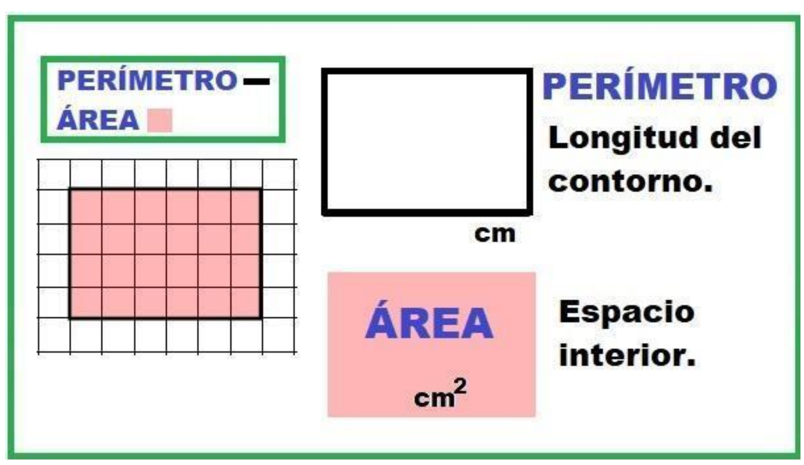
$$x = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} = 9{,}797958\ldots$$

$$x \approx 9{,}8 \qquad d' = 2x = 2 \cdot 9{,}8 = 19{,}6$$

R: La otra diagonal mide 19,6 cm aproximadamente.

<u>ÁREAS Y PERÍMETROS</u>

A continuación, trabajaremos con el cálculo de perímetros y áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios. Comenzaremos recordando qué es el perímetro y qué es el área de figuras planas.

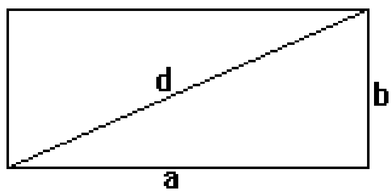


<u>**Perímetro**</u>: El perímetro de una figura plana y cerrada, es la longitud de la línea que la rodea. Si la figura es un polígono, su perímetro es la suma de la medida de todos sus lados. La unidad de medida es la misma que la de los lados del polígono (por ejemplo: lado en cm, perímetro en cm).

<u>**Área**</u>: El área de una figura plana es la medida de la porción de plano que ocupa, es decir, la medida de la superficie de una figura la cual se encuentra delimitada por el perímetro. La unidad de medida del área es el cuadrado de las unidades de medida de los lados del polígono (por ejemplo: lado en cm, área en cm^2)

Analizaremos en primer lugar las medidas paralelogramos:

RECTÁNGULO:



Perímetro: se suman las medidas de todos sus lados, los cuales, dos a dos y opuestos entre sí, son de la misma medida.

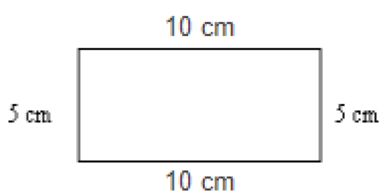
$$P = a + a + b + b = 2a + 2b$$

Área: El área se obtiene de multiplicar los dos lados de diferente medida, o como en muchos textos aparece, base por altura.

$$Á = a \cdot b$$

Ejemplo:

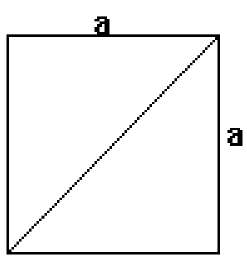
Puedes resolverlo usando la primera expresión o la segunda, depende de ti



Perímetro= $10\,cm + 10cm + 5cm + 5cm = 2 \cdot 10cm + 2 \cdot 5cm =$
$20cm + 10cm = 30cm$

Área= $5cm \times 10cm = 50cm^2$

CUADRADO:



Perímetro: se suman las medidas de todos sus lados, los cuales son de la misma medida.

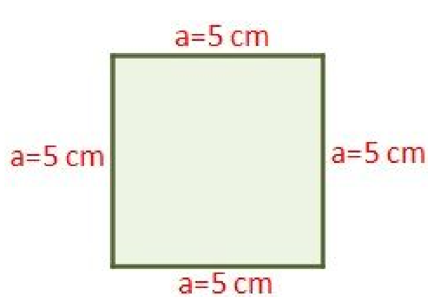
$$P = a + a + a + a = 4a$$

Área: El área se obtiene de multiplicar la medida del lado por sí mismo. Es la misma idea que el rectángulo, pero el cuadrado tiene los cuatro lados de la misma medida

$$Á = a \cdot a = a^2$$

Ejemplo:

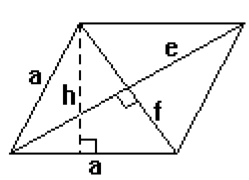
Puedes resolverlo usando la primera expresión o la segunda, depende de ti



Perímetro= $5cm + 5cm + 5cm + 5cm = 4 \times 5cm = 20cm$

Área= $5cm \times 5cm = 25cm^2$

ROMBO:



Perímetro: se suman las medidas de todos sus lados, los cuales son de la misma medida.

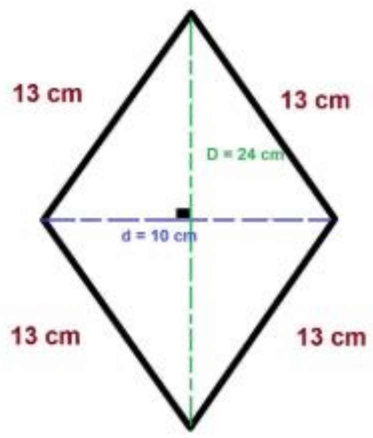
$$P = a + a + a + a = 4a$$

Área: El área se obtiene de multiplicar la medida de la altura por la base correspondiente, o si tenemos el valor de sus diagonales, el área será el semi producto entre ellas:

$$Á = base \cdot altura = a \cdot h$$

$$Á = \frac{diagonal_1 \cdot diagonal_2}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$$

Ejemplo:

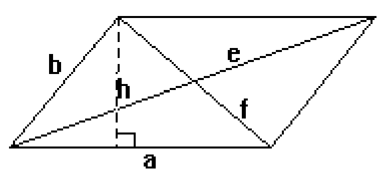


Puedes resolverlo usando la primera expresión o la segunda, depende de ti

Perímetro= $13cm + 13cm + 13cm + 13cm = 4 \times 13cm = 52cm$

Área= $\frac{24cm \times 10cm}{2} = \frac{240cm^2}{2} = 120cm^2$

ROMBOIDE:



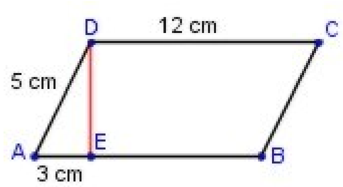
Perímetro: se suman las medidas de todos sus lados, siendo los lados opuestos de la misma medida.

$$P = a + a + b + b = 2a + 2b$$

Área: El área se obtiene de multiplicar la medida de la altura por la base correspondiente.

$$Á = base \cdot altura = a \cdot h$$

Ejemplo: En el romboide ABCD , trazo DC = 12 cm ; trazo AD = 5 cm y trazo AE = 3 cm



Perímetro= $2 \times 12cm + 2 \times 5cm = 24cm + 10cm = 34cm$

Para calcular el área, nos falta información, ya que no tenemos la medida de la altura de este romboide, pero podemos encontrar la medida utilizando el teorema de Pitágoras.

En el triángulo AED, tenemos la medida del cateto AE=3cm y la medida de la hipotenusa AD=5cm, desconocemos DE que es la altura del romboide (la llamaremos h)

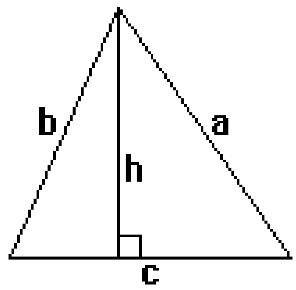
$$\begin{aligned} h^2 + 3^2 &= 5^2 \\ h^2 + 9 &= 25 \\ h^2 &= 25 - 9 \\ h^2 &= 16 \\ h &= \sqrt{16} \\ h &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida de la altura del romboide es 4 cm. Ahora podemos calcular el área de este, sabiendo que la base es AB, y que mide 12 cm:

Área= $12cm \times 4cm = 48cm^2$

A continuación, trabajaremos con las medidas de triángulos:

TRIÁNGULO CUALQUIERA:



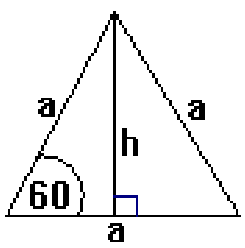
Perímetro: se suman todos los lados, la unidad de medida es la misma que la de los lados

$$P = a + b + c$$

Área: Se debe tener el valor de una altura, y es esa medida que se multiplica por la medida del lado que es perpendicular a esa altura (que llamaremos base).

$$Á = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$$

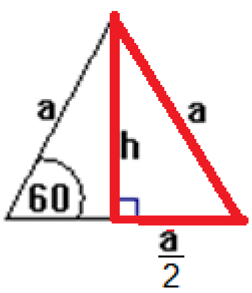
TRIÁNGULO EQUILÁTERO:



Perímetro: Como este triángulo tiene los tres lados de la misma medida, sumamos tres veces este valor

$$P = a + a + a = 3a$$

Área: Para encontrar el área de un triángulo equilátero, es necesario aplicar el teorema de Pitágoras



El triángulo rectángulo remarcado, tiene como cateto $\frac{a}{2}$, hipotenusa a y el cateto desconocido le llamamos "h" que es la altura del triángulo equilátero original. Aplicamos el teorema de Pitágoras

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

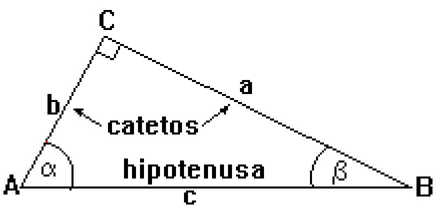
$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Teniendo ese valor, podemos aplicar el área de cualquier triángulo, la mitad entre la base por altura

$$Á = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO:



Perímetro: se suma la medida de todos sus lados

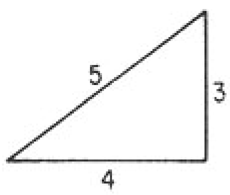
$$P = a + b + c$$

Área: en un triángulo rectángulo coincide altura y base con los catetos respectivamente, por lo que para calcular el área de un triángulo rectángulo podemos multiplicar los catetos y luego dividir este valor en dos.

$$Á = \frac{cateto \cdot cateto}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

Ejemplos: Encuentra el área y perímetro de los siguientes triángulos. Determinaremos que la unidad de medida de todos los lados es en cm.

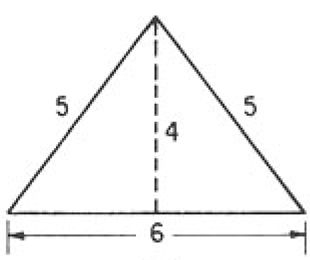
1. El triángulo de la figura es un triángulo rectángulo.



$$P = 5cm + 4cm + 3cm = 12cm$$

$$Á = \frac{3cm \times 4cm}{2} = \frac{12cm^2}{2} = 6cm^2$$

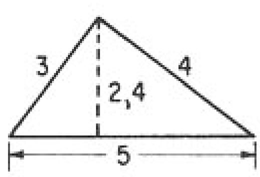
2. El triángulo de la figura es un triángulo isósceles:



$$P = 5cm + 5cm + 6cm = 16cm$$

$$Á = \frac{4cm \times 6cm}{2} = \frac{24cm^2}{2} = 12cm^2$$

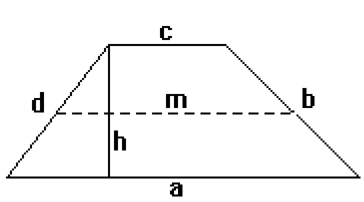
3. El triángulo es rectángulo, tal como el primero, pero en este caso nos dan la medida de la altura que se proyecta en la hipotenusa.



$$P = 5cm + 4cm + 3cm = 12cm$$

$$Á = \frac{2{,}4cm \times 5cm}{2} = \frac{12cm^2}{2} = 6cm^2$$

TRAPECIO:



Perímetro: Se suma todos los lados del trapecio

$$\boldsymbol{P = a + b + c + d}$$

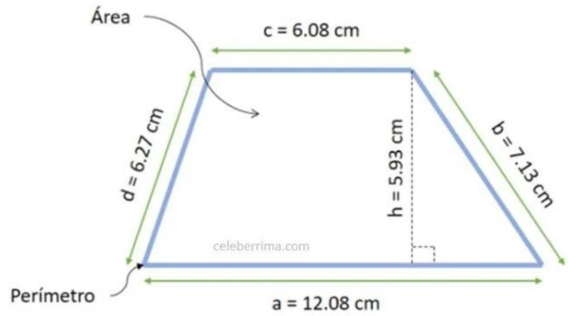
Área: Al igual que los otros cuadriláteros, debemos conocer la medida de su altura y de ambas bases

$$Á = \frac{(base_1 + base_2) \cdot altura}{2} = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$$

O también podemos calcular el área de un trapecio si conocemos la medida de su mediana y la altura perpendicular a la mediana.

$$\boldsymbol{Á = Mediana \cdot altura = m \cdot h}$$

Ejemplo:



Perímetro:

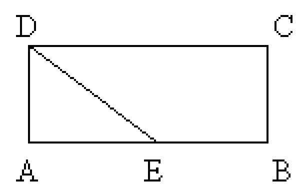
$$P = 12{,}08cm + 7{,}13cm + 6{,}08cm + 6{,}27cm = 31{,}56cm$$

Área:

$$\begin{aligned} Á &= \frac{(6{,}08cm + 12{,}08cm) \times 5{,}93cm}{2} \\ &= \frac{(18{,}16cm) \times 5{,}93cm}{2} \\ &= \frac{107{,}68888cm^2}{2} = 53{,}8444cm^2 \end{aligned}$$

Ejemplos combinados de áreas y perímetros.

1. Encuentra el área y el perímetro del rectángulo ABCD, en donde E es el punto medio de AB, AD = 6 m., DE = 10 m



Considerando el triángulo AED, que es rectángulo, tenemos la medida de DE que es la hipotenusa y mide 10 m, AD que es un cateto y mide 6 m, ahora debemos encontrar la medida de AE que es el otro cateto, para así conocer la medida del lado AB y calcular el área y el perímetro del rectángulo.

$$\begin{aligned} AE^2 + 6^2 &= 10^2 \\ AE^2 + 36 &= 100 \\ AE^2 &= 100 - 36 \\ AE^2 &= 64 \\ AE &= \sqrt{64} \\ AE &= 8 \end{aligned}$$

Encontrado la medida de AE=8m, podemos encontrar la medida del lado AB. Como E es el punto medio entre A y B, el segmento AB tiene el doble de la medida de AE. AB=16m

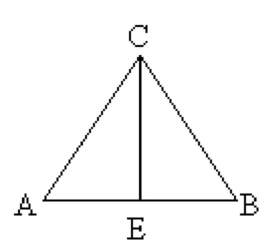
Para calcular el perímetro sumamos todos sus lados:

$$P = 2 \times 16m + 2 \times 6m = 32m + 12m = 44m$$

Para calcular el área, multiplicamos base por altura:

$$Á = 16m \times 6m = 96m^2$$

2. Encuentra el perímetro y el área del triángulo equilátero ABC, en donde CE es su altura y EB = 1 cm.



Si es un triángulo equilátero, todos sus lados son de la misma medida y además la altura dimidia al lado que es perpendicular a ella, es decir que AB es equivalente al doble de EB, AB= 2 cm

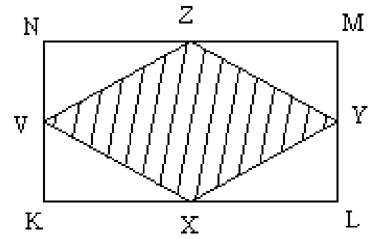
Perímetro: es tres veces la medida del lado.

$$P = 3 \times 2cm = 6cm$$

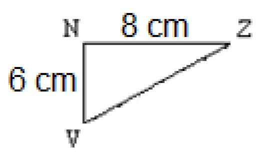
Área: Usaremos la fórmula encontrada para triángulo equilátero.

$$\acute{A}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}cm^2=\frac{4\sqrt{3}}{4}cm^2=\sqrt{3}cm^2\approx 1{,}73cm^2$$

3. Si LMNK es un rectángulo, y V, X, Y, Z son puntos medios de los lados NK, KL, LM y MN respectivamente; además $\overline{NM}=16\text{ cm}$ y $\overline{ML}=12\text{ cm}$, ¿cuál es el área y el perímetro de la superficie sombreada?

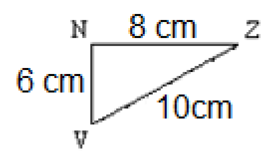


Como V, X, Y, Z son puntos medios, generan 4 triángulos rectángulos con las mismas medidas, de los cuales conocemos las medidas de sus catetos, pero no de sus hipotenusas, las cuales podemos encontrar con el teorema de Pitágoras



$$VZ^2=6^2+8^2$$
$$VZ^2=36+64$$
$$VZ^2=100$$
$$VZ=\sqrt{100}$$
$$VZ=10$$

Tenemos que los triángulos sin sombrear tienen todos las mismas medidas. Y como las medidas de VZ, ZY, YX y XV son iguales a 10 cm cada una, podemos encontrar el perímetro de la figura sombreada

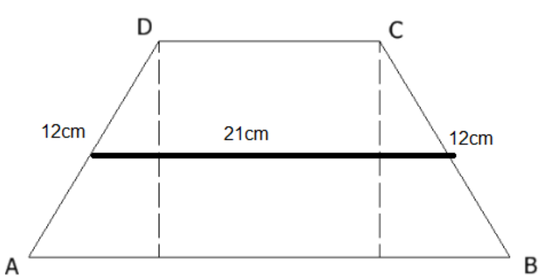


Perímetro: $P=4\times 10cm=40cm$

Para encontrar el área, debemos deducir en primero lugar que la figura sombreada es un rombo (ya que tiene todos sus lados de la misma medida) Al ser esta figura, podemos multiplicar las diagonales y luego dividir ese valor por dos. Si bien no se encuentran explícitas las medidas de las diagonales, son del mismo tamaño que los lados del rectángulo mayor $\overline{NM}=16\text{ cm}$ y $\overline{ML}=12\text{ cm}$

$$\acute{A}=\frac{16cm\times 12cm}{2}=\frac{192cm^2}{2}=96cm^2$$

4. La mediana de un trapecio isósceles mide 21 cm y los lados miden 12 cm. ¿Cuál es el perímetro del trapecio?



Según la información que se entrega en el enunciado, podemos deducir que la imagen sería muy similar a lo que se está explicando. Para encontrar el perímetro, nos falta la información de la medida de las bases, pero como nos entregan la mediana, podemos realizar algunos cálculos. La mediana es la semisuma de las bases, es decir:

$$\frac{b_1+b_2}{2}=21$$

Por lo tanto, se puede saber que la suma de las bases es 42 cm.

Para el perímetro de este trapecio, debemos conocer la suma de todos sus lados, es decir

$$P=12+b_1+b_2+12=12+42+12=66cm$$