Liceo 1 Javiera Carrera

MÓDULO DE MATEMÁTICA
Desigualdades e Inecuaciones
4° Medio (2020)

Prof. Cecilia Cáceres

Nombre:………………………………………………………………Curso: 4°…. Fecha:………

Aprendizajes Esperados
AE 02
Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.
Contenidos
Tema 1: Desigualdades e inecuaciones de primer grado: orden, valor absoluto y propiedades.
Tema 2: Propiedades de las desigualdades.
Tema 3: Inecuaciones lineales con una incógnita
Tema 4: Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.
Tema 5: Desigualdades con valor absoluto
5.1 Ecuaciones con una incógnita con valor absoluto
5.2 inecuaciones con una incógnita con valor absoluto

DESIGUALDADES

Se denomina **desigualdad** a toda relación que se establece entre números reales mediante la comparación "**menor que**" (<), "**menor o igual que**" (≤), "**mayor que**" (>) o "**mayor o igual que**" (≥).
Una desigualdad se cumple si la relación establecida es verdadera.

Ejemplos:

1. Las desigualdades $-5 < 2$ y $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ son verdaderas
2. Las desigualdades $1 < 0$ y $3 < -0{,}6$ son falsas.

Propiedades de las desigualdades

Algunas de las propiedades de las desigualdades son:

- **Transitividad**: Sean a, b y c tres números reales.

  $\boxed{\text{Si } a \leq b \text{ y } b \leq c, \text{ entonces } a \leq c}$

- **Propiedad aditiva**: Si a ambos lados de una desigualdad se suma (o resta) un mismo número, entonces la desigualdad se mantiene. Es decir:

  $\boxed{a \leq b \ \Rightarrow a + c \leq b + c}$ $\boxed{a \leq b \ \Rightarrow a - c \leq b - c}$

- **Propiedad multiplicativa**: Si a ambos lados de una desigualdad se multiplica (o divide) por un mismo número **positivo**, la desigualdad se mantiene. Es decir:

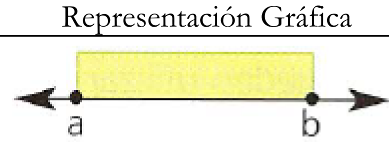
  $\boxed{a \leq b \ \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c}$ $\boxed{a \leq b \ \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}}$

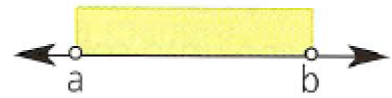
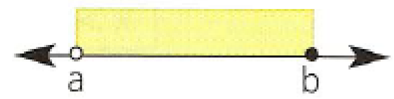
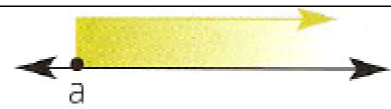
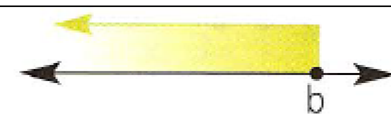
  Si a ambos lados de una desigualdad se multiplica (o divide) por un mismo número **negativo**, la desigualdad se invierte. Es decir:

  $\boxed{a \leq b \ \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c}$ $\boxed{a \leq b \ \Rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}}$

Intervalos de números reales

Dados dos números $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{a < b}$, se llama **intervalo de números reales** a los siguientes subconjuntos de ℝ.

Tipos de Intervalos	Notación	Conjunto	Representación Gráfica
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	

Intervalo abierto	$]a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Intervalo semiabierto	$[a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
	$]a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
Intervalo no acotado	$[a,+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
	$]a,+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
	$]-\infty,b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	
	$]-\infty,b[$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	

Ejemplo

El intervalo semiabierto $]-8,6]$ es el conjunto de todos los números reales mayores que -8 y menores o iguales que 6.

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

- Es una **desigualdad** formada por números reales y una incógnita.
  Ejemplos
  1) $3x + 2 \leq 5$ 2) $-6x - 7 \geq 0$

- **Resolver una inecuación** es determinar el **conjunto solución** de números reales que hacen que la desigualdad se cumpla. Para esto se pueden utilizar las propiedades de las desigualdades.
  Ejemplo
  El conjunto solución de $2x + 5 > 1$ es el intervalo $]-2,+\infty[$ pues:

$$2x + 5 > 1$$
$$2x > -4$$
$$\boxed{x > -2}$$

Ejemplos

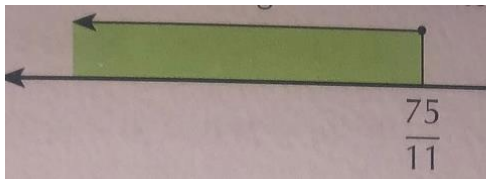
1. Resolver la inecuación $2x - 5 < x + 2$

$$2x - 5 < x + 2$$
$$2x - x < 2 + 5$$
$$x < 7$$

Solución: $]-\infty,7[$

2. Resolver la inecuación $4 - \frac{x}{3} \geq \frac{2x}{5} - 1$

$$4 - \frac{x}{3} \geq \frac{2x}{5} - 1 \quad /\cdot 15$$
$$60 - 5x \geq 6x - 15$$
$$-5x - 6x \geq -15 - 60$$
$$-11x \geq -75 \quad /\cdot -1$$
$$11x \leq 75 \quad /: 11$$
$$x \leq \frac{75}{11}$$



Solución: $\left]-\infty, \frac{75}{11}\right]$

3. Resolver la inecuación $(x-1)^2 \leq x^2 - \frac{x}{2} + 3$

$$x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - \frac{x}{2} + 3$$
$$x^2 - 2x - x^2 + \frac{x}{2} \leq 3 - 1$$
$$-2x + \frac{x}{2} \leq 2 \quad /\cdot 2$$
$$-4x + x \leq 4$$
$$-3x \leq 4 \quad /: -3$$
$$x \geq -\frac{4}{3}$$

Solución: $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICANDO INECUACIONES

Hay un sinnúmero de problemas que se pueden resolver planteando, con sus datos, inecuaciones de primer grado.
Para resolver un problema, se recomiendan los siguientes pasos:

1. **Leer** atenta y **comprensivamente** el enunciado del problema.
2. **Identificar la incógnita** y los datos que se utilizarán en la solución.
3. Relacionar los datos con a incógnita planteando una **inecuación**.
4. **Resolver** la inecuación.
5. **Analizar el conjunto solución** de la inecuación cuidando que tenga relación con el enunciado y la pregunta planteada en el problema,
6. **Dar** la respuesta.

Ejemplos.

1. ¿Cuántos números naturales cumplen la condición de que su décima parte es mayor o igual que su mitad disminuida en 2?

x: números que cumplen con la condición.

$$\begin{aligned} \frac{x}{10} &\geq \frac{x}{2} - 2 \quad /\cdot 10 \\ x &\geq 5x - 20 \\ x - 5x &\geq -20 \\ -4x &\geq -20 \quad /:-4 \\ x &\leq 5 \end{aligned}$$

$$S:]-\infty, 5]$$

Como el problema pide cuántos números naturales cumplen con la condición, debemos ver cuántos números naturales encontramos en el intervalo solución de la inecuación. Estos números son 1, 2, 3, 4 y 5, luego:

Respuesta: 5 números naturales cumplen con la condición del problema.

2. Marcela, Francisco y Felipe son hermanos. Marcela tiene 15 años y Francisco 3 más que Felipe. La suma de los años de Francisco y Felipe no alcanza a igualar la edad de Marcela. ¿Cuántos años tiene Felipe, si su edad es un número impar?

Marcela: 15 años Felipe: x años Francisco: $(x+3)$ años

$$\begin{aligned} x + (x+3) &< 15 \\ x + x + 3 &< 15 \\ 2x + 3 &< 15 \\ 2x &< 15 - 3 \\ 2x &< 12 \quad /:2 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

$$S:]-\infty, 6[$$

Como x representa la edad de Felipe, debe ser un número natural e impar, debemos ver qué números del intervalo cumplen con esas condiciones. Estos números son 1, 3 y 5, luego:

Respuesta: Felipe puede tener 1, 3 ó 5 años.

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Se llaman **sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita** a aquellas inecuaciones que se satisfacen **simultáneamente**. Se considera como solución del sistema aquel intervalo para el cual se satisfacen **todas** las inecuaciones del sistema, es decir, el intervalo que corresponde a la **intersección** de las soluciones de todas las inecuaciones del sistema.

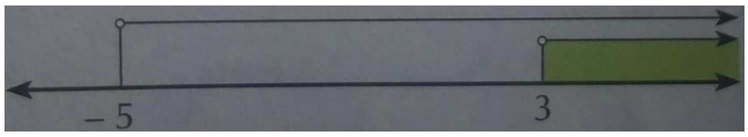
Ejemplos

1. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{array}{rr} 1) & x - 1 > 2 \\ 2) & x - 2 < 2x + 3 \end{array}$$

Resolviendo 1)	Resolviendo 2)
$x - 1 > 2$ $x > 3$	$x - 2 < 2x + 3$ $x - 2x < 3 + 2$ $-x < 5 \quad /\cdot -1$ $x > -5$

Graficando ambas soluciones en la misma recta numérica, se tiene que:



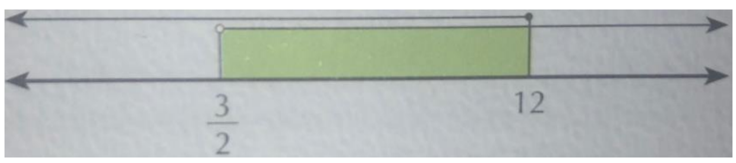
Al comparar ambas soluciones vemos que ambas inecuaciones se satisfacen para $x > 3$, luego la solución del sistema es: $]3, +\infty[$

2. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 3x - 1 > x + 2 \\ 2) & \frac{x}{2} \leq \frac{x}{4} + 3 \end{array}\right|$$

Resolviendo 1)	Resolviendo 2)
$3x - 1 > x + 2$ $3x - x > 2 + 1$ $2x > 3 \quad /:2$ $x > \frac{3}{2}$	$\frac{x}{2} \leq \frac{x}{4} + 3 \quad /\cdot 4$ $2x \leq x + 12$ $2x - x \leq 12$ $x \leq 12$

Graficando ambas soluciones en la misma recta numérica, se tiene que:



Al comparar ambas soluciones vemos que ambas inecuaciones se satisfacen sólo en la intersección de ellas, es decir, para $\frac{3}{2} < x \leq 12$, luego la solución del sistema es: $\left]\frac{3}{2}, 12\right]$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 5x - 1 > 0 \\ 2) & 3x + 3 < x + 1 \end{array}\right|$$

Resolviendo 1)	Resolviendo 2)
$5x - 1 > 0$ $5x > 1 \quad /:5$ $x > \frac{1}{5}$	$3x + 3 < x + 1$ $3x - x < 1 - 3$ $2x < -2 \quad /:2$ $x < -1$

Graficando ambas soluciones en la misma recta numérica, se tiene que:

Al comparar ambas soluciones vemos que no hay ninguna solución común, es decir, no existe ningún x que satisfaga ambas inecuaciones, luego la solución del sistema es: $\emptyset$ (vacía)

DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

I. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Para resolver ecuaciones con valor absoluto se debe considerar la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Resolver una ecuación con valor absoluto es encontrar el conjunto de soluciones que la satisfacen. Este conjunto puede tener dos valores, un valor o ninguno (conjunto vacío)

Ejemplos

1. $|x+2| = 5$

Para revolver esta ecuación se deben analizar los dos casos posibles según la definición del valor absoluto:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & si\ x+2 \geq 0 \\ -(x+2), & si\ x+2 < 0 \end{cases}$$

$|x+2| = x+2, \quad si\ x+2 \geq 0$ $x \geq -2$ El primer caso indica que $|x+2| = x+2$ si se cumple que $x \geq -2$, esto quiere decir que el valor de x debe satisfacer la condición $x \geq -2$ $x+2 = 5$ $x = 3$ Como $x = 3$ cumple con la condición $x \geq -2$, tenemos que es una solución.	$|x+2| = -(x+2), \quad si\ x+2 < 0$ $x < -2$ El segundo caso indica que $|x+2| = -(x+2)$ si se cumple que $x < -2$, esto quiere decir que el valor de x debe satisfacer la condición $x < -2$ $-(x+2) = 5$ $-x-2 = 5$ $-x = 7 \ /\cdot -1$ $x = -7$ Como $x = -7$ cumple con la condición $x < -2$, tenemos que es una solución.

Luego, la solución de la ecuación es: $\{-7,3\}$

2. $|7x+3| - 2 = 1 - x$

Para revolver esta ecuación se deben analizar los dos casos posibles según la definición del valor absoluto:

$$|7x+3| = \begin{cases} 7x+3, & si\ 7x+3 \geq 0 \\ -(7x+3), & si\ 7x+3 < 0 \end{cases}$$

$|7x+3| = 7x+3,$ si $7x+3 \geq 0$ $7x \geq -3 \ /:7$ $x \geq -\frac{3}{7}$ El primer caso indica que $|7x+3| = 7x+3$ si se cumple que $x \geq -\frac{3}{7}$, esto quiere decir que el valor de x debe satisfacer la condición $x \geq -\frac{3}{7}$ $7x+3-2 = 1-x$ $7x+1 = 1-x$ $7x+x = 1-1$ $8x = 0 \ /:8$ $x = 0$ Como $x = 0$ cumple con la condición $x \geq -\frac{3}{7}$, tenemos que es una solución.	$|7x+3| = -(7x+3),$ si $7x+3 < 0$ $7x < -3 \ /:7$ $x < -\frac{3}{7}$ El primer caso indica que $|7x+3| = -(7x+3)$ si se cumple que $x < -\frac{3}{7}$, esto quiere decir que el valor de x debe satisfacer la condición $x < -\frac{3}{7}$ $-(7x+3)-2 = 1-x$ $-7x-3-2 = 1-x$ $-7x-5 = 1-x$ $-7x+x = 1+5$ $-6x = 6 \ /:-6$ $x = -1$ Como $x = -1$ cumple con la condición $x < -\frac{3}{7}$, tenemos que es una solución.

Luego, la solución de la ecuación es: $\{-1,0\}$

3. $-3 = 8x - |9x + 4|$

Para revolver esta ecuación se deben analizar los dos casos posibles según la definición del valor absoluto:

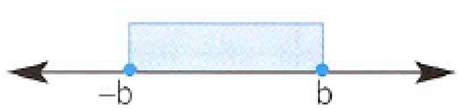
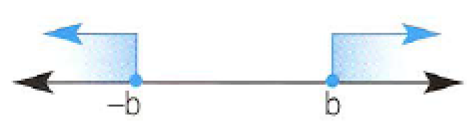
$$|9x+4| = \begin{cases} 9x+4, & si\ 9x+4 \geq 0 \\ -(9x+4), & si\ 9x+4 < 0 \end{cases}$$

$|9x+4| = 9x+4,$ si $9x+4 \geq 0$ $9x \geq -4 \ /:9$ $x \geq -\frac{4}{9}$ El primer caso indica que $|9x+4| = 9x+4$ si se cumple que $x \geq -\frac{4}{9}$, esto quiere decir que el valor de x debe satisfacer la condición $x \geq -\frac{4}{9}$ $-3 = 8x - (9x+4)$ $-3 = 8x - 9x - 4$ $-3 = -x - 4$ $x = -1$ Como $x = -1$ NO cumple con la condición $x \geq -\frac{4}{9}$, tenemos que NO es una solución.	$|9x+4| = -(9x+4),$ si $9x+4 < 0$ $9x < -4 \ /:9$ $x < -\frac{4}{9}$ El primer caso indica que $|9x+4| = -(9x+4)$ si se cumple que $x < -\frac{4}{9}$, esto quiere decir que el valor de x debe satisfacer la condición $x < -\frac{4}{9}$ $-3 = 8x - \left(-(9x+4)\right)$ $-3 = 8x + 9x + 4$ $-3 - 4 = 17x$ $-7 = 17x \quad /:17$ $-\frac{7}{17} = x$ Como $x = -\frac{7}{17}$ NO cumple con la condición $x < -\frac{4}{9}$, tenemos que NO es una solución.

Luego, la solución de la ecuación es: $\emptyset$ (vacía)

II. INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Para resolver las inecuaciones con valor absoluto es importante considerar lo siguiente:

Si $|x| \leq b$, entonces $-b \leq x \leq b$. Esto se puede representar gráficamente como:  	Si $|x| \geq b$, entonces $x \geq b$ o $x \leq -b$. Esto se puede representar gráficamente como: 

- **Inecuaciones de la forma $|ax+b| \leq c$.** Para resolver este tipo de inecuaciones se puede proceder de la siguiente manera: si $|ax+b| \leq c$, entonces se debe cumplir que $-c \leq ax+b \leq c$. Esto es equivalente a resolver las inecuaciones $-c \leq ax+b$ y $ax+b \leq c$. Al resolver estas inecuaciones se obtiene un conjunto de soluciones para cada una S_1 y S_2. El conjunto solución S de la inecuación $|ax+b| \leq c$ está dado por la intersección de S_1 y S_2, es decir $S = S_1 \cap S_2$

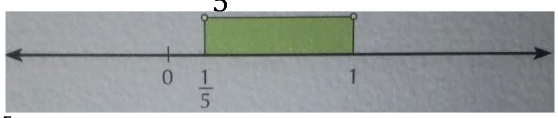
- **Inecuaciones de la forma $|ax+b| \geq c$.** Para resolver este tipo de inecuaciones se puede proceder de la siguiente manera: si $|ax+b| \geq c$, entonces se debe cumplir que $ax+b \geq c$, o bien $ax+b \leq -c$. Al resolver estas inecuaciones se obtiene un conjunto de soluciones para cada una, S_1 y S_2. El conjunto solución S de la inecuación $|ax+b| \geq c$ está dado por la unión de S_1 y S_2, es decir $S = S_1 \cup S_2$

Ejemplos.

1. Resolver la inecuación: $|5x-3|<2$

Esta inecuación corresponde al primer caso, quiere decir que: $-2<5x-3<2$

$$-2<5x-3<2 \quad /+3$$
$$-2+3<5x<2+3$$
$$1<5x<5 \quad /:5$$
$$\frac{1}{5}<x<1$$



Solución: $\left]\frac{1}{5},1\right[$

2. Resolver la inecuación: $|5+2x|\geq 3$

Esta inecuación corresponde al segundo caso, es decir: $5+2x\geq 3$ ó $5+2x\leq -3$

$$5+2x\geq 3$$
$$2x\geq 3-5$$
$$2x\geq -2 \quad /:2$$
$$x\geq -1$$
$$S_1: [-1,+\infty[$$

ó

$$5+2x\leq -3$$
$$2x\leq -3-5$$
$$2x\leq -8 \quad /:2$$
$$x\leq -4$$
$$S_2:]-\infty,-4]$$

Solución: $]-\infty,-4]\cup[-1,\infty[$

Material de apoyo

Si necesitas reforzar estos contenidos, puedes revisar el siguiente link de "Aprendo en línea":

https://curriculumnacional.mineduc.cl/estudiante/621/w3-article-139387.html

Allí podrás revisar en "Clases completas" las clases 1 a 24. Además, puedes revisar videos asociados a desigualdades.