Retroalimentación de "Sumatoria"

Unidad de Aprendizaje: Procesos Infinitos

4to diferenciado 1 2020

Coordinación: Natalia Carrasco

Aprendizajes Esperados:

- Reconocer que una suma se puede representar en forma compacta por medio de la notación de sumatoria.
- Aplicar propiedades de las sumatorias

Antes de explicar el desarrollo de algunos ejercicios es importante recordar algunas propiedades:

Formulario

1	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$	2	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}$
3	$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$	4	$\sum_{k=1}^{n} c = n\cdot c$
5	$\sum_{k=p}^{n} c = (n-p+1)\cdot c$	6	$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k$

Ejercicios

a) $$\sum_{k=1}^{3} 2k+1 = (2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+(2\cdot 3+1)$$
$$= 15$$

b) $$\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \cdot 2k = (-1)^1\cdot 2\cdot 1 + (-1)^2\cdot 2\cdot 2 + (-1)^3\cdot 2\cdot 3 + (-1)^4\cdot 2\cdot 4$$
$$= -2+4-6+8$$
$$= 4$$

Obs: Nos fijamos que los límites de la sumatoria son "amigables", es decir, la suma no es extensa, por ende, podemos desarrollarla reemplazando los valores en k, sin necesidad de usar propiedades

c) $$\sum_{k=1}^{4} 5^k - 1 = (5^1-1)+(5^2-1)+(5^3-1)+(5^4-1)$$
$$= 4+24+124+624$$
$$= 776$$

Obs: Dentro de las propiedades estudiadas no está el exponente como variable. Además, debido a los límites, la suma es abreviada, por ende, desarrollamos la sumatoria, reemplazando los valores en k

d) $$\sum_{k=198}^{200} \boldsymbol{k} = 198 + 199 + 200$$
$$= 597$$

Obs: Si bien, los límites de la sumatoria son grandes, la suma no es extensa, ya que debemos reemplazar sólo tres valores (**198,199 y 200**). Por ende, no es necesario utilizar propiedades

En los siguientes ejercicios, notarás que se hace necesario aplicar las propiedades de las sumatorias estudiadas, ya que de lo contrario quedará una suma muy extensa.

e) $$\sum_{k=1}^{60} \boldsymbol{2k - 2k^3 + 5} = \sum_{k=1}^{60} 2k - \sum_{k=1}^{60} 2k^3 + \sum_{k=1}^{60} 5$$

1°Separamos sumatoria por prop. de adición

$$= 2\sum_{k=1}^{60} k - 2\sum_{k=1}^{60} k^3 + \sum_{k=1}^{60} 5$$

2°Se extrae la constante que multiplica la variable. Ahora multiplicará a la sumatoria

$$= 2 \cdot \frac{60 \cdot 61}{2} - 2 \cdot \left(\frac{60 \cdot 61}{2}\right)^2 + 60 \cdot 5$$

3°Aplicamos propiedad (1), (3) y (4) del formulario.

$$= 1830 - 6.697.800 + 300$$

$$= -6.695.670$$

f) $$\sum_{k=1}^{80} (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{1})(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{2}) = \sum_{k=1}^{80} j^2 - j - 2$$

1°No existe propiedad para multiplicación de factores que dependen de la variable. Por ende, desarrollamos la multiplicación

$$= \sum_{k=1}^{80} j^2 - \sum_{k=1}^{80} j - \sum_{k=1}^{80} 2$$

2° Separamos la sumatoria. Prop. adición

$$= \frac{80 \cdot 81 \cdot 161}{6} - \frac{80 \cdot 81}{2} - 80 \cdot 2$$

3° Aplicamos propiedades (2), (1) y (4) del formulario

$$= 173.880 - 3.240 - 160$$

$$= 170.480$$

g) $$\sum_{k=50}^{100} \boldsymbol{k^2 + 2k + 3}$$

$$= \sum_{k=50}^{100} k^2 + \sum_{k=50}^{100} 2k + \sum_{k=50}^{100} 3$$

1°Separamos la sumatoria. Prop. adición

$$= \left(\sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{100} 2k - \sum_{k=1}^{49} 2k\right) + (100 - 50 + 1) \cdot 3$$

2°Como el límite inferior es diferente de 1, aplicamos propiedad (6) y en la última expresión, la propiedad (5)

$$= \left(\frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6}\right) + \left(2 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} - \frac{49 \cdot 50}{2}\right) + 153$$

3°Aplicamos propiedad (2) y (1) del formulario

$$= 338.350 - 40.425 + 10.100 - 2450 + 153$$

$$= 305.728$$

$$\sum_{k=50}^{100} (\boldsymbol{k} + \mathbf{2})(\boldsymbol{k}^2 - \mathbf{2}\boldsymbol{k} + \mathbf{4})$$ h)

Obs: La multiplicación corresponde a la factorización de $k^3 + 8$. (Si no lo recuerda, puede multiplicar término a término y reducir los semejantes.

$$= \sum_{k=50}^{100} k^3 + 8$$

$$= \sum_{k=50}^{100} k^3 + \sum_{k=50}^{100} 8$$

Separamos la sumatoria por propiedad de adición

$$= \left(\sum_{k=1}^{100} k^3 - \sum_{k=1}^{49} k^3\right) + \sum_{50}^{100} 8$$

Como el límite inferior es distinto de 1, aplicamos propiedad (6) del formulario

$$= \left(\frac{100 \cdot 101}{2}\right)^2 - \left(\frac{49 \cdot 50}{2}\right)^2 + (100 - 50 + 1) \cdot 8$$

Aplicamos propiedad (3) y en la última expresión la propiedad (5)

$$= 25.502.500 - 1.500.625 + 408$$

$$= 24.002.283$$

Propiedad Telescópica

Recuerde que la fórmula de la propiedad telescópica es:

$$\sum_{k=p}^{n} \boldsymbol{a_k - a_{k+1} = a_p - a_{n+1}}$$

O bien

$$\sum_{k=p}^{n} \boldsymbol{a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_p}$$

Obs: Ocuparemos propiedad telescópica cuando haya una sustracción entre dos cantidades que estén en función de la variable, y cuando la diferencia de los términos en que se encuentra la variable es 1

i) $$\sum_{i=10}^{30} \frac{4}{7i+7} - \frac{4}{7i} = \sum_{i=10}^{30} \frac{4}{7(i+1)} - \frac{4}{7i}$$

1°Factorizamos para notar que las variables difieren en 1

$$= \frac{4}{7(30+1)} - \frac{4}{7 \cdot 10}$$

2°Como "i+1" es mayor que "i", reemplazamos el límite superior en "i+1" y el límite inferior en "i"

$$= \frac{4}{217} - \frac{4}{30}$$

j) $$\sum_{k=5}^{20} \frac{1}{k-3} - \frac{1}{k-4} = \frac{4}{20-3} - \frac{4}{5-4}$$

Notamos que "k-3" y "k-4" difieren en 1 unidad, además "k-3" es mayor que "k-4", por ende, reemplazamos el límite superior en "k-3" y el límite inferior en "k-4"

$$= \frac{1}{17} - 1$$

$$= -\frac{16}{17}$$