L. Sánchez.

GUIA COMPLEMENTARIA DE MATEMÁTICA
3° Medio Plan General
Unidad 1: Números

Nombre:…………………………………………………………………………………………………Curso:3° …………….

Instrucciones: El presente material corresponde a la explicación de los puntos 3.1 y 4 de los contenidos del TEMA: Ecuación Cuadrática de la guía anterior, con lo cual puedes desarrollar completa la guía.

Objetivos:
- Reconocer una ecuación cuadrática y clasificarla como completa e incompleta.
- Resuelver algebraicamente ecuaciones cuadráticas mediante varios métodos, como factorizar y aplicar la fórmula cuadrática.
- Identificar y representar casos en los cuales la ecuación cuadrática tiene dos, una o ninguna solución real.

Tema 1: Ecuación Cuadrática
1. Concepto y clasificación (completas e incompletas)
2. Resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas
3. Resolución de ecuaciones completas por distintos métodos

3.1 Factorización

3.2 Uso de fórmula

4. Análisis de las soluciones de la ecuación de segundo grado (discriminante)

DISCRIMINANTE DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA (Punto 4)

En la fórmula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que permite la resolución de cualquier ecuación de 2° grado con una incógnita, la expresión subradical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ recibe el nombre de **discriminante**

La discriminante es característica de cada ecuación de 2° grado y depende de los valores de **a, b y c**, y determina a qué conjunto pertenecen las raíces o soluciones de la ecuación. Es lo que llamamos **Naturaleza de las raíces**. Entonces podemos afirmar:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ **representa un número real positivo**, lo que nos indica que las raíces o soluciones de la ecuación **sean dos números reales y distintos.**

Ejemplo

$x^2 - 8x + 12 = 0$ (La ecuación debe de estar ordenada)

En esta ecuación $a = 1,\ b = {}^{-}8,\ c = 12$, entonces $b^2 - 4ac = \left({}^{-}8\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12$

$$b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16$$

Luego $b^2 - 4ac > 0$

Por lo tanto, **esta ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.**

- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, lo que nos indica que las raíces o soluciones de la ecuación **sean dos números reales e iguales.**

Ejemplo

$x^2 + 6x + 9 = 0$ (La ecuación debe de estar ordenada)

En esta ecuación $a = 1,\ b = 6,\ c = 9$, entonces $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$

$$b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$$

Luego $b^2 - 4ac = 0$

Por lo tanto, **esta ecuación tiene dos soluciones reales e iguales.**

- Si $b^2 - 4a < 0$**,** entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ **representa un número no real**, lo que nos indica la ecuación **no tiene solución en el conjunto de los números reales.**

Ejemplo

$x^2 + 2x + 6 = 0$ (La ecuación debe de estar ordenada)

En esta ecuación $a = 1, \; b = 2, \; c = 6$**,** entonces $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$

$$b^2 - 4ac = \; 4 - 24 = {}^{-}20$$

Luego $b^2 - 4ac < 0$

Por lo tanto, **esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales,** ya que $\sqrt{{}^{-}20} \notin IR$

Ejercicio de aplicación

Calcula el valor que debe tomar k en la ecuación $3x^2 + 4x + 5 - k = 0$ para que:

Tenga dos soluciones reales y distintas

En esta ecuación $a = 3, \; b = 4, \; c = 5 - k$ **,** y además para que $x_1 \neq x_2$ debe cumplirse que $b^2 - 4ac > 0$

Entonces reemplazando los valores $a = 3, \; b = 4, \; c = 5 - k$ en esta expresión tenemos que:

$$b^2 - 4ac = \; 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (5 - k) > 0$$

$$16 - 60 + 12k > 0$$

$$^{-}44 + 12k > 0$$

$$k > \frac{44}{12} \Rightarrow k > \frac{11}{3}$$ **Respuesta:** $k > \frac{11}{3}$

Resolución de ecuaciones completas por factorización (Punto 3.1)

En este caso explicaremos con algunos ejemplos.

Ejemplo 1

$x^2 + 8x + 15 = 0$

Factorizamos: $(x + 3)(x + 5) = 0$

Luego obtenemos dos ecuaciones de primer grado.

$x + 3 = 0$ $\quad y \quad$ $x + 5 = 0$

Las resolvemos

$x + 3 = 0$	$x + 5 = 0$
$x = {}^{-}3$	$x = {}^{-}5$

Luego las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1 = {}^{-}3 \quad y \quad x_2 = {}^{-}5$

Ejemplo 2

$x^2 - 3x - 10 = 0$

Factorizamos: $(x+2)(x-5)=0$

Luego obtenemos dos ecuaciones de primer grado.

$x+2=0 \quad y \quad x-5=0$

Las resolvemos

$x+2=0 \qquad x-5=0$

$x={}^{-}2 \qquad x=5$

Luego las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1={}^{-}3 \quad y \quad x_2=5$

Ejemplo 3

$2x^2+3x-5=0$

Factorizamos: $2x^2+3x-5=0/\cdot 2$

$4x^2+3\cdot 2x-10=0$

$(2x-2)(2x+5)=0$

Luego obtenemos dos ecuaciones de primer grado.

$2x-2=0 \quad y \quad 2x+5=0$

Las resolvemos

$2x-2=0 \qquad x+5=0$

$x=1 \qquad x=\frac{{}^{-}5}{2}$

Luego las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1=1 \quad y \quad x_2=\frac{{}^{-}5}{2}$

<u>Resolución de algunos ejercicios de la guía (ayuda)</u>

<u>Ejercicio 14 ítem IV</u>

$6(x+1)-(4-x)(x+1)=6(4-x)$ Resolvemos las multiplicaciones.

$$6x+6-(4x+4-x^2-x)=24-6x$$
$$6x+6-4x-4+x^2+x=24-6x$$
$$3x+2+x^2-24+6x=0$$
$$x^2+9x-22=0 \ \text{Re}\,solvemos\ \ por\ \ fatorización$$
$$(x+11)(x-2)=0$$
$$x+11=0 \qquad x-2=0$$
$$x_1={}^{-}11 \qquad x_2=2 \quad S:\{{}^{-}11\,,\,2\}$$

Ejercicio 34 item IV

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}-2\sqrt{x}=0$$
$$\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}\ /\ (\ \ )^2$$
$$\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2$$
$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2+2\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+1}+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=2^2\cdot x$$
$$x-3+2\sqrt{2x^2+x-6x-3}+2x+1=4x$$
$$2\sqrt{2x^2-5x-3}=4x-3x+2$$
$$2\sqrt{2x^2-5x-3}=x+2\ /\ (\ \ )^2$$
$$\left(2\sqrt{2x^2-5x-3}\right)^2=(x+2)^2$$
$$2^2\left(2x^2-5x-3\right)=x^2+4x+4$$
$$8x^2-20x-12-x^2-4x-4=0$$
$$7x^2-24x-16=0\ \textit{La resolvemos por la fórmula}\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\textit{donde}\ a=7,\ b=-24,\ c=-16$$
$$x=\frac{-\left({}^{-}24\right)\pm\sqrt{\left({}^{-}24\right)^2-4\cdot7\cdot{}^{-}16}}{2\cdot7}=\frac{24\pm\sqrt{576+448}}{14}$$
$$x=\frac{24\pm\sqrt{1024}}{14}=\frac{24\pm32}{14}$$
$$x_1=\frac{24+32}{14}=\frac{56}{14}=4\qquad y\qquad x_2=\frac{24-32}{14}=\frac{-8}{14}$$
$$S:\{4\}$$

Nota: $x_2=\frac{{}^{-}8}{14}$ **No es solución ya que al reemplazar este valor en la ecuación original se obtienen raíces con cantidad subradical número negativo.**