Guía matrices

Un determinante es un número real asociado a cada una de las matrices cuadradas. El determinante de una matriz cuadrada A se denota por detA ó bien $|A|$.

Matriz 2x2

A=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ luego detA=ad-cd

Ejemplo:

A=$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ detA=$5 \cdot 8 - (-3) \cdot 6 = 40 + 18 = 58$

Matriz 3x3

A=$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ En las matrices de 3x3 cada elemento de la matriz lleva un signo A=$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Luego para calcular el detA

$$a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

El número de afuera multiplica al determinante de la matriz de 2x2

Ejemplo

A=$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -5 & 2 & 10 \\ -6 & 3 & 11 \end{bmatrix}$

detA=

$$4 \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} + (-6) \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$4(22 - 30) + 5(11 + 21) - 6(10 + 14)$$

$$-32 + 160 - 144 = -16$$

Regla de Sarrus

La siguiente regla sólo sirve en matrices de 3x3

$$A = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

Copiamos las primeras dos filas al lado derecho de la matriz

$$A = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

\-   -   -   +   +   +

Luego trazamos diagonales, estos números se deben multiplicar y debemos respetar su signo correspondiente, resultando:

$$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Si factorizamos por (-1) los tres términos finales

$$aei + bfg + cdh - (ceg + afh + bdi)$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -5 & 2 & 10 \\ -6 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \\ -6 & 3 \end{matrix}$$

$$4 \cdot 2 \cdot 11 + 1 \cdot 10 \cdot (-6) + (-7) \cdot (-5) \cdot 3 - 1 \cdot (-5) \cdot 11 - 4 \cdot 10 \cdot 3 - 7 \cdot 2 \cdot (-6) = -16$$

Regla de Cramer

Sirve para resolver sistemas de ecuaciones, haciendo uso de matrices.

$$\left. \begin{matrix} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{matrix} \right|$$

Designaremos:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$$

$\Delta y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$ Debemos calcular el determinante de cada una de esas matrices

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Luego:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Ejemplo

$$\left. \begin{matrix} 5x - 8y = 42 \\ 3x + 2y = 32 \end{matrix} \right|$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 42 & -8 \\ 32 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{84 - (-256)}{10 - (-24)} = \frac{340}{34} = 10$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 42 \\ 3 & 32 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{160 - 126}{10 - (-24)} = \frac{34}{34} = 1$$

Ahora veamos un ejemplo en una matriz de 3x3

Nota que los términos libres ocupan el lugar de la variable

$$\left. \begin{matrix} x + y + z = 7 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 3y - z = 1 \end{matrix} \right|$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 13 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 13 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Se resuelve igual que en un sistema de 2x2 la diferencia está que debemos calcular determinante de 3x3

términos libres ocupan el lugar de la variable

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 13 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 13 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 13 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} = 20$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

Finalmente:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{20}{4} = 5$$

Guía Funciones

Función par

$$f(-x) = f(x)$$

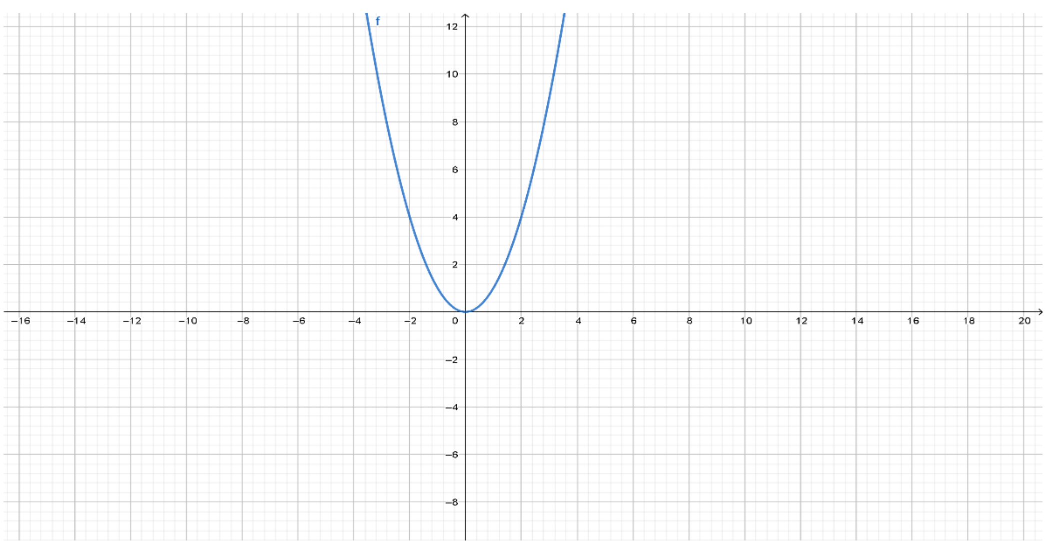
Ejemplo

$$f(x) = x^2$$

Evaluamos (-x) en la función

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

En una función par se cumple que el gráfico de f(x) es simétrico respecto del eje y



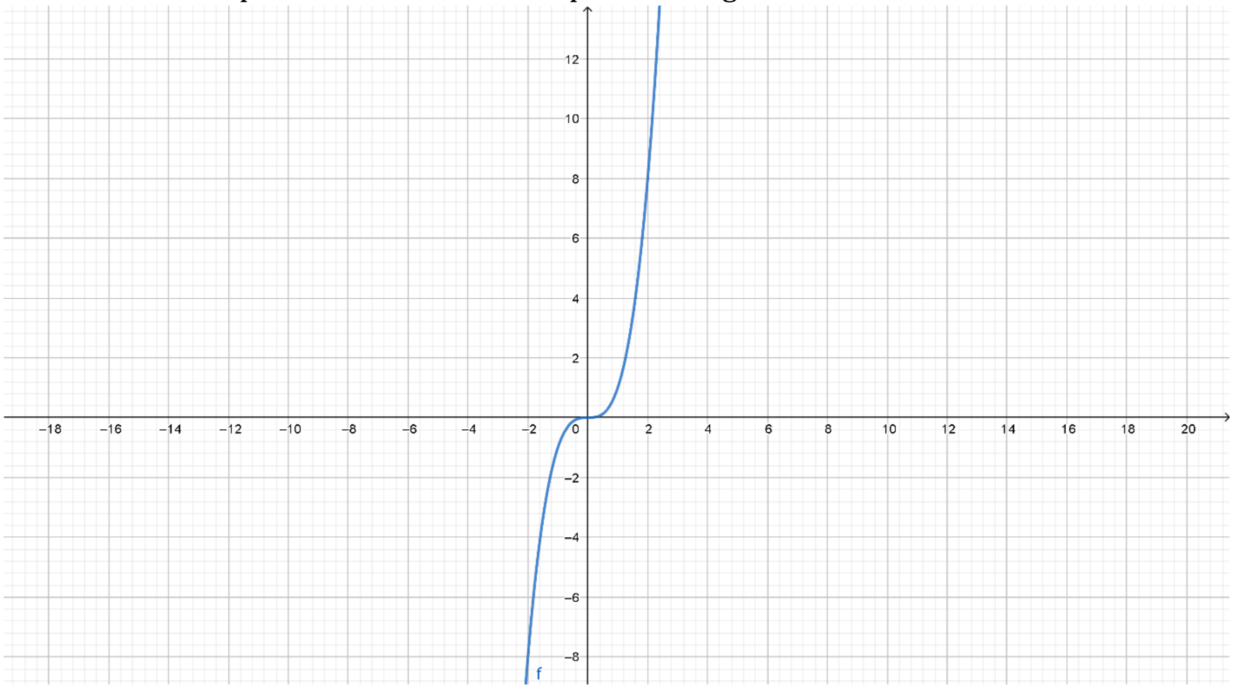
Función Impar

$$f(-x) = -f(x)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f(-x) &= (-x)^3 \\ &= -x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Las funciones impares son simétricas respecto al origen



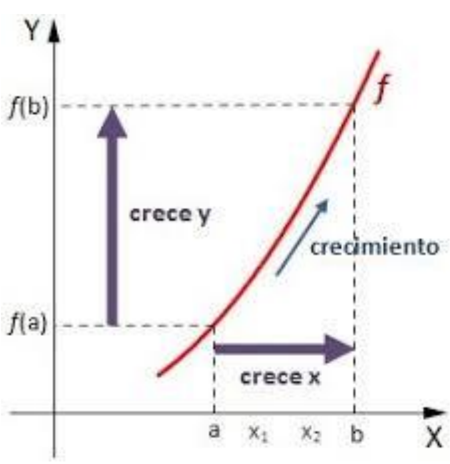
Para ver si una función es par o impar, basta evaluar (-x) en la función y luego ver si resulta la misma función f(x) o la función con todos sus signos cambiados –f(x). Hay casos en los que la función a analizar no es par ni impar.

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 2x, evaluamos\ (-x)$$
$$f(-x) = (-x)^2 + 2 \cdot (-x)$$
$$f(-x) = x^2 - 2x$$

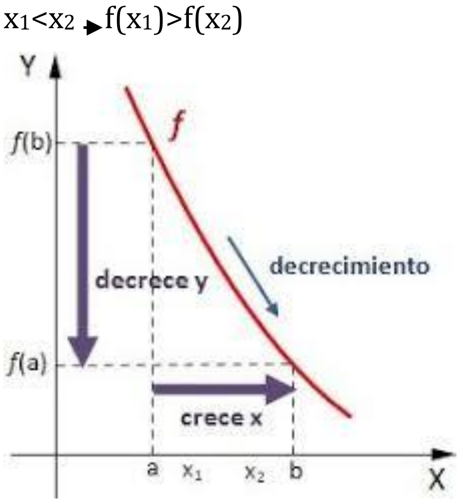
Función Creciente

A medida que aumenta la x, aumenta la y. La función será creciente en un intervalo si se cumple.
$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$



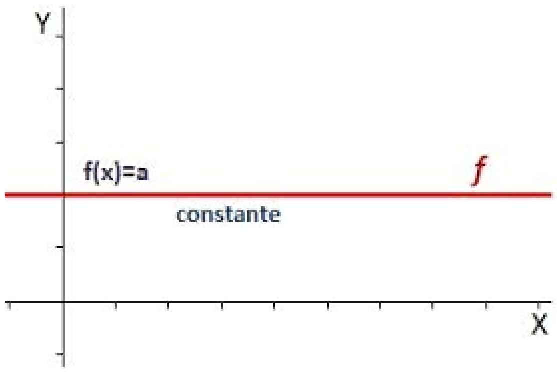
Función Decreciente

A medida que aumenta la x, disminuye la y. La función será decreciente en un intervalo si se cumple.
$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)>f(x_2)$



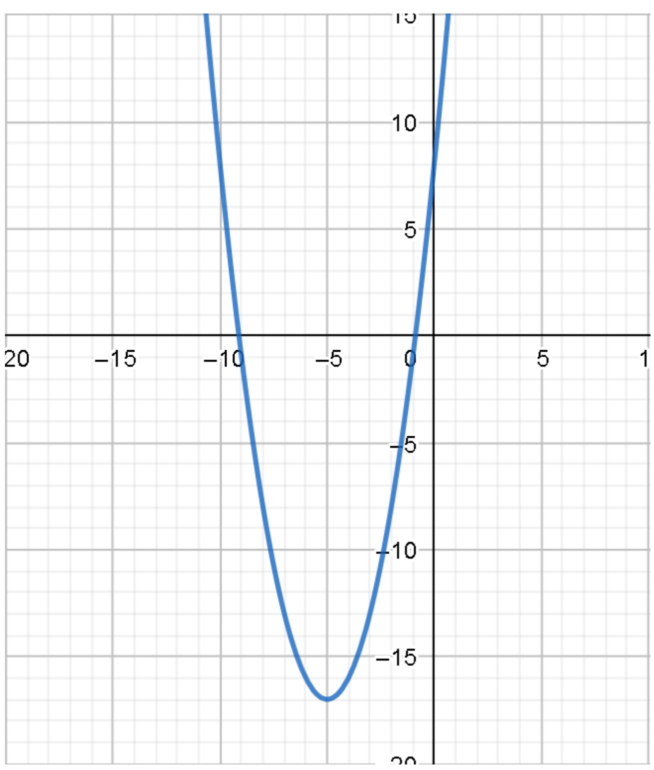
Función Constante

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$



Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^2 + 10x + 8$



Podemos observar que la función decrece hasta un punto y luego comienza a subir, dicho punto es el vértice (vemos el comportamiento en el eje Y pero anotamos el intervalo del eje X).

El vértice de la parábola tiene como coordenada X=-5, por lo tanto, vemos que la parábola viene bajando desde el infinito hasta el -5, para luego a partir de ese -5 empezar a subir. Escrito en intervalos queda:

$]-\infty, -5[$ Decreciente

$]-5, +\infty[$ Creciente

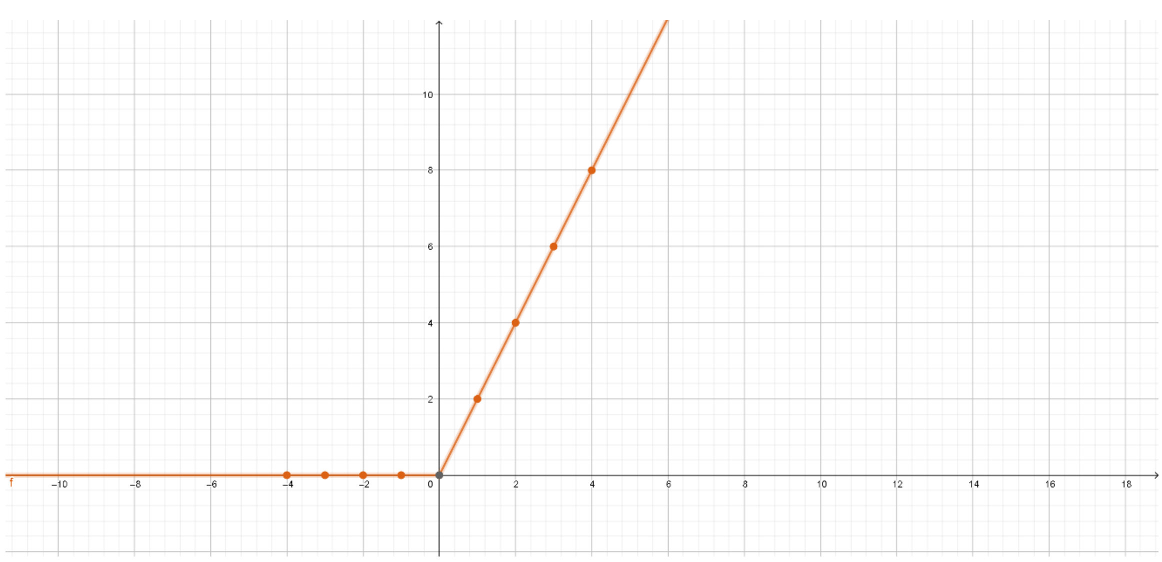
El -5 no se incluye ya que en ese punto la parábola no crece ni decrece.

Hemos visto que para analizar los intervalos de crecimiento/decrecimiento en una parábola debemos buscar el vértice. En caso de tener otra función debemos hacer una tabla de valores.

Ejemplo

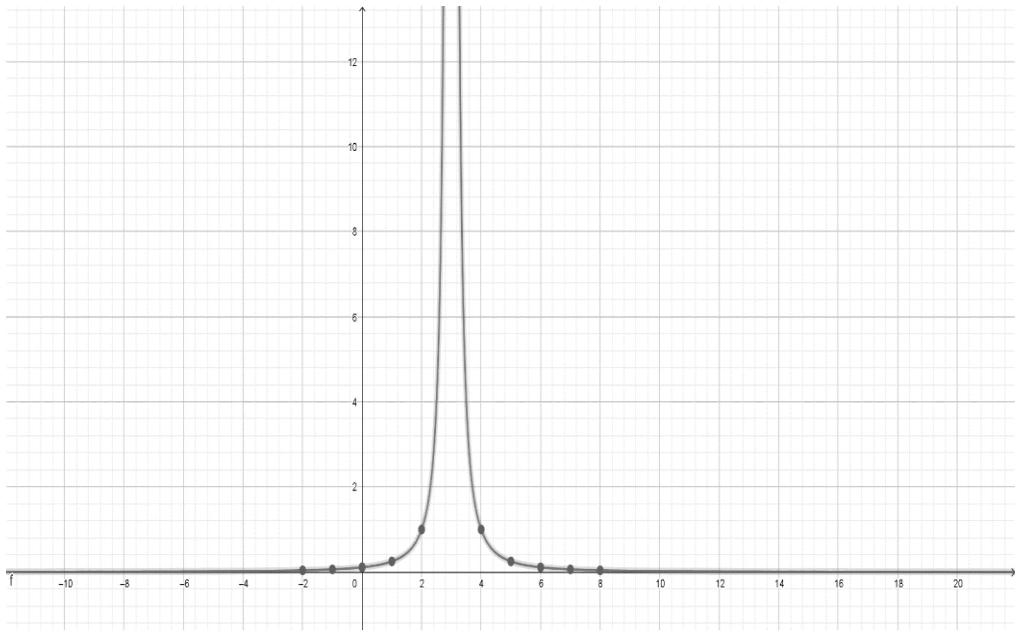
$f(x) = |x| + x$

X	Y
-4	0
-3	0
-2	0
-1	0
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8



$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$

x	f(x)
-2	0.04
-1	0.0625
0	0.1111111111111
1	0.25
2	1
3	∞
4	1
5	0.25
6	0.1111111111111
7	0.0625
8	0.04



Álgebra de funciones

$$(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)_{(x)} = f(x) - g(x)$$

$$(fg)_{(x)} = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\ , g(x) \neq 0$$

El dominio de cada función está dado por la intersección de los dominios de las funciones f y g

Sean $f(x) = x^3 - 2x^2\ y\ g(x) = 3x^2 - 1$

$$f + g = x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 1 = x^3 + 2x^2 - 1; dom\ R$$

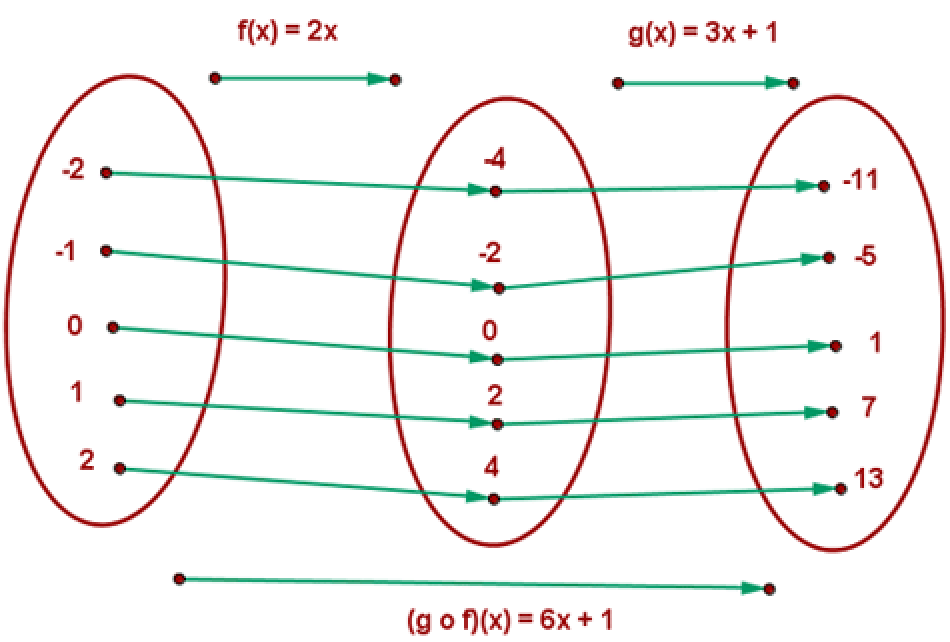
$$f - g = x^3 - 2x^2 - (3x^2 - 1) = x^3 - 5x^2 + 1; dom\ R$$

$$f \cdot g = (x^3 - 2x^2)(\ 3x^2 - 1) = 3x^5 - x^3 - 6x^4 + 2x^2; dom\ R$$

$$\frac{f}{g} = \frac{x^3 - 2x^2}{3x^2 - 1}; dom\ R - \left\{\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Composición de funciones

Sean f(x) y g(x) de modo que el dominio de la segunda este contenido dentro del recorrido de la primera.



Ejemplo

Sean f(x)=2x+3 y g(x)=4x-1

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f(4x-1) = 2(4x-1)+3 = 8x+1$$

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x+3) = 4(2x+3)-1 = 8x+11$$

$$gog(x) = g\big(g(x)\big) = g(4x-1) = 4(4x-1)-1 = 16x-5$$

$$fof(x) = f\big(f(x)\big) = f(2x+3) = 2(2x+3)+3 = 4x+9$$

Página para graficar

https://www.geogebra.org/graphing?lang=es

Página para obtener contenidos

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/