L. Sánchez.

RETROALIMENTACIÓN MATEMÁTICA 3° Medio Plan General

Unidad 1: Números

Nombre: ……………………………………………………………………………………………………Curso:3° ……………..

Tema 1: Ecuación Cuadrática
Contenidos
1: Concepto y clasificación (completas e incompletas)
2: Resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas
3: Resolución de ecuaciones completas por distintos métodos
3.1 Factorización
3.2 Uso de fórmula
4: Análisis de las soluciones de la ecuación de segundo grado (discriminante)

Aprendizajes Esperados:
• Reconocer una ecuación cuadrática y clasificarla como completa e incompleta.
• Resolver algebraicamente ecuaciones cuadráticas mediante varios métodos, como factorizar y aplicar la fórmula cuadrática.
• Identificar y representar casos en los cuales la ecuación cuadrática tiene dos, una o ninguna solución real.

Instrucciones: El presente material corresponde a una guía de retroalimentación que involucra lo visto en la guía n°1 Ecuación Cuadrática, con la finalidad de aclarar las dudas sobre los contenidos y ejercicios.

Para realizar este reforzamiento analizaremos cada ítem de la guía n°1, recordando los contenidos y desarrollando algunos ejemplos.

Item I.- Indica el grado de las siguientes ecuaciones.

Recordemos que el grado de una ecuación con una incógnita es el exponente mayor de la incógnita. Si el mayor exponente de la incógnita es 1, la ecuación es de Primer Grado, si el exponente es 2, la ecuación es de Segundo Grado, etc.

Por ejemplo, en la ecuación $2x^2 - 1 = 5x^3 + x + 2$, su grado es 3 (mayor exponente de la incógnita x), además es una ecuación de tercer grado.

Ejercicios

Indica el grado de las siguientes ecuaciones.

1) $6x^4 + 5x^2 = 12 - 3x$
2) $16 - 4x^2 + 2x = 0$
3) $4y + 5 = 12$

Item II.- Indica, si x=4 es solución de las siguientes ecuaciones:

Recordemos que la solución de una ecuación es el o los valores de la incógnita que al reemplazarlos en la ecuación original hacen verdadera la igualdad. Si no se cumple la igualdad, no es solución.

Por ejemplo, en la ecuación $4x + 3 = 2x + 13$, $x = 5$ es solución de la ecuación, ya que al reemplazar x por 5 en la ecuación original, se cumple la igualdad.

$$4x + 3 = 2x + 13$$
$$4 \cdot 5 + 3 = 2 \cdot 5 + 13$$
$$20 + 3 = 10 + 13$$
$$23 = 23$$

Ejercicios

Indica, si x=-2 es solución de las siguientes ecuaciones:

1) $3x - 6 = 7x + 2$
2) $X^2 + 5x = -6$
3) $4(x + 6) = 3x - 10$

Item III.- Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:

Recordemos que una ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita es aquella en la cual el mayor exponente de la incógnita es 2.

Una ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita, una vez ordenada. Se expresa en la forma siguiente:

$ax^2 + bx + c = 0 \quad con\, a, b, c \in R; a \neq 0$

En esta ecuación los coeficientes son:

a: coeficiente de x^2

b: coeficiente de x

c: término libre.

Ejemplo

$5x^2 - 3x + 11 = 0$, en esta ecuación, sus coeficientes son:

a = 5 b = -3 c= 11

Tipos de Ecuaciones de Segundo grado.

Las ecuaciones de segundo grado, se clasifican en:

- **Ecuación de segundo grado Completa**: Todos sus coeficientes son distintos de cero.

$ax^2 + bx + c = 0,\ con\ a \neq 0; b \neq 0\ y\ c \neq 0$

Ejemplo: $2x^2 + 7x - 3 = 0$

- **Ecuación de segundo grado Incompleta Pura:** En esta ecuación, el coeficiente b = 0,

$ax^2 + c = 0,\ \ b = 0$

Ejemplo: $16x^2 - 9 = 0$

Resolución: Despejamos x^2

$$16x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 16x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{16} \,/\sqrt{\ }$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4},\ x_2 = \frac{^-3}{4}\ (soluciones)$$

- **Ecuación de segundo grado Incompleta Binomial:** En esta ecuación el coeficiente c = 0

$ax^2 + bx = 0,\ c = 0$

Ejemplo: $4x^2 + 24x = 0$

Factorizamos la ecuación por x:

$4x^2 + 24x = 0 \Rightarrow x \cdot (4x + 24) = 0,$ *se obtienen* 2 *ecuaciones de primer grado*: $x = 0$ *y* $4x + 24 = 0$, *las resolvemos*

$$4x = {}^{-}24 \Rightarrow x = \frac{{}^{-}24}{4} \Rightarrow x = {}^{-}6$$

Soluciones: $x_1 = 0$; $x_2 = {}^{-}6$

Nota: En estas ecuaciones, una solución siempre es cero

Resolución de una ecuación de segundo grado Completa

$ax^2 + bx + c = 0,$ *con* $a \neq 0; b \neq 0$ *y* $c \neq 0$

Por Fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo

$x \cdot (x + 3) - 5x = 3$ *Resolvemos primero los productos indicados y luego ordenamos la ecuación.*

$x^2 + 3x - 5x - 3 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ (*Ecuación ordenada*)

$a = 1$; $b = -2$; $c = -3$ *Reemplazamos en la fórmula*

$$x = \frac{-({}^{-}2) \pm \sqrt{({}^{-}2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot {}^{-}3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \qquad x_2 = \frac{2 - 4}{2} \Rightarrow x_2 = {}^{-}1$$

Soluciones: $x_1 = 3$; $x_2 = {}^{-}1$

Resolución por Factorización.

Tomemos la misma ecuación del ejemplo anterior.

$x \cdot (x + 3) - 5x = 3$ *Resolvemos primero los productos indicados y ordenamos la ecuación*

$x^2 + 3x - 5x - 3 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ *Ecuación ordenada, factorizamos*

$(x - 3)(x + 1) = 0,$ *se obtienen* 2 *ecuaciones de primer grado, las resolvemos*

$x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ *y* $x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = {}^{-}1$

Soluciones: $x_1 = 3$; $x_2 = {}^{-}1$

Resolvamos algunos ejemplos de la guía

Ejercicio 20) Item III

$\sqrt{\sqrt{5x^2+9}-19}=2\ \ /(\ \ )^2$

$(\sqrt{\sqrt{5x^2+9}-19})^2=2^2$

$\sqrt{5x^2+9}-19=4\ \ \textit{Despejamos la raíz}$

$\sqrt{5x^2+9}=23^2\ /(\ \ )^2$

$5x^2+9=529\ \ \textit{Despejamos } x^2$

$x^2=\dfrac{520}{5}\Rightarrow x^2=104\ \Rightarrow x=\pm\sqrt{104}$

$x_1=\sqrt{104}\ ;\ x_2=-\sqrt{104}\quad \textit{Hay que comprobar si son solución}$

Nota: En algunos casos, al elevar una ecuación irracional a una potencia par esta se transforma en otra, por lo tanto es necesario comprobar si las soluciones obtenidas satisfacen la ecuación irracional original. Si no se cumple la igualdad, no es solución.

Comprobación

$x_1=\sqrt{104}$	$x_2=-\sqrt{104}$
$\sqrt{\sqrt{5x^2+9}-19}=2$	$\sqrt{\sqrt{5x^2+9}-19}=2$
$\sqrt{\sqrt{5\left(\sqrt{104}\right)^2+9}-19}=2$	$\sqrt{\sqrt{5\left(-\sqrt{104}\right)^2+9}-19}=2$
$\sqrt{\sqrt{5\cdot104+9}-19}=2$	$\sqrt{\sqrt{5\cdot104+9}-19}=2$
$\sqrt{\sqrt{529}-19}=2$	$\sqrt{\sqrt{529}-19}=2$
$\sqrt{23-19}=2$	$\sqrt{23-19}=2$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{4}=2$
$2=2$	$2=2$

Como se cumple la igualdad, $x_1=\sqrt{104}\quad y\quad x_2=-\sqrt{104}\quad \textit{son las soluciones}$

Ejercicio 13) Item III

$(x-3)^2-(2x+5)^2=-16\ \ \text{Re}\textit{solvemos los productos notables y ordenamos la ecuación}$

$x^2-6x+9-\left(4x^2+20x+25\right)+16=0$

$x^2-6x+9-4x^2-20x-25+16=0$

$^-3x^2-26x=0\ \ \textit{Ecuación incompleta binomial}$

Ejercicio

$x\cdot\left(^-3x-26\right)=0\Rightarrow x_1=0\ \ ;\ \ ^-3x-26=0\Rightarrow x_2=\dfrac{^-26}{3}$

$\textit{Soluciones}:\ x_1=0\ ;\ x_2=\dfrac{^-26}{3}$

28) Item IV

$\sqrt{x+7} = x+1 / (\ )^2$ *Se eleva cada miembro de la ecuación a* $(\ )^2$ *para eliminar la raíz cuadrada*

$\left(\sqrt{x+7}\right)^2 = (x+1)^2$

$x+7 = x^2+2x+1$ *Ordenamos la ecuación*

$x^2+x-6=0$ Re*solvemos mediante la fórmula* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a=1$; b = 1 ; c = − 6

$\mathrm{x} = \dfrac{{}^-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1 \cdot {}^-6}}{2\cdot 1} \Rightarrow x = \dfrac{{}^-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{{}^-1 \pm 5}{2}$

$x_1 = \dfrac{{}^-1+5}{2} = 2$; $x_2 = \dfrac{{}^-1-5}{2} = {}^-3$

Comprobación

$x_1 = 2$	$x_2 = -3$
$\sqrt{x+7} = x+1$	$\sqrt{x+7} = x+1$
$\sqrt{2+7} = 2+1$	$\sqrt{-3+7} = -3+1$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{4} = -2$
$3=3$ *verdadero*	$2=-2$ *falso*
$x_1 = 2$ *Es Solución*	$x_2 = -3$ *No es Solución*

DISCRIMINANTE DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

En la fórmula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que permite la resolución de cualquier ecuación de 2° grado con una incógnita, la expresión subradical $\sqrt{b^2-4ac}$ recibe el nombre de **discriminante**

La discriminante es característica de cada ecuación de 2° grado y depende de los valores de **a, b y c**, y determina a qué conjunto pertenecen las raíces o soluciones de la ecuación. Es lo que llamamos **Naturaleza de las raíces**. Entonces podemos afirmar:

- Si $b^2-4ac>0$**,** entonces $\sqrt{b^2-4ac}$ **representa un número real positivo**, lo que nos indica que las raíces o soluciones de la ecuación **sean dos números reales y distintos.**

- Si $b^2-4ac=0$**,** entonces $\sqrt{b^2-4ac}=0$, lo que nos indica que las raíces o soluciones de la ecuación **sean dos números reales e iguales.**

- Si $b^2-4a<0$**,** entonces $\sqrt{b^2-4ac}$ **representa un número no real**, lo que nos indica que la ecuación **no tiene solución en el conjunto de los números reales.**

V) Sin resolver la ecuación indica la naturaleza de sus raíces

Ejemplos

Ejercicio 3) Item V $3x^2 - 16x + 5 = 0$ (La ecuación debe de estar ordenada)

$a = 3$; $b = -16$; $c = 5$ entonces

$$b^2 - 4ac = \left({}^{-}16\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$= 256 - 60$$

$$b^2 - 4ac = 96 > 0 \Rightarrow La\ ecuación\ tiene\ 2\ raíces\ reales\ y\ distintas$$

Ejercicio

Calcula el valor que debe tomar k en la ecuación $3x^2 + 6x + 5 - k = 0$ para que:

Tenga dos soluciones reales e iguales

En esta ecuación $a = 3,\ b = 6,\ c = 5 - k$, y además para que $x_1 = x_2$ debe cumplirse que $b^2 - 4ac = 0$

Entonces reemplazando los valores $a = 3,\ b = 6,\ c = 5 - k$ en esta expresión tenemos que:

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (5 - k) = 0$$

$$36 - 60 + 12k = 0$$

$$^{-}24 + 12k = 0$$

$$k = \frac{24}{12} \Rightarrow k = 2$$

Respuesta: $k = 2$