Retroalimentación y Repaso I Parte de Raíces

Prof. M. Sepúlveda V.

Objetivos de Aprendizaje:

OA 1: Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:
- Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.
- Combinando raíces con números racionales.
- Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.

El fin de este material, es complementar lo que aprendiste en la I parte de raíces que te servirá para aplicar en la II parte. Debes tener claro que las propiedades de las raíces las seguirás ocupando más adelante, es por eso que debes reforzar si aún tienes dudas. En este compilado también repasarás contenido como los productos notables, y verás ejemplos para que lo puedas aplicar tanto en la racionalización, como en las ecuaciones irracionales.

Repaso descomposición de raíces y suma/resta de raíces

$a)\ \sqrt{24}$ $\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}$ $2\cdot\sqrt{6}$ $2\sqrt{6}$	- Para descomponer debes buscar que dos números multiplicados te den el valor que está dentro. - La condición es que uno de ellos tenga raíz cuadrada, para así extraer su raíz. - El otro valor queda expresado.	$b)\ \sqrt[3]{54}$ $\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}$ $3\cdot\sqrt[3]{2}$	- Para descomponer debes buscar que dos números multiplicados te den el valor que está dentro. - La condición es que uno de ellos tenga en este caso raíz cúbica, para así extraer su raíz. - El otro valor queda expresado.

$c)\ \sqrt{12}+\sqrt[3]{128}-\sqrt{48}+\sqrt[3]{16}$ $\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}+\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}$ $2\cdot\sqrt{3}+4\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt[3]{2}$ $2\sqrt{3}+4\sqrt[3]{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt[3]{2}$ $-2\sqrt{3}+6\sqrt[3]{2}$	- Para este tipo de ejercicios debemos descomponer las raíces una a una. - Luego, verificar cuáles son términos semejantes(es decir que la parte de la raíz sea la misma) y sumar o restar aquellos. - Recordar que solo se suma o resta con los números que están antes de la raíz, ésta queda igual. - Recordar también que raíces con **distinto índice**, **NO** se pueden sumar, queda expresado.

Repaso de algunas propiedades de Raíces

$a)\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$ $b)\ \left(\sqrt{6}\right)^2$	- Cuando multiplicas dos veces la misma raíz, su resultado es el subradical (número dentro de la raíz) - Si una raíz cuadrada está elevada a 2, eliminas la raíz con el 2, y queda solo el subradical.
$c)\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$	- Cuando multiplicas raíz cuadrada por raíz cuadrada, mantienes la raíz y multiplicas los subradicales.
$d)\ 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{15}$	- Cuando multiplicas dos raíces y una de ellas tiene un número adelante este se mantiene afuera, y solo multiplicas los subradicales
$e)\ 2\sqrt{5}\cdot3\sqrt{7}=6\sqrt{35}$	- Cuando multiplicas dos raíces, y ambas tienen un número delante de ellas, estos números se multiplican independientes de los subradicales.
$f)\ \left(2\sqrt{6}\right)^2=4\cdot6=24$	- Cuando elevas a una potencia una raíz que tiene un número adelante, se eleva el número de adelante y la raíz.
$g)\ \sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$	- Cuando tienes una expresión en raíz, puedes cambiar el registro y expresarla como una potencia

Algunos productos notables que ocuparás

Suma por diferencia $(a+b)(a-b)$ $a^2+a\cdot b-a\cdot b-b^2$ a^2-b^2	- Su resolución llevará a que los dos términos del centro se cancelan por ser de distinto signo, por lo tanto quedará "el 1er término al cuadrado menos el 2do término al cuadrado" - Este tipo de producto notable, lo usarás en la **racionalización binomia.**
Cuadrado de binomio $(a+b)^2$ $(a+b)(a+b)$ $a^2+a\cdot b+a\cdot b+b^2$ * $a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2$ $(a-b)(a-b)$ $a^2-a\cdot b-a\cdot b+b^2$ ** $a^2-2ab+b^2$	- * Su resolución quedará "el 1er término al cuadrado, más dos veces el primero por el segundo, más el 2do término al cuadrado" - ** Su resolución quedará "el 1er término al cuadrado, menos dos veces el primero por el segundo, más el 2do término al cuadrado" - Este tipo de producto notable lo ocuparás en las **ecuaciones irracionales**

Algunos ejemplos del uso de productos notables…

$a)$ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3a}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3a}\right)$ $\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3a}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3a}+\left(\sqrt{3a}\right)^2$ $2-\sqrt{6a}+\sqrt{6a}-3a$ $2-3a$	- En este ejercicio debes aplicar las propiedades de raíces, éstas seguirás ocupándolas en la II Parte de raíces por eso debes reforzarlas. - Puedes seguir la regla "el 1er término al cuadrado menos el 2do término al cuadrado"
$b)$ $(x+2)^2$ $x^2+2x+2x+2^2$ x^2+4x+4	- Debes notar que el segundo paso, podrás omitirlo si aplicas la regla "el 1er término al cuadrado, más dos veces el primero por el segundo, más el 2do término al cuadrado"
$c)$ $(2a-3)^2$ $(2a-3)(2a-3)$ $(2a)^2-2a\cdot 3-2a\cdot 3+3^2$ $4a^2-6a-6a+9$ $4a^2-12a+9$	- Puedes seguir la regla "el 1er término al cuadrado, menos dos veces el primero por el segundo, más el 2do término al cuadrado"

Algunos ejercicios de la guía resueltos

Sección II: Raíces y Descomposición de raíces. **Ítem 2**

$e)\ \sqrt[3]{\left(\frac{7}{8}-1\right)^2} : \left(1+\frac{3}{4}\right)^{-2}$

$\sqrt[3]{\left(\frac{7-8}{8}\right)^2} : \left(\frac{4+3}{4}\right)^{-2}$

$\sqrt[3]{\left(\frac{-1}{8}\right)^2} : \left(\frac{7}{4}\right)^{-2}$ *

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{64}\right)} : \left(\frac{4}{7}\right)^2$

$\cancel{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}} : \left(\frac{16}{49}\right)$

$\frac{1}{4}\,\square\,\frac{49}{16}$

$\frac{49}{64}$

* Recuerda que cuando tienes una fracción elevada a un número negativo, la fracción se invierte y el exponente ahora es positivo.

$f)\ \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-1\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{2}} - \sqrt{\frac{10}{9}-1}$

$\frac{\sqrt{\frac{2+3-4}{4}\cdot\left(\frac{10}{1}\right)^{1}}}{\frac{10\cancel{0}}{1\cancel{0}}} - \sqrt{\frac{10-9}{9}}$

$\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 10}}{10} - \sqrt{\frac{1}{9}}$

$\frac{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{10}}{10} - \frac{1}{3}$

$\frac{\cancel{5}}{\cancel{10}} - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$\frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$ *

* Error en el resultado de la guía, lo correcto es $\frac{1}{6}$

Sección III: Propiedades de raíces **Ítem 1**

$e)\ 8\cdot\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}}$

$\cancel{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{3} - \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}$

$4\cdot\sqrt{3} - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{3} + 4\cdot 3\cdot\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$4\sqrt{3} - \sqrt{3} + 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 24\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}$

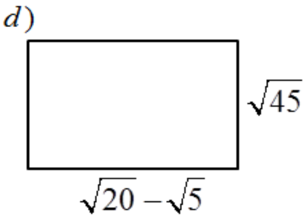
$\frac{29\sqrt{3}}{2}$ *o* $\frac{29}{2}\sqrt{3}$

Debes considerar siempre en un ejercicio:

- Si hay raíz exacta, extraer raíz ej: $\sqrt{4} = 2$
- Si no es exacta y la puedes descomponer, hazlo ej: $\sqrt{27} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
- Recuerda que la raíz de una fracción, puede separar el numerador y el denominador ej: $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Siempre fijarte si puedes simplificar, así obtendrás números más pequeños ej: $8\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- Si hay suma(o resta) de números enteros con fracciones, sacar M.C.M. (mínimo común múltiplo). Recuerda que solo puedes sumar o restar si tienen la raíz en común, es decir si el número que aparece dentro de la raíz es el mismo, en este caso era la raíz de 3.
- Recuerda también que el signo de multiplicación, se omite, es decir: $4\cdot\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$f)\ \sqrt{\frac{2}{5}}-4\cdot\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{8}{45}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-4\cdot\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{125}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{45}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-4\cdot\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{5}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-4\cdot\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-4\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-\frac{12}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left(1-\frac{12}{5}+\frac{2}{9}\right)$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left(\frac{45-108+10}{45}\right)$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left(\frac{-53}{45}\right)\ o\ \frac{-53}{45}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ o\ \sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{-53}{45}$	- La expresión $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ es algo que tienen en común los tres términos, por lo tanto factorizas para solo dejar el valor que llevan antes de la raíz, en este caso si no aparece ninguno es 1, ya que ej: $\sqrt{\frac{2}{5}}=1\sqrt{\frac{2}{5}}$

Ítem 5: En este ítem, debes recordar que el perímetro de una figura es "la suma de todo su contorno", para ello debes descomponer cada expresión y luego sumar, con las restricciones que ya sabes:

$d)$  	Descomponer: $\sqrt{20}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ $\sqrt{45}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ Dos lados miden $\sqrt{45}$, por lo tanto $2\cdot 3\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ Dos lados miden $\sqrt{20}-\sqrt{5}$, es decir cada lado mide $2\sqrt{5}-\sqrt{5}=1\sqrt{5}\ o\ \sqrt{5}$, luego los dos lados equivalen a $2\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ Perímetro total: $6\sqrt{5}+2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

Ítem 6:

$c)\ \left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2$ $\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2$ $4\cdot 3-4\cdot\sqrt{15}+5$ $12+5-4\sqrt{15}$ $17-4\sqrt{15}$	En este tipo de ejercicio debes considerar: - Es un cuadrado de binomio con raíces, para esto debes recordar la regla "el 1er término al cuadrado, más (o menos) el 1er término por el 2do término más el 2do término al cuadrado. - Cuando elevas un término que tiene raíz cuadrada y esta elevada a 2, se elimina la raíz, pero debes elevar el número de afuera ej: $\left(2\sqrt{3}\right)^2=\left(2\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=4\cdot 3=12$ - Cuando tienes una raíz multiplicada con otra raíz, mantienes la raíz y multiplicas con términos de adentro (llamados subradicales) ej: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$

Ítem 7:

$a)\ 5\sqrt[12]{a^{30}}+3\sqrt[14]{a^{35}}+9\sqrt[10]{a^{25}}-7\sqrt[18]{a^{45}}$ $5\cdot a^{\frac{30}{12}}+3\cdot a^{\frac{35}{14}}+9\cdot a^{\frac{25}{10}}-7\cdot a^{\frac{45}{18}}$ $5\cdot a^{\frac{5}{2}}+3\cdot a^{\frac{5}{2}}+9\cdot a^{\frac{5}{2}}-7\cdot a^{\frac{5}{2}}$ $(5+3+9-7)\cdot a^{\frac{5}{2}}$ $10a^{\frac{5}{2}}=10\sqrt{a^5}$	- Todas las raíces, tienen distinto índice por lo tanto de esa forma no puedo sumar ni restar - Debes recordar que una raíz, puedo expresarla en potencia, y al hacerlo puedes simplificar cada exponente. Al hacerlo quedan todos iguales, por lo tanto puedes sumar(o restar) manteniendo el término de raíz.
$f)\ \sqrt[5]{a^2}:\sqrt[15]{a^4}$ $\sqrt[5\cdot 3]{a^{2\cdot 3}}:\sqrt[15]{a^4}$ $\sqrt[15]{a^6}:\sqrt[15]{a^4}$ $\sqrt[15]{\frac{a^6}{a^4}}$ $\sqrt[15]{a^{6-4}}$ $\sqrt[15]{a^2}$	- Para una multiplicación o división de índice distinto debes hallar el m.c.m de los índices y amplificar de acuerdo a él. En este caso el índice es 5 y 15, su m.c.m. es 15, por lo tanto la 1ª expresión debes amplificarla en 3, tanto el índice como el denominador y la otra expresión queda igual ya que el índice es 15. - Una vez que ya tengas los índices iguales y al hacer una división de potencias, "mantienes la base y restas los exponentes"

Ítem 8:

$e)\ \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ $\sqrt{\left(7+2\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}$ $\sqrt{\left(7+2\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5}^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2\right)}$ $\sqrt{\left(7+2\sqrt{10}\right)\left(5-2\sqrt{10}+2\right)}$ $\sqrt{\left(7+2\sqrt{10}\right)\left(7-2\sqrt{10}\right)}$ $\sqrt{49-4\sqrt{10}^2}$ $\sqrt{49-40}=\sqrt{9}=3$	realizar la propiedad "introducir un coeficiente a la raíz", tienes que: - El término que está afuera, introducirlo en la raíz y elevarlo al índice, en este caso 2 - Me queda una expresión como cuadrado de binomio, por lo tanto lo resuelvo con la regla "el 1ro al cuadrado, más(o menos) , 2 por el 1er término por el 2do término, más el 2do término al cuadrado - Llegarás a una multiplicación de dos términos llamada, "suma por diferencia" o "diferencia de cuadrados"

- Próximo Contenido: Raíces II Parte

- Racionalización Monomia
- Racionalización Binomia
- Ecuaciones Exponenciales de = base
- Ecuaciones Irracionales