Texto del estudiante

MATEMÁTICA

2° MEDIO

Ana José Chacón Aguirre • Guillermo García Castillo
Pedro Rupin Gutiérrez • Javiera Setz Mena • Marcia Villena Ramírez

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

sm

Texto del estudiante

MATEMÁTICA

2°
MEDIO

Ana José Chacón Aguirre
Licenciada en Educación de Matemática
y Computación
Profesora de Estado de Matemática y Computación
Universidad de Santiago de Chile

Guillermo García Castillo
Licenciado en Educación de Física y Matemática
Profesor de Estado de Física y Matemática
Universidad de Santiago de Chile

Pedro Rupin Gutiérrez
Licenciado en Matemática, Profesor de Matemática,
Pontificia Universidad Católica de Chile

Javiera Setz Mena
Licenciada en Matemática,
Profesora de Matemática,
Pontificia Universidad Católica de Chile

Marcia Villena Ramírez
Licenciada en Educación, Profesora de Matemática
Magíster en Educación con mención
Dificultades del Aprendizaje
Pontificia Universidad Católica de Chile

El Texto del Estudiante de Matemática 2.º medio es una creación de Ediciones SM, Chile.

Dirección editorial
Arlette Sandoval Espinoza

Coordinación editorial
María José Martínez Cornejo

Coordinación Matemática
Carla Frigerio Cortés

Edición
Javiera Setz Mena

Ayudantía de edición
Rodolfo Godoy Sinn

Autoría
Ana José Chacón Aguirre
Guillermo García Castillo
Pedro Rupin Gutiérrez
Javiera Setz Mena
Marcia Villena Ramírez

Asesoría pedagógica
Guadalupe Álvarez Pereira

Corrección de estilo y prueba
Víctor Navas Flores

Desarrollo de solucionario
Tomás Bralic Muñoz
Sergio Muñoz Venegas
Cristian Rosas Gómez

Coordinación de Diseño
Gabriela de la Fuente Garfias

Diseño y diagramación
Karina Riquelme Riquelme

Iconografía
Vinka Guzmán Tacla

Diseño de portada
Estudio SM

Ilustración de portada
Estevan Silveira

Ilustración
Julio Bastral Delgado
Luis Santelices Catalán

Fotografías
Archivos fotográficos SM
Shutterstock
Wikimedia Commons

Gestión de derechos
Loreto Ríos Melo

Jefatura de producción
Andrea Carrasco Zavala

Este texto corresponde al Segundo año de Educación Media y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 614/2013, del Ministerio de Educación de Chile.

ISBN: 978-956-363-295-8 / Depósito legal: 280416

Se terminó de imprimir esta edición de 209.271 ejemplares en el mes de octubre del año 2019.

Impreso por A Impresores

PRESENTACIÓN

La matemática es una herramienta fundamental para explicar la mayoría de los avances de nuestra sociedad: es dinámica y creativa, utiliza un lenguaje universal y ha sido desarrollada como medio para aprender a pensar y para resolver problemas. El Texto que tienes en tus manos es un material pensado en ti, y su finalidad es que, a partir de actividades, desarrolles habilidades, manejes procedimientos y adquieras conocimientos y actitudes.

¿QUÉ VOY A APRENDER?

A descubrir la utilidad de la matemática en diversas situaciones, desarrollando mis habilidades de argumentación y comunicación de ideas, conclusiones y fundamentos; de representación de conceptos en distintas modalidades; de selección y aplicación de modelos y de resolución de problemas.

¿CÓMO VOY A APRENDER?

A partir de actividades desarrolladas, las que me desafiarán en diversos contextos y temas. Cada una de las actividades y secciones propuestas son instancias de aprendizaje que harán cuestionarme, reflexionar y buscar respuestas creativas para llegar a la o las soluciones posibles. Aprender es un proceso natural que requiere de trabajos colaborativos que me permitirán debatir ideas, cuestionar procedimientos y llegar a acuerdos y conclusiones grupales.

¿PARA QUÉ VOY A APRENDER?

Para confiar en mi propio razonamiento y para que sea capaz de aplicar los conceptos, los procedimientos y las habilidades propios de la matemática a la resolución de problemas reales en diferentes contextos.

ÍNDICE

1 NÚMEROS 12 - 15

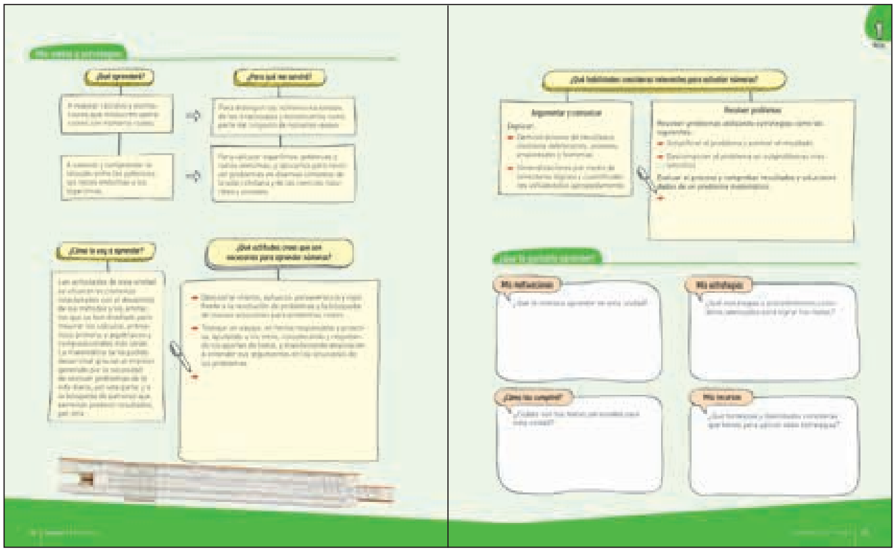
ÍNDICE

Unidad 4 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 246 - 249

A continuación te presentamos el detalle de los tipos de página y las secciones que encontrarás en cada unidad del texto:

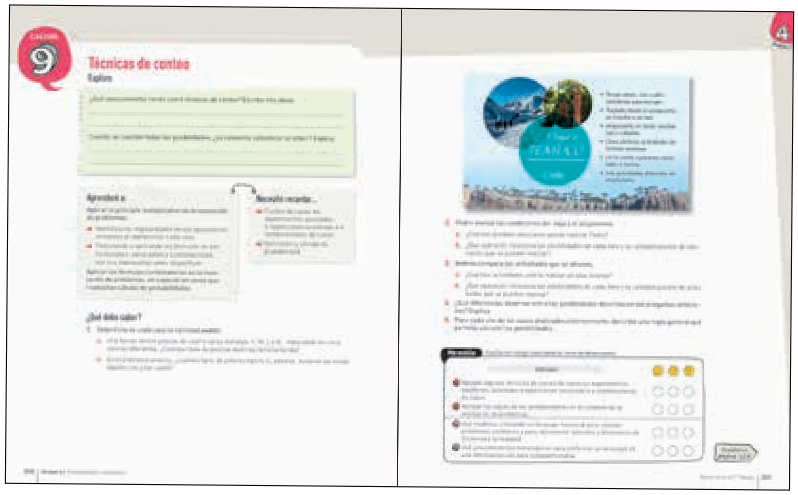
INICIO DE LA UNIDAD

Cada unidad se articula en torno a un hilo conductor, el que te permitirá comprender cómo la matemática está presente en la vida cotidiana. Encontrarás preguntas para activar tus aprendizajes previos.



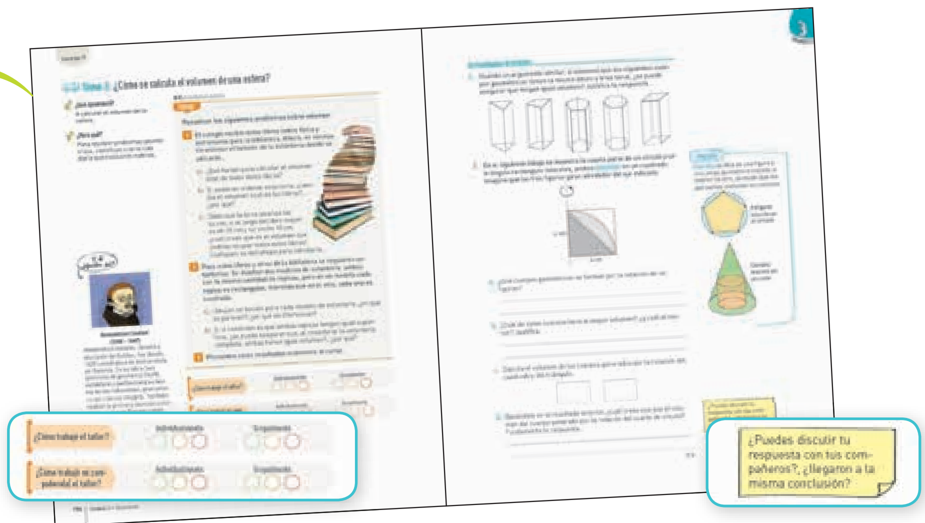
Tendrás espacios para que te propongas metas y estrategias, y seas el protagonista de tu aprendizaje a lo largo del texto.

DESARROLLO DE LA UNIDAD



LECCIÓN:

podrás conocer los objetivos de aprendizaje y sus prerrequisitos, junto con resolver la evaluación inicial.



TEMA:

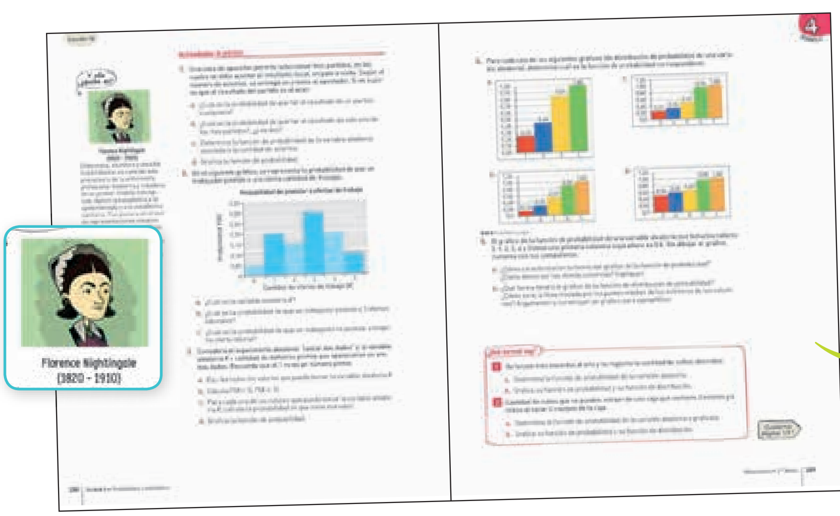
Podrás desarrollar un taller que contiene actividades en las que pondrás en juego tu creatividad y razonamiento matemático.

Al terminar cada taller, podrás evaluar tu desempeño y el de tus compañeros en el proceso.

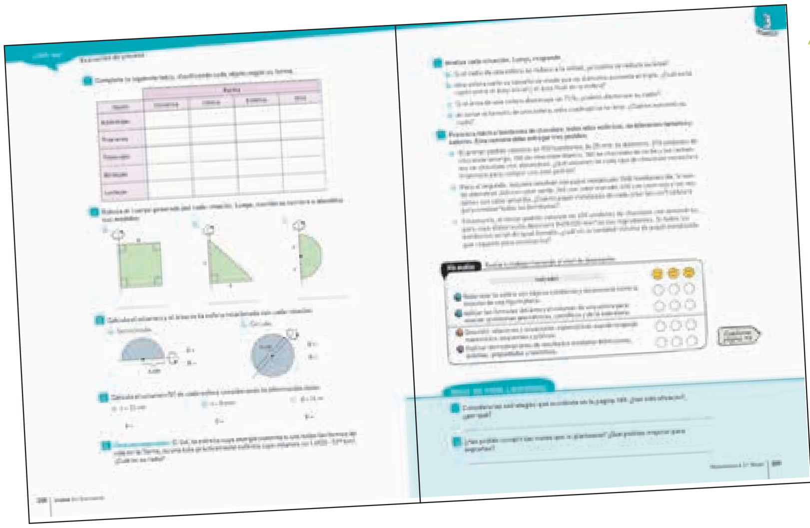
Encontrarás preguntas para justificar, cuestionar y fundamentar tus ideas.

ACTIVIDADES:

Aprenderás diversas estrategias para resolver problemas en variados contextos.



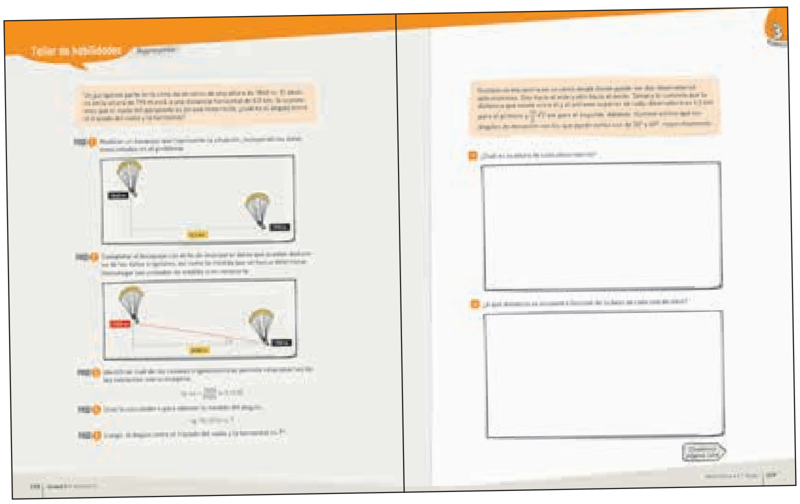
Conocerás personajes destacados de la historia de la matemática.



¿CÓMO VOY?

Es una instancia de evaluación en la cual podrás aplicar todo lo aprendido en la lección.

Podrás evaluar tu nivel de desempeño en cada uno de los aprendizajes trabajados.

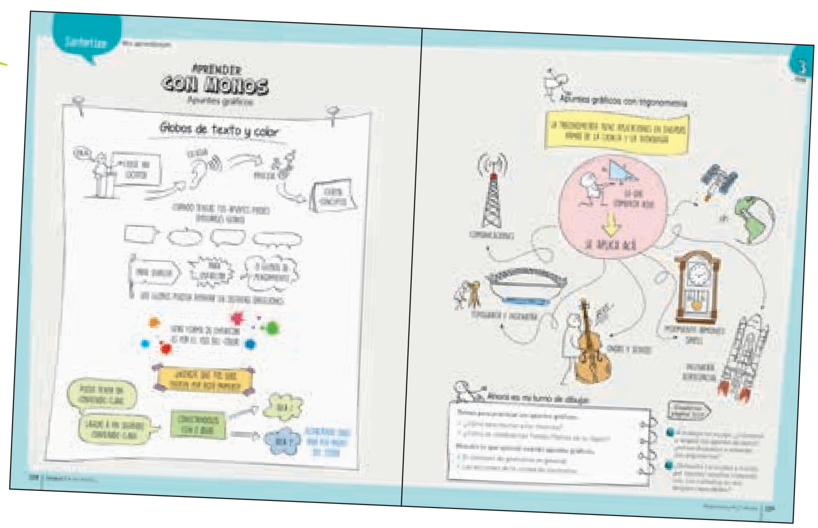


TALLER DE HABILIDADES

Podrás trabajar las habilidades de resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar.

SINTETIZO MIS APRENDIZAJES

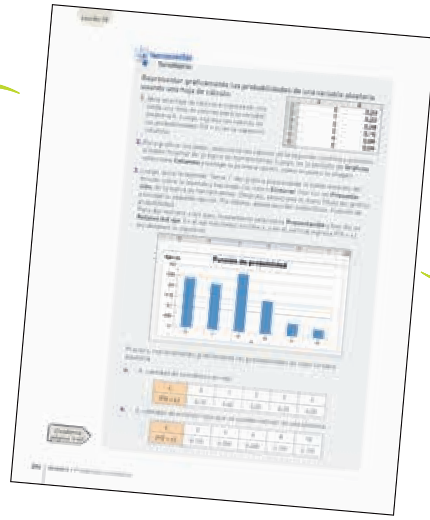
Aprenderás a utilizar los apuntes gráficos como herramienta para realizar una síntesis de tu aprendizaje.
Podrás ver ejemplos de cómo se pueden aplicar para presentar los temas de la matemática.



CUADERNO DE EJERCICIOS

Cuaderno página 12

Este ícono indica que existen actividades en el cuaderno de ejercicios que complementan las de esta sección.

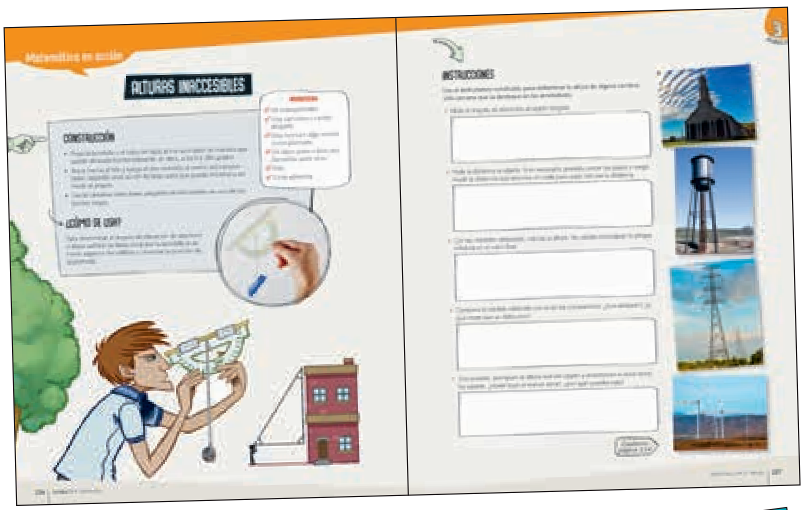


HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Aprenderás a utilizar la calculadora científica y planillas de cálculo.

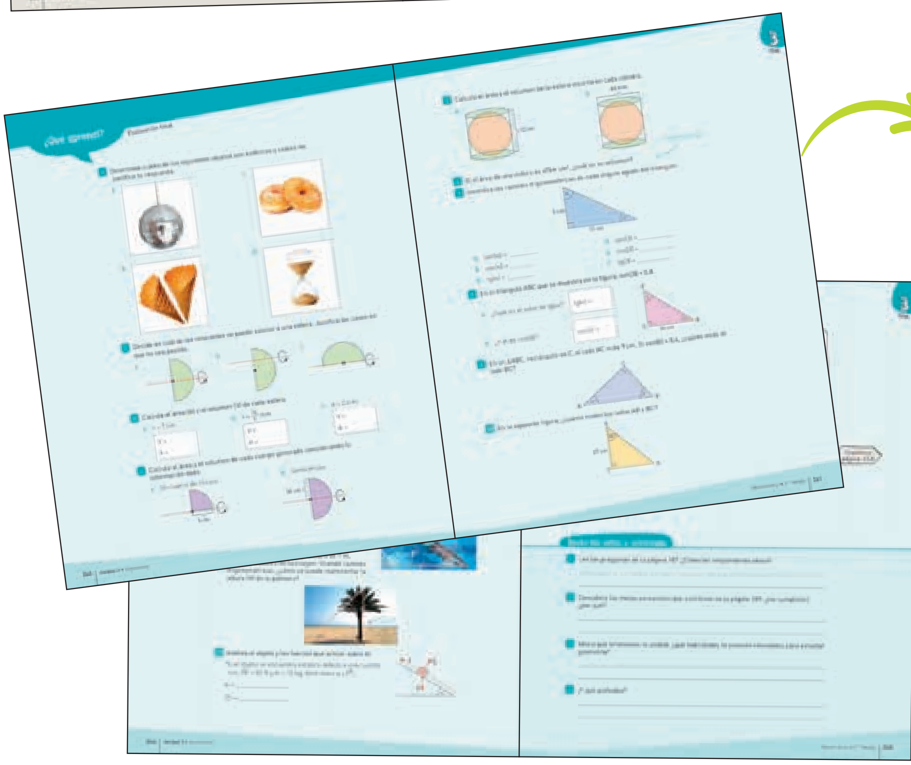
Usa calculadora
Para explorar

En las actividades exploratorias y de descubrimiento puedes usar las herramientas tecnológicas.



MATEMÁTICA EN ACCIÓN

Podrás aplicar todo lo aprendido en la unidad en un contexto real y aplicado en tu propio entorno.



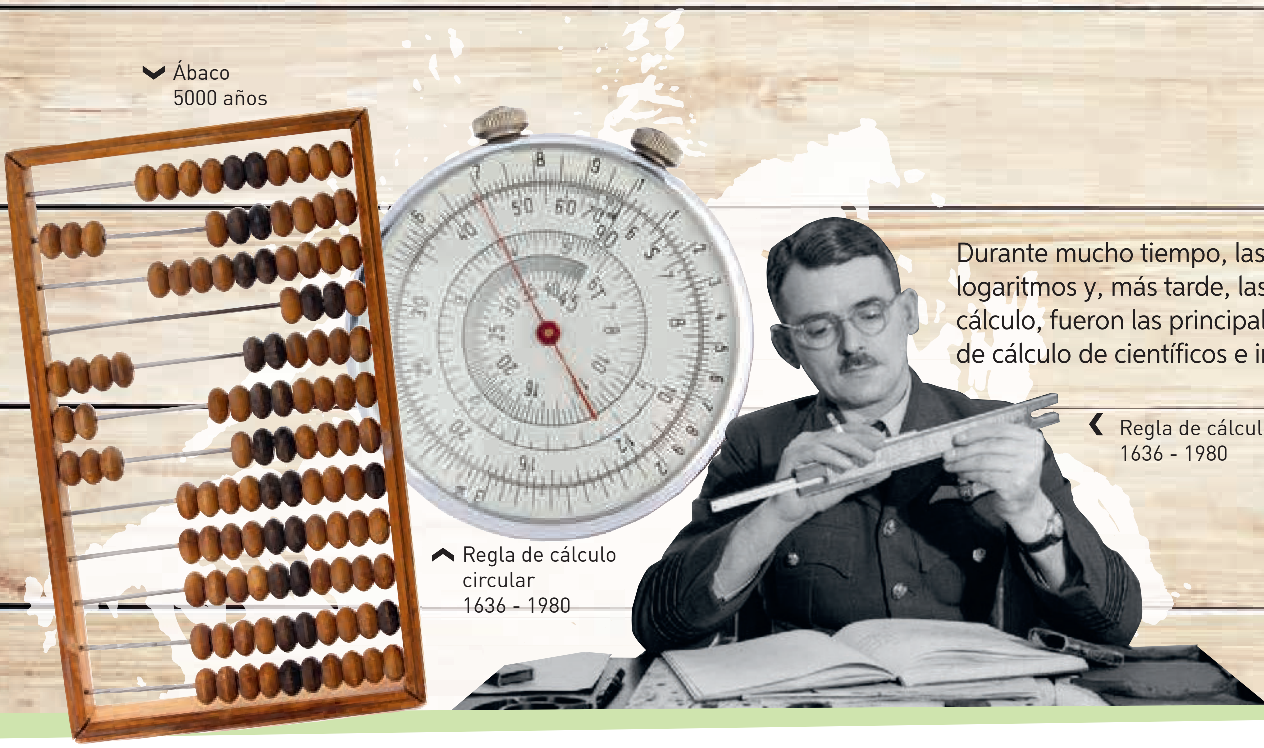
¿QUÉ APRENDÍ?

Es una instancia de evaluación en la cual podrás aplicar todo lo aprendido en la unidad.

UNIDAD 1

NÚMEROS

Actualmente, el uso de las calculadoras está integrado a la vida cotidiana y nos permite resolver diversas operaciones en muy poco tiempo. Pero esto no siempre fue así...



Ábaco
5000 años

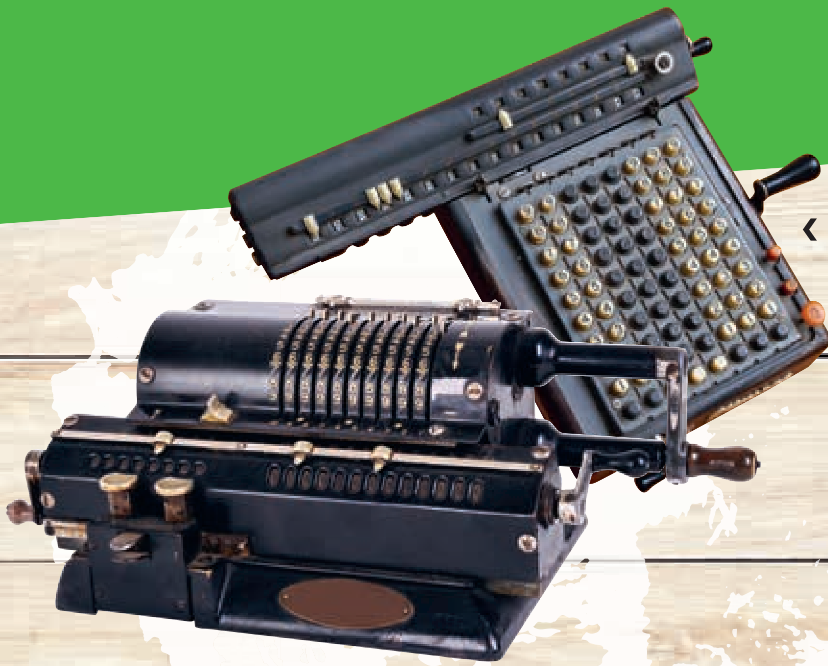
Regla de cálculo
circular
1636 - 1980

Durante mucho tiempo, las tablas de logaritmos y, más tarde, las reglas de cálculo, fueron las principales herramientas de cálculo de científicos e ingenieros.

Regla de cálculo
1636 - 1980

¿Qué sabes de los números irracionales?, ¿qué números irracionales conoces? Da tres ejemplos.

¿Qué sabes de los logaritmos?, ¿con qué se relacionan? Coméntalo con un compañero o compañera.



Calculadoras mecánicas 1900 - 1960

Mientras tanto, las máquinas de calcular mecánicas permitían realizar operaciones básicas y se usaban en la contabilidad y el comercio.

Con la llegada de las calculadoras electrónicas portátiles, las tablas de logaritmos y reglas de cálculo dejaron de usarse.

Calculadoras electrónicas 1960 - 1980

¿Conoces alguna escala logarítmica?, ¿en qué ámbitos se puede aplicar?

Activo mis ideas

1. ¿Para qué se utilizan los instrumentos de la imagen?, ¿cómo crees que se maneja cada uno?
2. ¿Qué operaciones se pueden realizar con ellos?, ¿qué tipo de números crees que se pueden operar?, ¿por qué?

Mis metas y estrategias

¿Qué aprenderé?

A realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales.

A conocer y comprender la relación entre las potencias, las raíces enésimas y los logaritmos.

¿Para qué me servirá?

Para distinguir los números racionales de los irracionales y reconocerlos como parte del conjunto de números reales.

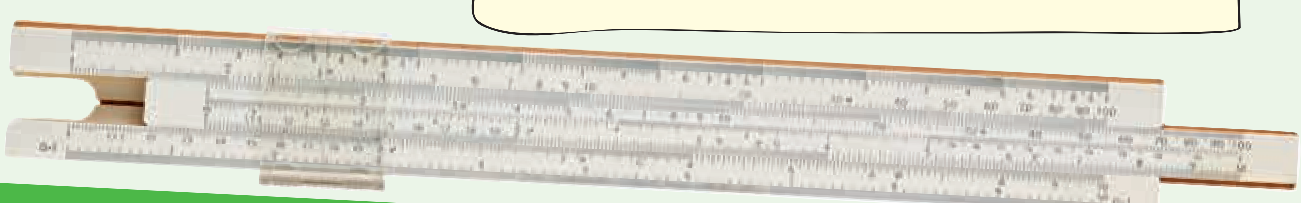
Para calcular logaritmos, potencias y raíces enésimas, y aplicarlos para resolver problemas en diversos contextos de la vida cotidiana y de las ciencias naturales y sociales.

¿Cómo lo voy a aprender?

Las actividades de esta unidad se situarán en contextos relacionados con el desarrollo de los métodos y los artefactos que se han diseñado para mejorar los cálculos, aritméticos primero, y algebraicos y computacionales más tarde. La matemática se ha podido desarrollar gracias al impulso generado por la necesidad de resolver problemas de la vida diaria, por una parte, y a la búsqueda de patrones que permitan predecir resultados, por otra.

¿Qué actitudes crees que son necesarias para aprender números?

- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.
- Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.
-



¿Qué habilidades consideras relevantes para estudiar números?

Argumentar y comunicar

Explicar:

- Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.
- Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente.

Resolver problemas

Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:

- Simplificar el problema y estimar el resultado.
- Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático.

-

¿Qué te gustaría aprender?

Mis motivaciones

¿Qué te interesa aprender en esta unidad?

Mis estrategias

¿Qué estrategias o procedimientos consideras adecuados para lograr tus metas?

¿Cómo las cumpliré?

¿Cuáles son tus metas personales para esta unidad?

Mis recursos

¿Qué fortalezas y debilidades consideras que tienes para aplicar tales estrategias?

Lección 1

Números reales

Exploro

¿Qué conocimientos tienes sobre los números reales?

¿Por qué crees que se llaman números reales?

Aprenderé a:

Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:

- utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces;
- combinando raíces con números racionales;
- resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.

Necesito recordar...

- Representación y aproximación de los números racionales.
- Operaciones con números racionales.
- Operaciones con potencias y sus propiedades.
- Teorema de Pitágoras.

¿Qué debo saber?

1. Representa los siguientes números decimales como una fracción.

   a. $3{,}2\overline{5}$

   b. $8{,}333$

   c. $6{,}4$

   d. $9{,}\overline{9}$

2. Representa cada número racional como decimal.

   a. $\frac{13}{99}$

   b. $\frac{21}{63}$

   c. $\frac{6}{5}$

   d. $\frac{45}{2}$

3. Calcula el valor de cada expresión.

   a. $2^{-3} + 2^0 - 2^2$

   b. $(-5)^{-3} - 5^3$

   c. $\dfrac{2^{2^2}}{2(2^2)^2}$

   d. $\dfrac{3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^{-2}}{3^{-3} \cdot 3^0 \cdot 3^2}$

   e. $\dfrac{5^3 \cdot 5^2}{5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^{-1}}$

   f. $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-4} + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$

4. Resuelve las siguientes operaciones con números racionales.

a. $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}:\frac{1}{5}-\frac{5}{12}=$

b. $-\frac{2}{3}+2{,}4\cdot 3{,}\overline{8}-\frac{5}{6}=$

c. $(0{,}21\overline{5}-2{,}\overline{46})\cdot\left(\frac{3}{7}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)=$

d. $\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\right):\left(\frac{44}{6}+\frac{9}{2}\right)=$

5. Determina si es verdadero o falso.

a. ________ Si la base de la potencia es negativa, el valor de la potencia siempre será negativo.

b. ________ Todas las fracciones pueden escribirse como un número decimal.

c. ________ Todos los números decimales pueden escribirse como una fracción.

6. Una piscina tiene agua hasta los $\frac{3}{8}$ de su capacidad y si se le agregan 3200 litros de agua, se llenaría. ¿Cuál es la capacidad máxima de la piscina?

7. En un triángulo rectángulo los catetos miden 24 cm y 32 cm. ¿Cuál es la medida de la hipotenusa?

8. Si en un estante hay 5 cajones, en cada cajón se guardan 5 dispensadores, cada dispensador almacena 5 frascos y cada frasco contiene 5 analgésicos, ¿cuántos analgésicos hay en total?

9. **Ciencias naturales.** Una población de bacterias se duplica cada 30 minutos. Si luego de 3 horas hay 24 064 bacterias, ¿cuántas había inicialmente?

10. Si la arista de un cubo mide $\frac{3}{4}$ m, ¿cuál es su volumen?

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Representé números racionales.	○	○	○
Calculé operaciones con números racionales.	○	○	○
Apliqué las operaciones con potencias de base racional y exponente entero a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana.	○	○	○
Apliqué el teorema de Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana.	○	○	○
Describí relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.	○	○	○
Demostré interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas.	○	○	○

Cuaderno página 5

Tema 1: ¿Existen números que no sean racionales?

¿Qué aprenderé?

A reconocer los números cuyo desarrollo decimal es infinito y no periódico, y que no pueden escribirse como un cociente entre números enteros.

¿Para qué?

Para resolver problemas de la vida diaria que involucren números irracionales.

Y él ¿quién es?

Teodoro de Cirene (465 a. C. - 398 a. C.)

Este filósofo y matemático griego probó la irracionalidad de las raíces de números naturales no cuadrados al menos hasta 17 usando la reducción al absurdo y la inconsistencia relacionada con pares e impares. Además, desarrolló la espiral que lleva su nombre. Por otra parte, fue uno de los principales filósofos en la escuela de filosofía moral de Cirene, la cual consideraba que los placeres y dolores no eran buenos ni malos, y que la alegría y el juicio eran suficientes para la felicidad.

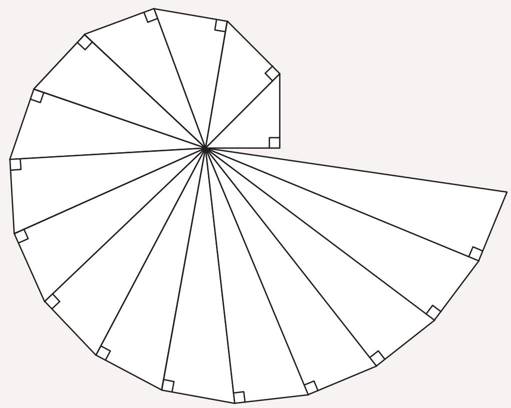
Actividad en pareja

Taller

Materiales

✓ Una regla

La siguiente figura se conoce como la **Espiral de Teodoro**, en honor a Teodoro de Cirene, alumno de Pitágoras. Para construirlo, se comienza trazando un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 1 cm. Luego, se dibuja sobre su hipotenusa otro triángulo rectángulo, cuyos catetos son dicha hipotenusa y otro segmento que mida 1 cm. Sobre el nuevo triángulo se traza otro más, tal que el cateto restante mida 1 cm y así, sucesivamente.



Comenzando por el triángulo más pequeño:

1. Midan la hipotenusa de cada uno de los triángulos con la regla, con la mayor precisión posible. ¿Pueden escribir cada una de estas medidas como un número racional? Expliquen.
2. Apliquen el teorema de Pitágoras para calcular la medida de cada hipotenusa. Comiencen por el triángulo pequeño.
3. Ahora comparen las medidas que obtuvieron con la regla y las que calcularon usando el teorema de Pitágoras. ¿Qué pueden concluir?
4. ¿Qué regularidad numérica pueden observar en las hipotenusas de los triángulos?
5. Al analizar los valores de las hipotenusas, ¿todas podrían representarse como un cociente entre números enteros? Expliquen y muestren con cuáles se puede hacer.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Comprendo la demostración

Para determinar que $\sqrt{2}$ es un **número irracional**, utilizamos una demostración por **reducción al absurdo**.
Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Luego, se podría escribir $\sqrt{2}$ como una fracción irreducible $\frac{m}{n}$, con m, $n \in \mathbb{N}$.

*Es decir, **m** y **n** no tienen factores comunes distintos de 1.*

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \xrightarrow{\text{Al multiplicar por } n} \sqrt{2} \cdot n = m \xrightarrow{\text{Al elevar al cuadrado.}} 2n^2 = m^2$$

Entonces, 2 divide necesariamente a m^2, y como 2 es un número primo, también divide a m, por lo tanto m^2 es múltiplo de 4, o sea que para algún número natural k se cumple que $m^2 = 4k$.

$2n^2 = m^2 = 4k$ ⟶ *Porque $2n^2 = m^2$ y también $m^2 = 4k$.*

$n^2 = 2k$ ⟶ *Dividiendo por 2.*

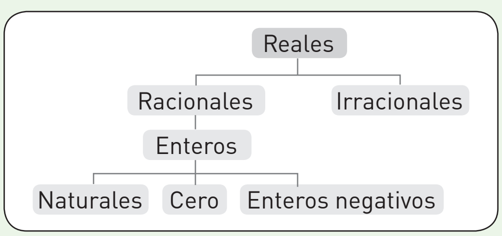
Es decir, necesariamente 2 divide a n^2, y como es número primo, 2 divide también a n.

Pero entonces se acaba de demostrar que 2 divide a m y a n, los que por hipótesis no tenían factores comunes. Esta es una contradicción. Por lo tanto, la suposición de que $\sqrt{2}$ es un número racional es imposible. Así, queda demostrado que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

En resumen

El conjunto de los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) está formado por todos los números que pueden representarse como el cociente entre dos números enteros, con divisor diferente de cero.
Su representación decimal puede ser finita, infinita periódica o infinita semiperiódica. Pero existen números que no pueden representarse como fracción, y su representación decimal infinita es no periódica. Estos conforman el conjunto de los **números irracionales** ($\mathbb{I}$).

El conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$) incluye los números racionales ($\mathbb{Q}$) y los números irracionales ($\mathbb{I}$). Es decir: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.



Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ son disjuntos, es decir, no existe un número real que sea racional e irracional simultáneamente.

El conjunto de los números reales, con la adición y la multiplicación, cumple las propiedades de clausura, conmutatividad, asociatividad, distributividad de la multiplicación respecto de la adición, existencia del elemento neutro para la adición y para la multiplicación, así como del elemento opuesto aditivo y el inverso multiplicativo.

Glosario

Número irracional: No puede representarse como el cociente entre dos números enteros, con divisor diferente de cero. Escrito en forma decimal, es infinito y no tiene período.

El método de demostración conocido como **reducción al absurdo** consiste en suponer lo contrario a lo que se desea demostrar para llegar a una contradicción.

¿A que se refieren estas propiedades? Explícalas dando un ejemplo de cada una.

Actividades de práctica

1. Identifica si cada número pertenece ($\in$) o no pertenece ($\notin$) al conjunto dado.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
21				
3,14				
– 256 898				
$\sqrt{144}$				
$\sqrt{35}$				
$-\sqrt{49}$				
– 29,1				
12,7639876				
$\sqrt{3}$				

2. Resuelve las operaciones y clasifica los números en racionales o irracionales.

a. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$

b. $(\sqrt{3})^{-2}$

c. $\dfrac{\sqrt{29-\sqrt{16}}}{\sqrt{9}}$

d. $1+\sqrt{121}$

e. $(\sqrt{5}-1)^{2}$

3. Expresa los siguientes números decimales como fracción.

a. 6,2

b. 4,38

c. 2,552

d. 7,9913

e. $0,\overline{51}$

f. $0,\overline{025}$

g. $0,4\overline{26}$

h. $2,4\overline{35}$

4. Determina en cada caso un valor de ***b*** para que las siguientes expresiones correspondan a números racionales.

a. $\frac{\sqrt{3}}{b}$

b. $\sqrt{5} + b$

c. $b \cdot \frac{4}{3}\pi$

d. $(b + \sqrt{15}) \cdot 3$

Usa calculadora
Para explorar

5. Determina la veracidad o falsedad de cada afirmación. Justifica las falsas con un contraejemplo.

a. ________ Todo número decimal infinito periódico pertenece al conjunto de los números racionales.

b. ________ Todas las raíces cúbicas de números naturales son irracionales.

c. ________ El 0 es un número racional e irracional.

d. ________ Al dividir un número racional por un número irracional se obtiene siempre uno irracional.

e. ________ Existen números reales que no son racionales ni irracionales.

6. César debe confeccionar tres tipos de volantes rectangulares, pero solo recuerda algunas medidas. Calcula la medida del lado restante a partir de los datos.

a. Volante 1: diagonal de 34 cm y lado de 30 cm.

b. Volante 2: diagonal de 4 cm y lado de 3 cm.

c. Volante 3: diagonal de 18 cm y lado de 12 cm.

d. ¿Qué tipo de número obtuviste para la medida del lado restante en cada volante?, ¿crees que es posible que un volante posea un lado con estas medidas? Justifica.

7. Gabriela debe encintar todos los bordes de los banderines que se entregarán a cada estudiante de cuarto medio de su colegio al momento de la ceremonia de licenciatura. Cada banderín tiene forma de un triángulo rectángulo de catetos 15 y 16 cm, y debe determinar cuál es la cantidad de cinta (en centímetros) que necesitará.

a. ¿Cuántos centímetros de cinta se requieren por cada banderín?, ¿a qué conjunto numérico pertenece este valor? Justifica.

b. Además, debe encintar otro tipo de banderines, también triangulares, cuyos catetos miden 17,5 cm y 6 cm. ¿Cuánta cinta necesitará para cubrir uno de estos banderines?, ¿a qué conjunto numérico crees que pertenece este valor? Justifica.

¿Qué aprendí hoy?

1 ¿Cómo se definen los números irracionales?

2 Presenta un contraejemplo para justificar la falsedad de cada afirmación.

a. Todos los números irracionales son raíces cuadradas no exactas.

b. Al sumar o restar números irracionales, el resultado es un número irracional

Cuaderno página 6

Tema 2: ¿Cómo se ordenan y aproximan los números irracionales?

¿Qué aprenderé?

A ubicar números irracionales en la recta numérica y aproximar números irracionales por tanteo.

¿Para qué?

Para ordenar números racionales e irracionales y aplicar su orden en contextos de la vida cotidiana.

Glosario

Cuadrado perfecto: número natural que es el cuadrado de algún otro número natural.

¿Piensas que hay alguna otra manera de realizarlo?

Actividad grupal

Taller

Materiales
- Hojas de papel blanco
- Regla o escuadra
- Compás

1 Para cada una de las siguientes raíces, analicen cómo podrían descomponer la cantidad subradical en una suma, de modo que cada sumando sea un **cuadrado perfecto**. Por ejemplo, $\sqrt{13} = \sqrt{9+4} = \sqrt{3^2+2^2}$.

$\sqrt{20}$ $\sqrt{17}$ $\sqrt{32}$ $\sqrt{29}$ $\sqrt{37}$ $\sqrt{45}$

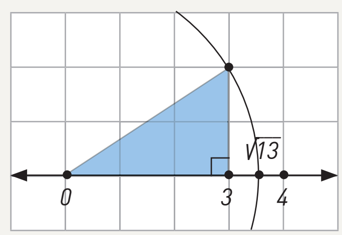
2 Usen estos valores para construir un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan estas medidas.
En el ejemplo, como $\sqrt{13} = \sqrt{3^2+2^2}$, los catetos miden 3 y 2.
¿A qué corresponde la medida de la hipotenusa?

3 Cada uno escoja una o dos de las raíces anteriores y siga los pasos para determinar su ubicación en la recta numérica.

PASO 1 Tracen una recta numérica, y ubiquen los números necesarios, cuidando que la medida que se utilice para la unidad sea siempre la misma.

PASO 2 Construyan un triángulo rectángulo con las medidas asociadas, tal que uno de los catetos esté en la recta numérica con un extremo en el 0. Así, el otro cateto es perpendicular a la recta numérica.

PASO 3 Con ayuda de un compás, tracen el arco de circunferencia con centro en el punto 0 y con el radio que corresponda a la hipotenusa hasta intersecar la recta numérica. En este punto de intersección se ubica la raíz cuadrada asociada. Siguiendo el ejemplo, $\sqrt{13}$ se ubica en la recta numérica entre el 3 y el 4.



4 Comparen sus dibujos. ¿Todos lograron una correcta ubicación de la raíz cuadrada en la recta numérica?

5 Si el triángulo se construyera considerando al otro cateto en la recta, ¿sería distinta la ubicación de la raíz cuadrada en la recta numérica? Justifiquen.

6 ¿Se puede utilizar esta técnica para otras raíces cuadradas no exactas? Comenten sus razones.
Por ejemplo, ¿cómo podrían ubicar $\sqrt{14}$?

¿Cómo trabajé el taller?	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	Individualmente	Grupalmente

Actividades de proceso

1. Ordena de menor a mayor los siguientes números irracionales:

$$2\sqrt{5};\ 4\sqrt{2};\ 2\sqrt{3};4\sqrt{3}$$

Para ordenar números representados con raíces cuadradas, una técnica apropiada consiste en elevar al cuadrado cada número y ordenarlos según corresponda al orden de los valores obtenidos.

$\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 \cdot 3 = 12$

$\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 16 \cdot 2 = 32$

$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 =$ $\boxed{}$

$\left(4\sqrt{3}\right)^2 =$ $\boxed{}$

Ordena los números obtenidos de menor a mayor.

$$12 < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{}$$

Y luego, los números irracionales en el mismo orden.

$$2\sqrt{3} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{}$$

Ayuda

Cuando a, b > 1, se cumple que:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

El símbolo "$\Leftrightarrow$" indica doble condicionalidad. En el caso anterior, se puede interpretar como: "cuando $a < b$, necesariamente se cumple que $a^2 < b^2$".

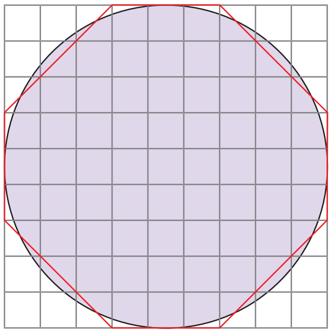
Matemática e historia

Aproximación del número π

Existen números irracionales que no corresponden a raíces cuadradas. Uno de los más importantes es π, número que relaciona la medida del diámetro de una circunferencia con su longitud, o también el área de un círculo con la de su cuadrado circunscrito.

El escriba Ahmes, en Egipto, estimó su valor, el cual está registrado en el papiro Rhind, que data del siglo XVI a. C.

Para ello, consideró un cuadrado de 9 unidades de lado, que fue dividido en 81 partes. Luego, para transformarlo en un polígono de 8 lados, cortó en cada vértice esquinas de lado 3 unidades, tal como se muestra en la imagen.



Se puede ver que el área del polígono corresponde a 18 cuadraditos menos que el cuadrado grande es decir, 81 – 18 = 63 cuadraditos, un área un poco menor que la del círculo. Por lo tanto, Ahmes estimó que el área del círculo sería de 64 cuadraditos.

El radio de este círculo es 4,5 unidades, por lo que, si se aplica la fórmula para el área, se obtiene que:

$$\pi \cdot 4{,}5^2 \approx 64 \rightarrow \pi \approx \frac{64}{20{,}25} \rightarrow \pi \approx 3{,}16$$

¿Es posible mejorar esta aproximación usando la misma estrategia? Explica.

Y él ¿quién es?

Leonhard Paul Euler (1707-1783)

Este matemático y físico suizo fue uno de los más influyentes y prolíficos de la historia; se estima que sus obras completas tendrían una extensión de entre 60 y 80 volúmenes. Realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos, e introdujo gran parte de la notación matemática, como los números e, i y π. Además, se le conoce por sus grandes aportes en la mecánica, la óptica y la astronomía.

Usa calculadora
Para explorar

Ayuda

En general, al aproximar, hay siempre una diferencia con el valor real llamada **error**.

Si al aproximar un número cualquiera el número obtenido es menor, se ha aproximado por **defecto**. En cambio, si es mayor, se ha aproximado por **exceso**.

Cuando de los dos valores posibles se ha considerado aquel con el que se comete el menor error, se ha aproximado por **redondeo**.

Por ejemplo, para aproximar $\sqrt{10}$ a la centésima:

- $\sqrt{10} \approx 3,16$, por defecto,
- $\sqrt{10} \approx 3,17$, por exceso,
- $\sqrt{10} \approx 3,16$, por redondeo.

2. La propiedad que conserva el orden al elevar al cuadrado también es útil para aproximar números expresados con raíces cuadradas, mediante acotaciones sucesivas.
Por ejemplo, para acotar $\sqrt{10}$:

a. Decide entre qué números naturales está $\sqrt{10}$ observando las raíces cuadradas exactas.

$$\sqrt{1} = 1 \qquad \sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{16} = 4$$

Como 10 se encuentra entre ____ y ____, $\sqrt{10}$ está entre ____ y ____.

b. Para mejorar la aproximación, busca un número entre los dos anteriores, calcula su cuadrado y compáralo con los demás valores:

Por ejemplo, al escoger 3,5, y calcular su cuadrado: $3,5^2 = 12,25$:

$$9 < 10 < 12,25 \qquad 3 < \sqrt{10} < 3,5$$

Repite el proceso, escogiendo algún número entre 3 y 3,5 ____. Luego, calcula su cuadrado ____ para comparar.

$$\square < 10 < \square \qquad \square < \sqrt{10} < \square$$

c. Nuevamente, escoge un número ____, calcula su cuadrado ____ y compara:

$$\square < 10 < \square \qquad \square < \sqrt{10} < \square$$

d. Si utilizas la calculadora $\sqrt{10} = 3,162277660168...$, ¿cuántos decimales correctos obtuviste con tu aproximación?, ¿dirías que es una buena aproximación? Justifica.

____

____

____

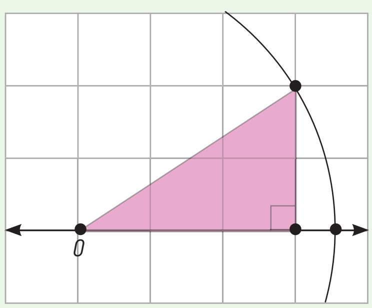
En resumen

- En el caso de las raíces cuadradas, dos o más raíces cuadradas se pueden ordenar observando su cantidad subradical. Así, si $a < b$, se cumple que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$.
- Para aproximar raíces cuadradas no exactas, se puede aplicar la acotación sucesiva. Primero, se ubica el número irracional entre dos números naturales sucesivos, usando la relación $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
  Para mejorar la aproximación, se puede escoger algún número entre los ya encontrados, se compara su cuadrado con la cantidad subradical y se decide los valores que lo acotan. Este método nos permite aproximar el valor de una raíz con la precisión que consideremos pertinente.
- La cantidad de cifras decimales de una aproximación depende de la cantidad de cifras de los datos y también de la precisión requerida, según el contexto del problema.
- Los números irracionales escritos en forma decimal, como π o e, necesariamente se presentan aproximados, ya que es imposible escribir todas sus cifras decimales. Tal como con los números racionales, los irracionales se pueden truncar o redondear al valor posicional escogido; también dos o más números se pueden ordenar, observando las cifras decimales de izquierda a derecha.
- En la recta numérica, las raíces cuadradas no exactas pueden ubicarse usando regla y compás, y aplicando el teorema de Pitágoras.

  1º Dada una raíz cuadrada, se descompone la cantidad subradical en una suma de cuadrados perfectos.

  2º En una recta numérica, se construye un triángulo rectángulo con las medidas asociadas a dichos cuadrados perfectos, de modo que uno de los catetos esté en la recta numérica y uno de sus vértices en el 0 (no el del ángulo recto). Así, el otro cateto será perpendicular a la recta numérica.

  3º Con ayuda de un compás, se traza el arco de circunferencia con centro en el punto 0 y radio correspondiente a la hipotenusa hasta intersecar la recta numérica. En este punto de intersección se ubica la raíz cuadrada.



Actividades de práctica

1. Determina una aproximación de los siguientes números, aplicando el método de aproximación por acotación sucesiva.

a. $\sqrt{6}$

b. $\sqrt{13}$

c. $\sqrt{27}$

d. $\sqrt{62}$

e. $\sqrt{90}$

f. $\sqrt{185}$

g. $\sqrt{240}$

h. $\sqrt{350}$

2. Ordena ascendentemente los siguientes números reales.

a. $\sqrt{26}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{721}{200}$; $3{,}601$

b. $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{4}{8}$; $0{,}\overline{56}$

c. $\sqrt{6}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{49}{20}$; $2{,}42$

d. $3\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$; $\frac{13}{2}$; $4{,}2$

e. $\sqrt{10}$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}$; $2{,}5$

f. $2\sqrt{8}$; $\sqrt{15}$; $\frac{22}{5}$; $4{,}0\overline{8}$

3. Representa en una recta numérica, mediante construcción geométrica, el número real pedido en cada caso.

a. $\sqrt{2}$

b. $\sqrt{5}$

c. $\sqrt{10}$

d. $\sqrt{37}$

e. $\sqrt{50}$

f. $\sqrt{17}$

4. Responde las preguntas en tu cuaderno.

a. ¿Para qué crees que sirve aproximar? Explica con tus palabras.

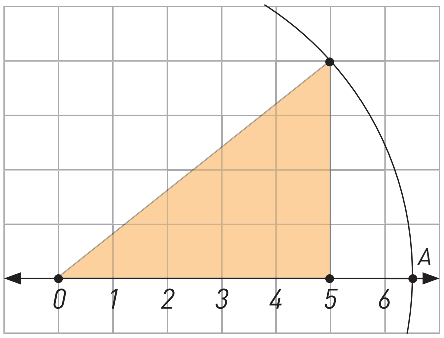
b. ¿Es igual redondear que truncar? Explica utilizando un ejemplo.

c. Para determinar una mejor aproximación de un número, ¿se debe redondear o truncar? Justifica.

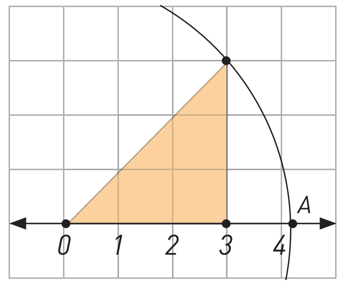
d. ¿Crees que los métodos vistos anteriormente sirven para aproximar raíces cúbicas?, ¿por qué?

5. Determina en cada caso cuál es el número real correspondiente al punto *A*.

a.



b.



6. Calcula el valor aproximado de cada raíz.

Usa $\sqrt{2} \approx 1,41$
$\sqrt{3} \approx 1,73$
$\sqrt{5} \approx 2,24$

a. $\sqrt{20}$

b. $\sqrt{300}$

c. $\sqrt{147}$

d. $\sqrt{405}$

e. $\sqrt{1125}$

f. $\sqrt{6000}$

7. Loreto quería decorar un viejo tambor metálico para usarlo de paragüero. Para ello, contaba con un grueso cordón que pretendía pegar en el contorno del borde superior del tambor. Sabiendo que el diámetro de este era 58,5 cm, cortó el cordón, dejando el trozo más largo de 175,5 cm de longitud de modo que le alcanzara justo, pero le faltaron 7 cm. ¿Cuál fue el error de Loreto?

8. En una fábrica de frutas en conserva se estudia disponer de un nuevo formato: un envase cilíndrico con capacidad de 1000 cm^3. La primera propuesta consiste en un envase de 10 cm de altura; la segunda, en uno cuyo altura sea igual al doble de su radio. ¿Cuál de los envases es más angosto?

9. Con el objetivo de facilitar el descenso y ascenso de carros con ruedas entre dos superficies separadas por un escalón cuya altura es de 20 cm, Martina diseña una rampa de 96 cm de largo. ¿Cuál es la distancia longitudinal que se requiere para ubicar correctamente la rampa? Aproxima hasta la décima.

¿Qué aprendí hoy?

1 Aproxima $\sqrt{38}$, aplicando el método por acotación sucesiva.

2 Para proteger su antena de los efectos del viento, una empresa de telefonía celular decidió instalar dos cables anclados al suelo desde un mismo punto de la torre a 25 metros de altura. Los cables están anclados al suelo a 15 m y 5 m de la base de la antena. Según la información anterior, ¿cuál es la cantidad mínima de cable que se necesita para eso aproximadamente?

Cuaderno página 8

Tema 3: ¿Cómo se puede calcular con números reales?

¿Qué aprenderé?

A utilizar la descomposición de raíces cuadradas y sus propiedades, y así operar con números racionales e irracionales.

¿Para qué?

Para resolver problemas que involucren raíces cuadradas en diferentes contextos.

Y ella ¿quién es?

Marie Curie (1867-1934)

Química y física polaca, fue la primera persona en recibir dos Premios Nobel y la única en hacerlo en dos especialidades científicas distintas: Física (1903) y Química (1910).
Es también un ícono de la mujer en la ciencia y la sociedad: fue la primera mujer en ganar un Premio Nobel, en ocupar una cátedra e impartir clases en la Universidad de París.

Sus hallazgos son pioneros en el campo de la radiactividad: descubrió dos elementos químicos (el polonio y el radio), desarrolló técnicas para el aislamiento de isótopos radioactivos e investigó el uso de la radiactividad con fines medicinales.

Actividad en pareja

Taller

A continuación se muestra cómo descomponer raíces cuadradas de números naturales:

Número natural: 12

PASO 1 $\sqrt{12}$

PASO 2 $\sqrt{4 \cdot 3}$

PASO 3 $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$

PASO 4 $2 \cdot \sqrt{3}$

1. Describan verbalmente cada uno de los pasos anteriores, utilizando expresiones como las siguientes: descomponer, producto, multiplicación de raíces cuadradas, calcular la raíz cuadrada, raíz cuadrada exacta.

2. Sigan la estructura presentada en el esquema para descomponer las siguientes raíces cuadradas:

   a. $\sqrt{72}$
   b. $\sqrt{250}$
   c. $\sqrt{100\ 000}$
   d. $\sqrt{\frac{75}{16}}$
   e. $\sqrt{\frac{48}{50}}$
   f. $\sqrt{\frac{162}{45}}$
   g. $\sqrt{0{,}27}$
   h. $\sqrt{4{,}50}$
   i. $\sqrt{0{,}0012}$
   j. $\sqrt{0{,}64}$

3. Si fuera necesario sumar o restar algunas de las raíces cuadradas anteriores, ¿prefieren la raíz original o la que resultó al descomponerla?, ¿por qué?

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?		
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?		

Actividades de proceso

Analiza los ejercicios resueltos y responde las preguntas.

1. Resuelve $3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{27} + 5\sqrt{4} - 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2} + 9\sqrt{5}$

PASO 1 $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{27} + 5\sqrt{4} + 9\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

PASO 2 $(3 - 4)\sqrt{2} - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + (9 - 2)\sqrt{5}$

PASO 3 $-\sqrt{2} - 6 + 10 + 7\sqrt{5}$

PASO 4 $-\sqrt{2} + 7\sqrt{5} + 4$

a. ¿En qué consiste el primer paso?

b. ¿Qué propiedades se están aplicando en el paso 2?

c. En el paso 3, ¿cómo se obtiene –6 y 10?

d. ¿Se puede seguir sumando en el paso 4?, ¿por qué?

2. Resuelve $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{112} - 17\sqrt{7}$

PASO 1 $\sqrt{4 \cdot 7} - \sqrt{9 \cdot 7} + \sqrt{16 \cdot 7} - 17\sqrt{7}$

PASO 2 $(\sqrt{4} \cdot \sqrt{7}) - (\sqrt{9} \cdot \sqrt{7}) + (\sqrt{16} \cdot \sqrt{7}) - 17\sqrt{7}$

PASO 3 $2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - 17\sqrt{7}$

PASO 4 $(2 - 3 + 4 - 17)\sqrt{7}$

PASO 5 $-14\sqrt{7}$

a. ¿Qué proceso se realizó en el paso 1?

b. ¿Qué propiedad se aplicó en el paso 2?

c. Para reescribir las cantidades subradicales como producto, ¿qué condición deben cumplir los números que se escojan como factores?

d. ¿Qué operación se realiza en los pasos 3 y 4?

3. Aplica los pasos de los ejercicios anteriores para resolver las siguientes operaciones.

a. $12\sqrt{5} + 9\sqrt{3} - \sqrt[3]{64} - 15\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

b. $2\sqrt{27} - 4\sqrt{12} + 3\sqrt{48} - \sqrt{75}$

4. Responde a partir de cada racionalización. Completa cuando corresponda.

a. $\frac{3}{\sqrt{5}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} =$

b. $\frac{6}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} =$

Para amplificar, ¿se consideró el numerador o el denominador en estos casos? Explica.

____

____

c. $\frac{5}{4 - \sqrt{3}} \rightarrow \frac{5}{4 - \sqrt{3}} \cdot \frac{4 + \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (4 + \sqrt{3})}{(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})} = \frac{20 + 5\sqrt{3}}{16 - 3} = \frac{20 + 5\sqrt{3}}{13}$

¿Observas alguna relación entre el denominador y el valor que amplifica? ¿Qué producto notable se genera en este caso?

____

____

d. $\frac{4}{\sqrt{11} - 2\sqrt{3}} \rightarrow \frac{4}{\sqrt{11} - 2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{11} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{11} + 2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{11} + 8\sqrt{3}}{-1} = -4\sqrt{11} - 8\sqrt{3}$

¿Se aplica el mismo procedimiento anterior si en el denominador existen dos radicales?, ¿de qué forma?

____

____

¿Cuál es el índice de cada radical en los ejercicios anteriores?, ¿de qué forma crees que esto influye en la racionalización?

____

____

En resumen

- Si al factorizar la cantidad subradical uno de sus factores se repite, ese factor se puede expresar fuera de la raíz:

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a \cdot \sqrt{b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

- Dos o más raíces cuadradas que tengan la misma cantidad subradical se pueden sumar de la siguiente forma:

$$p\sqrt{a} + q\sqrt{a} = (p + q)\sqrt{a}, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ p, q \in \mathbb{R}$$

  Es decir, se suman sus factores enteros aplicando la propiedad distributiva de los números reales.

- Dada una expresión fraccionaria que contiene una o más raíces cuadradas no exactas en su denominador, **racionalizar** la expresión es transformarla de modo que no posea raíces en el denominador, sin cambiar su valor. Para esto, se amplifica por una expresión tal que se elimine la o las raíces del denominador, por ejemplo:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b} - a\sqrt{c}}{b - c} \qquad \frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b} + a\sqrt{c}}{b - c}$$

  con $a \in \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq c$

- Una de las ventajas de racionalizar expresiones que contienen raíces cuadradas en el denominador es que se pueden aproximar y comparar de manera más sencilla.

Matemática y arte

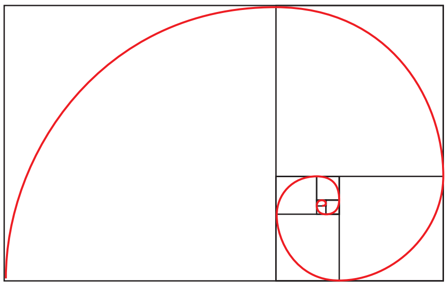
El número áureo es uno de los números que más fascinación ha levantado a lo largo de la historia. Se pueden distinguir tres componentes en su historia.

- **El número áureo**: es un número irracional que se expresa con la siguiente fórmula:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033988749...$$

- **Proporción áurea**: es un concepto geométrico, que se da cuando al partir un segmento en dos partes desiguales, dividiendo el total por la parte más larga se obtiene el mismo resultado que al dividir la más larga entre la más corta.
- **Sucesión de Fibonacci**: serie infinita de números naturales que empieza con un 1 y otro 1 y se construye añadiendo números que son la suma de los dos anteriores:

  1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377...



Uniendo el concepto aritmético con su representación geométrica se obtiene una de las imágenes más comúnmente asociadas al número y la razón áurea: **la espiral de Fibonacci**.

Actividades de práctica

1. Descompón las siguientes raíces cuadradas.

Usa calculadora
Para explorar

a. $\sqrt{72} =$

b. $\sqrt{108} =$

c. $\sqrt{363} =$

d. $\sqrt{147} =$

2. Resuelve las siguientes expresiones.

a. $6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 8\sqrt{5} =$

b. $7\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 3\sqrt{125} =$

c. $\sqrt{216} + \sqrt{81} - 7\sqrt{121} =$

¿Qué dificultades encontraste?, ¿cómo las superaste?

d. $5\sqrt{24} - 4\sqrt{600} + 10\sqrt{54} =$

e. $2\sqrt{108} - 5\sqrt{162} + 3\sqrt{242} =$

3. Analiza la siguiente demostración.

$$\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = x}\text{, con } a,b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

PASO 1 $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = x^2$

PASO 2 $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}\right) \cdot \left(\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}\right) = x^2$

PASO 3 $ab = x^2$

PASO 4 $\sqrt{ab} = x$

Siguiendo el ejemplo de la demostración anterior, demuestra que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$.

4. Racionaliza las siguientes expresiones.

a. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

b. $\frac{6}{\sqrt{13}}$

c. $\frac{8}{\sqrt{5}}$

d. $\frac{5}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

e. $\frac{9}{\sqrt{7} + \sqrt{10}}$

f. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$

g. $\frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{\sqrt{11} - \sqrt{3}}$

h. $\frac{7}{\sqrt{\sqrt{12} + \sqrt{3}}}$

5. Fabián dispone de un terreno de forma cuadrada para siembra, pero antes de iniciar los trabajos debe calcular la cantidad de material que necesita para cercarlo.

a. ¿Cuál es el perímetro del terreno si se sabe que su área es 115 200 m^2? Entrega una aproximación utilizando dos decimales.

b. Fabián decide dividir su terreno en dos superficies equivalentes: una para sembrar zanahorias y la otra para sembrar papas. Para ello, trazará una diagonal desde uno de los vértices hasta su opuesto y sobre esta construirá un cerco de alambre. ¿Cuál es la cantidad mínima, en metros, de alambre que requerirá para construir el cerco, considerando que este cruzará cinco veces el terreno en diagonal?

Usa $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$

6. Tecnología. En una clase de Tecnología, un grupo de estudiantes va a construir diferentes cuadrados con palitos de maquetas, incluido otro palito en su diagonal. Jorge y Mariela serán los encargados de medir y cortar todos los palitos para las diagonales, según las indicaciones de los demás integrantes del grupo.

- Manuel solicitó palitos para sus cuadrados cuyas longitudes aproximadas son las siguientes: $\sqrt{162}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{48}$ y $\sqrt{50}$.
- Para Daniela deben cortar cinco palitos de longitudes $\sqrt{80}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{180}$, $\sqrt{20}$ y $\sqrt{18}$, aproximadamente.
- Rodrigo requiere seis palitos con las siguientes longitudes aproximadas: $\sqrt{176}$, $\sqrt{343}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{275}$, $\sqrt{63}$ y $\sqrt{700}$.
- Javiera va a construir cuadrados más pequeños y necesita seis palitos de longitudes $\sqrt{\frac{18}{4}}$, $\sqrt{\frac{75}{36}}$, $\sqrt{\frac{32}{9}}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$ y $\sqrt{\frac{75}{4}}$, aproximadamente.

Usa $\sqrt{2} \approx 1{,}41$
$\sqrt{3} \approx 1{,}73$
$\sqrt{5} \approx 2{,}23$
$\sqrt{7} \approx 2{,}64$
y $\sqrt{11} \approx 3{,}31$

a. Determina la cantidad total aproximada de centímetros de palitos que se deberá cortar para cada uno. Primero, reduce los valores a su mínima expresión y luego estima el resultado con dos cifras decimales.

- Manuel:
- Daniela:
- Rodrigo:
- Javiera:

b. Si Jorge y Mariela cuentan con trozos de 1 m de largo, ¿existe alguno de los palitos que no puedan cortar y entregar porque se requiera mayor longitud?, ¿cuál?

¿Qué aprendí hoy?

1 Resuelve las siguientes expresiones.

a. $3\sqrt{7} - 2\sqrt{28} =$

b. $5\sqrt{8} - 3\sqrt{32} + \sqrt{128} =$

2 Racionaliza las siguientes expresiones.

a. $\frac{1}{\sqrt{7}}$

b. $\frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{12}}$

Cuaderno página 10

1 Identifica si cada número pertenece ($\in$) o no pertenece ($\notin$) al conjunto dado.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
$\sqrt{36}$				
$-357\,216$				
$\sqrt{215}$				
$-\sqrt{20{,}25}$				
$-29{,}1$				
$\frac{\sqrt{64}-\sqrt{16}}{\sqrt{9}}$				

2 Determina una aproximación de los siguientes números, aplicando el método de aproximación por acotación sucesiva.

a. $\sqrt{19}$

b. $\sqrt{42}$

c. $\sqrt{105}$

d. $\sqrt{270}$

3 Ordena de menor a mayor los siguientes números reales.

a. $3{,}75$; $\sqrt{14}$; $3\sqrt{2}$; $\frac{121}{50}$

b. $4\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$; $\frac{14}{3}$; $6{,}\overline{6}$

c. $\sqrt{7}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{39}{12}$; $3{,}12$

d. $2\sqrt{5}$; $\sqrt{19}$; $\frac{13}{4}$; $4{,}7$

4 Representa cada número en una recta numérica, mediante una construcción geométrica, usando regla y compás.

a. $\sqrt{20}$

b. $\sqrt{29}$

c. $\sqrt{52}$

d. $\sqrt{90}$

5 Reduce las siguientes expresiones.

a. $9\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} =$

b. $2\sqrt{7} + 4\sqrt{28} - 5\sqrt{175} =$

c. $4\sqrt{25} - 3\sqrt{250} + 7\sqrt{72} =$

6 Racionaliza las siguientes expresiones.

a. $\dfrac{1}{\sqrt{12}} =$

b. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} =$

c. $\dfrac{10}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} =$

d. $\dfrac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} =$

e. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} =$

f. $\dfrac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} =$

7 Resuelve los siguientes problemas e indica en qué casos el resultado corresponde a un número irracional.

a. ¿Cuál es la altura de un triángulo equilátero de lado 2 m?

b. ¿Cuál es la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 cm?

c. ¿Cuál es la medida de un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 25 cm y el otro cateto mide 20 cm?

d. ¿Cuál es la razón entre el largo de un rectángulo y su ancho si sus medidas son $(1 + \sqrt{5})$ cm y 2 cm, respectivamente?

e. ¿Cuál es la distancia en centímetros que recorre una rueda de una bicicleta de 26 pulgadas de diámetro en dar una vuelta completa?

f. ¿Cuál es el área de la tapa de un libro cuyo largo y ancho miden $\sqrt{100}$ cm?

8 La señora Catalina vive en el campo y cria animales. Decidió dividir cada uno de los cuatro corrales rectangulares en dos mediante un cerco a lo largo de su diagonal. En cada caso, calcula la longitud de la diagonal, identifica si el valor obtenido es un número racional o irracional y aproxima su valor con dos cifras decimales.

Usa calculadora

a. Medidas del corral de patos y gansos: 4 metros y 5 metros.

b. Medidas del corral de ovejas y vacas: 8,06 metros y 7,92 metros.

c. Medidas del corral de cerdos y chivos: 5,6 metros y 4,8 metros.

d. Medidas del corral de pavos y gallinas: 3,5 metros y 2,5 metros.

9 Alberto fabrica tablas de madera para la cocina en tres tamaños, rectangulares y semejantes entre sí.

a. Si el área de la tabla mediana es el $\dfrac{18}{25}$ del área de la tabla grande, que tiene 60 cm de largo y cuya diagonal mide 80 cm, ¿cuáles son las medidas de los lados de la tabla mediana?

b. Si el área de la tabla pequeña es el $\dfrac{8}{9}$ del área de la tabla mediana, determina su área, la longitud de sus lados y la de su diagonal.

Usa $\sqrt{3} \approx 1{,}732$
$\sqrt{5} \approx 2{,}236$

10 **Geometría.** Rodolfo trota día por medio y cada vez escoge alguna de las cuatro rutas de las que dispone. Todas estas rutas tienen forma de triángulo rectángulo y de cada una Rodolfo solo conoce las longitudes de dos lados: el más extenso y el más corto, las que se detallan a continuación:

Ruta 1: 6 km y 3 km
Ruta 2: 10 km y 5 km
Ruta 3: 9 km y 6 km
Ruta 4: 5 km y $3{,}\overline{3}$ km

En cada caso, expresa los resultados usando raíces cuadradas, simplificadas si es posible, y luego, un valor aproximado.

a. Calcula el total de kilómetros recorridos en una de las rutas.

b. ¿Cuántos kilómetros más recorre en la segunda ruta con respecto a la primera?, ¿y en la tercera con respecto a la cuarta?

c. ¿En total cuántos kilómetros trota en ocho días si cada vez que trota utiliza una ruta distinta?

Usa $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$

11 **Geometría.** Jacqueline desea ordenar algunas cajas cúbicas, en las que guarda una colección de revistas. Tiene 5 cajas, cuyo volumen (en cm^3) es de 27 000, 432 000, 16 000, 64 000 y 250 000 respectivamente. Si el espacio disponible en su casa es de 80 cm de ancho, 230 cm de largo y de altura suficiente para cualquiera de ellas, ¿el lugar disponible será suficiente para que pueda ordenar todas las cajas?

12 Rocío y Magdalena tienen el proyecto de habilitar plazas de juegos al interior de dos centros comerciales, las que tendrán la forma de un triángulo rectángulo.

En el primero, se habilitarán las dos primeras plazas, una que tendrá catetos de longitud $\sqrt{54}$ metros y $\sqrt{90}$ metros, e hipotenusa 12 metros, mientras que la otra tendrá catetos de longitud $\sqrt{96}$ metros y $\sqrt{160}$ metros, e hipotenusa 16 metros.

Expresa todos los resultados con el menor radicando posible.

a. Durante la construcción se debe instalar un cerco de seguridad perimetral para prevenir accidentes. ¿Cuántos metros más se deberán cubrir en la plaza mayor que en la menor?

b. ¿Cuál será el área de cada plaza?

En el segundo, se habilitarán las otras dos plazas, pero se desconocen algunas medidas. En la primera plaza un cateto mide 14 metros y la hipotenusa, 18 metros, mientras que la otra, un cateto mide 5,6 metros y la hipotenusa, 7,2 metros.

c. Calcula la medida de cada uno de los catetos desconocidos.

d. Para la instalación del cerco de seguridad perimetral, ¿cuántos metros más se deberán cubrir en la primera plaza que en la segunda?

e. ¿Cuál será el área de cada una de estas dos últimas plazas? ¿Cuál es la razón entre estas áreas y cómo interpretarías este valor?

13 **Geometría.** Tatiana es urbanista y, en un barrio por el que cruza una avenida en diagonal, ha diseñado seis plazuelas con forma de triángulo isósceles rectángulo. Luego de analizar los demás requerimientos, Tatiana decidió que las medidas de las hipotenusas (en metros) sean 9, $5\sqrt{2}$; $13,\overline{4}$; $5\sqrt{7}$; $8\sqrt{3}$; $\frac{67}{5}$ y $6\sqrt{5}$, respectivamente.

a. Utilizando el método que estimes conveniente, determina cuál de las plazuelas será la más grande.

b. Estima, con dos cifras decimales, cuál es el valor de las longitudes de las hipotenusas de cada plazuela.

Usa $\sqrt{2} \approx 1,41$
$\sqrt{3} \approx 1,73$
$\sqrt{5} \approx 2,24$ y
$\sqrt{7} \approx 2,65$

Me evalúo

Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Reconocí que los números irracionales no pueden escribirse como un cociente entre números enteros y que su desarrollo decimal es infinito y no tiene período.	○	○	○
Representé números irracionales como puntos sobre la recta numérica real.	○	○	○
Estimé y aproximé números irracionales.	○	○	○
Utilicé la descomposición de raíces cuadradas y las propiedades de las raíces cuadradas.	○	○	○
Resolví problemas que involucren números racionales e irracionales en diferentes contextos.	○	○	○
Expliqué demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.	○	○	○
Demostré interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.	○	○	○

Cuaderno página 12

Reviso mis metas y estrategias

1 Respecto de las estrategias que mencionaste en la página 15: ¿han sido eficaces?, ¿por qué?

____

____

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

____

____

Lección 2

Raíces enésimas y logaritmos

Exploro

¿Qué sabes sobre los logaritmos? Escribe tres ideas.

¿Te imagina a qué se refiere la raíz cúbica de un número? ¿o la raíz cuarta? Explica.

Aprenderé a:

- Definir y calcular raíces enésimas e interpretarlas como potencias de exponente fraccionario.
- Definir y calcular logaritmos; comprender y aplicar sus propiedades.
- Reconocer la relación entre potencias, raíces y logaritmos.
- Resolver problemas en situaciones que involucran raíces enésimas o logaritmos.

Necesito recordar...

- Factorización prima.
- Potencias de exponente entero y sus operaciones.
- Raíces cuadradas.

¿Qué debo saber?

1. Descompón los siguientes números como producto de factores primos.

a. 24

b. 75

c. 108

d. 300

e. 1275

f. 1300

2. Resuelve cada una de las expresiones siguientes aplicando lo que sabes sobre potencias.

a. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4^2 =$

b. $(-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3 =$

c. $2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 2^5 \cdot 3^3 =$

d. $(4^3)^2 =$

3. Determina si las siguientes igualdades son verdaderas. Justifica las falsas.

a. $4^2 + 3^3 = 7^5$

b. $3^3 \cdot 5^2 = 15^5$

c. $4^{-2} \cdot 2^4 = 1$

d. $6^3 : 3^{-3} = 2^0$

e. $3^4 : 9^2 = 1$

f. $(3^3)^2 = 3^5$

4. Descompón cada raíz cuadrada si fuera necesario y reduce las siguientes expresiones.

a. $3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 4\sqrt{7} =$

b. $3\sqrt{8} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{128} =$

c. $5\sqrt{27} - 4\sqrt{243} + 6\sqrt{108} =$

d. $2\sqrt{125} - 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} =$

5. Aplicando el teorema de Pitágoras a las medidas de sus lados, determina si los siguientes triángulos corresponden a un triángulo rectángulo.

a. 12 cm, 16 cm y 20 cm.

b. 15 cm, 20 cm y 24 cm.

c. 10 cm, 13 cm y 17 cm.

d. 20 cm, 48 cm y 52 cm.

e. 24 cm, 10 cm y 26 cm.

f. 25 cm, 15 cm y 20 cm

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😒	😟
Descompuse un número natural en su factorización prima.	○	○	○
Calculé operaciones con potencias de base racional y exponente entero y apliqué sus propiedades.	○	○	○
Calculé operaciones con raíces cuadradas y apliqué sus propiedades.	○	○	○
Apliqué el teorema de Pitágoras a la resolución de problemas geométricos.	○	○	○
Resolví problemas utilizando estrategias como descomponer el problema en subproblemas más sencillos.	○	○	○
Busqué y acepté mis errores y repetí el proceso cuando fue necesario.	○	○	○

Cuaderno página 14

Tema 1: ¿Cuáles son las raíces enésimas?

¿Qué aprenderé?

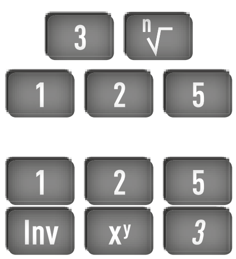
A reconocer la raíz enésima y comprender su relación con las potencias.

¿Para qué?

Para comprender la notación de la raíz enésima y utilizar su relación con las potencias para resolver problemas de las ciencias y la vida diaria.

Ayuda

Las calculadoras científicas no siempre incluyen una tecla para calcular raíces cúbicas. Por ejemplo, para calcular $\sqrt[3]{125}$ se puede digitar de las siguientes formas, según el modelo:



En el segundo caso, se utiliza la raíz como la inversa de la potencia.

Glosario

Raíz enésima: cantidad que considerada n veces como factor da una cantidad determinada.

- Por lo general, en la raíz de índice 2 este valor se omite: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.
- Los nombres de algunas raíces son:

$\sqrt{a}$: raíz cuadrada de *a*.

$\sqrt[3]{a}$: raíz cúbica de *a*.

$\sqrt[4]{a}$: raíz cuarta de *a*.

$\sqrt[5]{a}$: raíz quinta de *a*.

Actividad en pareja

Taller

Materiales

✓ Calculadora científica

1. Busquen en la calculadora la tecla $\sqrt[3]{x}$, investiguen qué es lo que hace y escriban su conclusión.
2. Usando la calculadora, calculen las siguientes raíces. ¿Qué pueden observar?

   $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[3]{-8}$ $\sqrt[3]{125}$ $\sqrt[3]{-125}$ $\sqrt[3]{343}$ $\sqrt[3]{-343}$ $\sqrt[3]{512}$ $\sqrt[3]{-512}$

3. Calculen $\sqrt[3]{7}$ y anoten su resultado con 8 cifras decimales.
4. Borren la pantalla, escriban el número anterior y elévenlo al cubo.
   a. ¿Qué número esperan que resulte?
   b. ¿Cuál es el resultado?
   c. ¿Por qué creen que ocurre esto?
5. Investiguen ahora qué hace la tecla $\sqrt[y]{x}$, para distintos valores de x, primero usando $y = 4$ y luego usando $y = 5$. ¿Qué pueden concluir?
6. Calculen el valor de cada **raíz enésima**. ¿Qué ocurre?

   $\sqrt[4]{-32}$ $\sqrt[5]{243}$ $\sqrt[5]{-243}$ $\sqrt[6]{216}$ $\sqrt[6]{-216}$ $\sqrt[7]{2187}$ $\sqrt[7]{-2187}$

7. ¿Hay valores para los cuales no existan resultados? Expliquen.

Usa calculadora
Para explorar

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?		
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?		

Actividades de proceso

1. Aplica la factorización de cada cantidad subradical y extrae sus factores. Completa cuando corresponda.

a. $\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{64 \cdot 5} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 5} =$

b. $\sqrt[4]{112} = \sqrt[4]{16 \cdot 7} =$

c. $\sqrt[5]{7776} = \sqrt[5]{32 \cdot 243} =$

d. $\sqrt[3]{\frac{24}{125}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125} \cdot 3} =$

e. $\sqrt[4]{0,0081} = \sqrt[4]{\frac{81}{10\,000}} =$

2. Calcula las siguientes operaciones y responde.

a. $7\sqrt[3]{135} - 2\sqrt[3]{40}$

$= 7\sqrt[3]{27 \cdot 5} - 2\sqrt[3]{8 \cdot 5}$

$= 7 \cdot 3\sqrt[3]{5} - 2 \cdot 2\sqrt[3]{5}$

b. $\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{625}$

$= \sqrt[4]{16 \cdot 3} + \sqrt[4]{81 \cdot 2} - 5 =$

¿Siempre es posible sumar raíces con el mismo índice?

____

3. ¿Es verdadero que $\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$?, ¿y que $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{-8} \cdot \sqrt[4]{-2}$? Justifica.

Matemática y tecnología

Las calculadoras y computadores no son capaces de operar con números irracionales, ya que implicaría almacenar en su memoria temporal una cantidad infinita de cifras. Entonces, se aplican algoritmos iterativos para operar usando aproximaciones. Una ventaja del algoritmo de Newton – Raphson es que resuelve el cálculo de una raíz enésima con las cuatro operaciones básicas, por lo que resulta fácilmente programable en un computador.

4. Resuelve $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{192} - \dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} =$

PASO 1 $\sqrt[5]{6} + \sqrt[5]{32 \cdot 6} - \dfrac{\sqrt[4]{2 \cdot 6}}{\sqrt[4]{2}} =$

PASO 2 $\sqrt[5]{6} + \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{6} - \dfrac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{2}} =$

PASO 3 $\sqrt[5]{6} + 2 \cdot \sqrt[5]{6} - \sqrt[4]{6} =$

PASO 4 $3 \cdot \sqrt[5]{6} - \sqrt[4]{6}$

a. ¿Qué proceso se realizó en el paso 1?

b. ¿Qué propiedad se utilizó en los pasos 2 y 3?

c. ¿Qué operación se realiza en el paso 4?

d. ¿Se puede simplificar la expresión obtenida en el paso 4?, ¿por qué?

5. Observa las amplificaciones y determina cuál de ellas racionaliza la expresión.

a. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} =$

b. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{7}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} =$

¿Qué puedes concluir de esto? Explica.

En la expresión racionalizada, ¿cuál es el exponente del radicando que amplifica?

Herramientas tecnológicas

¿Cómo lo resuelve la calculadora?

Para operar con las raíces enésimas en calculadoras y computadores, se usa el llamado algoritmo de Newton - Raphson, que plantea lo siguiente:

Si x es una aproximación de $\sqrt[n]{a}$, $x - \dfrac{x^n - a}{n \cdot x^{n-1}}$ es una aproximación aún mejor.

1. ¿Cómo podrías lograr, de manera rápida, una primera "buena" aproximación para $\sqrt[5]{20}$, por ejemplo?

2. Verifica este algoritmo con una planilla de cálculo, aplicando los siguientes pasos:

PASO 1 En la celda A1, escribe la cantidad subradical de la raíz que se calculará.

PASO 2 En la celda A2, escribe el índice de la raíz que se calculará.

PASO 3 En la celda A3, escribe una aproximación inicial.

PASO 4 En la celda A4, escribe, sin espacios, la fórmula =A3-(POTENCIA(A3;A$2)-A$1)/(A$2*POTENCIA(A3;A$2-1))

PASO 5 Selecciona y arrastra hacia abajo la celda A4 para copiarla en las celdas bajo ella. Procura que se copie al menos hasta la celda A10.

3. Modifica los valores de las celdas A1, A2 y A3 a tu elección. ¿Se obtienen buenas aproximaciones?, ¿cómo podrías comprobarlas?

Cuaderno página 21

En resumen

- A partir del concepto de las raíces cuadradas y sus propiedades, se extiende la noción a potencias de mayores exponentes. En general, si $y = x^n$, con x e y números reales y n un número natural mayor que 1, se dice que x es la raíz enésima de y:

$$y = x^n \leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$$

En esta expresión, a y se le llama cantidad subradical y a n, el índice de la raíz. En el caso de que n sea par, x existe solo si $y > 0$.
Propiedades:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}, \text{ con } b \neq 0$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Cuando } n \text{ es par, } a, b \in \mathbb{R}^+$$

- Dada una expresión fraccionaria que contiene una o más raíces enésimas no exactas en su denominador, racionalizar la expresión es transformarla de modo que no posea raíces en el denominador, sin cambiar su valor. Para esto, se amplifica por una expresión tal que se elimine la o las raíces del denominador, por ejemplo:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^x}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-x}}}{\sqrt[n]{b^{n-x}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-x}}}{b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \text{ (si } n \text{ es par, } b \in \mathbb{R}^+\text{) y } x \in \mathbb{N}$$

Actividades de práctica

1. Relaciona cada raíz enésima con una potencia. Para ello, completa la tabla.

5^3 $\quad (-2)^7 \quad$ 4^4 $\quad \sqrt[3]{-27}$

$\sqrt[5]{32}$ $\quad \sqrt[3]{-343}$ $\quad \sqrt[3]{1000}$

$(-8)^3$ $\quad \sqrt[4]{1296}$ $\quad (-1)^9$ $\quad \sqrt[5]{243}$

Raíz		$\sqrt[3]{125}$			$\sqrt[4]{256}$		$\sqrt[3]{-512}$		$\sqrt[9]{-1}$		$\sqrt[7]{-128}$
Potencia	$(-3)^3$		2^5	3^5		$(-7)^3$		10^3		6^4	

2. Calcula el valor de las siguientes raíces enésimas.

a. $\sqrt[3]{64} =$

b. $\sqrt[5]{-32} =$

c. $\sqrt[4]{81} =$

d. $\sqrt[6]{1} =$

e. $\sqrt[5]{1024} =$

f. $\sqrt[4]{625} =$

3. Responde.

a. ¿Por qué no está definida la raíz de índice par de un número negativo?

b. ¿Existe algún número real tal que su raíz enésima sea el mismo número?

c. ¿Cuál es el valor de $\sqrt[10]{1}$ y de $\sqrt[15]{-1}$?, ¿de qué depende el signo del valor obtenido en cada caso?

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a. $\sqrt[3]{216} + \sqrt[5]{-243} + \sqrt[4]{16} =$

b. $\sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{10\,000} + \sqrt[3]{64} =$

c. $3\sqrt[5]{0{,}00001} + \sqrt[3]{\frac{1}{64}} + 2\sqrt{64} =$

5. Una de las operaciones en las que se aplica la raíz enésima es la **media geométrica**, que es similar a la media aritmética o promedio, pero en este caso los números se multiplican y finalmente se calcula la raíz enésima que corresponda, según la cantidad de números.

En general: $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$. Observa:

- Dados los números 3 y 12, para obtener su media geométrica se calcula $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36}$.
- Para los números 6, 16 y 8, como son tres números, su media geométrica es $\sqrt[3]{6 \cdot 16 \cdot 18} = \sqrt[3]{1728}$.
- En cambio, la media geométrica entre 2, 4, 9 y 18 es $\sqrt[4]{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 18} = \sqrt[4]{1296}$.

Determina la media geométrica de los siguientes números.

a. 4, 6 y 9.

b. 1, 2, 4, 8 y 16.

c. 2, 6, 9 y 12.

d. 2, 4, 6, 9 y 18.

6. Determina, para cada raíz, una expresión equivalente con la menor cantidad subradical posible.

a. $\sqrt[3]{54}$

b. $\sqrt[4]{80}$

c. $\sqrt[3]{9000}$

d. $\sqrt[4]{a^3 b^9}$, con $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

e. $\sqrt[6]{p^{10} q^8 r^3}$, con $p, q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

f. $\sqrt[3]{60 p^5 q^8}$, con $p, q, \in \mathbb{R}$

Glosario

media geométrica: de una cantidad arbitraria *n* de números es la raíz enésima del producto de todos los números.

Se utiliza para datos de progresión geométrica, para promediar razones y para interés compuesto.

¿La media geométrica de dos o más números es mayor o menor que la media aritmética de los mismos números?, ¿por qué crees que sucede eso?

¿Qué aprendí hoy?

1 Calcula el valor de las siguientes raíces enésimas.

a. $\sqrt[5]{243} =$

b. $\sqrt[6]{2048} =$

2 Determina, para cada raíz, una expresión equivalente con la menor cantidad subradical posible.

a. $\sqrt[3]{24000}$

b. $\sqrt[6]{a^8 b^{12} c^{15}}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Cuaderno página 15

Tema 2: ¿Qué representan las potencias de exponente fraccionario?

¿Qué aprenderé?

A comprender la representación de las raíces enésimas como potencias de exponente fraccionario.

¿Para qué?

Para utilizar un registro o el otro según sea necesario al resolver problemas cotidianos.

Actividad en pareja

Taller

1 Apliquen las propiedades de las potencias para reducir las siguientes expresiones.

a. $(4^3)^2 =$

b. $(a^2)^6 =$

2 ¿Qué propiedad debieron aplicar? Explíquenla con sus palabras.

3 Ahora, utilicen la misma propiedad para reducir las siguientes expresiones.

a. $(3^5)^{\frac{1}{5}} =$

b. $\left(6^{\frac{1}{3}}\right)^3 =$

4 Consideren las expresiones anteriores: ¿cómo podrían interpretar los exponentes $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$?, ¿a qué equivalen? Expliquen.

5 Observen la siguiente demostración y comenten con las propiedades que justifican cada paso.

Considera a, $y \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$

Sea $y = a^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[\text{Se eleva a } n]{} y^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$

Aplicando propiedades de potencias

$$y^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$$

$$y^n = a \leftrightarrow y = \sqrt[n]{a}$$

Por definición de raíz enésima

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Ya que ambas expresiones son iguales a y

6 Analicen la siguiente igualdad:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+$$

a. ¿Es correcta? Si lo es, demuéstrenlo utilizando las propiedades que ya conocen. Si no lo es, den un contraejemplo.

b. ¿Cómo se puede interpretar la expresión $a^{\frac{m}{n}}$? Explíquenlo con palabras y den al menos tres ejemplos.

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente

Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente

Grupalmente

Actividades de proceso

1. Analiza la siguiente demostración.

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$$

a. Explícala con tus palabras y escribe una fórmula general para ella.

b. ¿Qué propiedad de potencias se utiliza para demostrarla?

2. Muestra las siguientes igualdades, aplicando las propiedades de potencias.

a. $\sqrt[5]{16} : \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2}$

b. $2\sqrt[7]{3} = \sqrt[7]{2^7 \cdot 3}$

Matemática y computación

Un aspecto fundamental en la programación computacional es la optimización de información inicial que se le debe dar al computador para que pueda realizar las operaciones necesarias. Por lo tanto, si ya existe una operación definida, que ya esté programada, y hay otra que se relaciona con ella, generalmente se busca definir esta última de manera similar a la primera.

¿Qué propiedades de potencias son las que se utilizan?

En resumen

Se puede interpretar una potencia de exponente fraccionario como una raíz enésima y viceversa, de modo que:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ si } n \text{ es par y } m \text{ es impar, } a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Gracias a esto, se pueden realizar operaciones entre raíces enésimas aplicando las propiedades de las potencias para interpretar y simplificar el cálculo de expresiones que las involucran.

Actividades de práctica

1. Expresa en forma de raíces las siguientes potencias.

a. $6^{\frac{1}{5}} =$

b. $8^{\frac{1}{3}} =$

c. $24^{\frac{5}{9}} =$

d. $x^{\frac{5}{2}} =$

e. $q^{\frac{7}{4}} =$

f. $101^{\frac{3}{n}} =$

2. Demuestra la siguiente propiedad de las raíces enésimas.

$$\sqrt[an]{x^{bn}} = \sqrt[a]{x^{b}},\ \text{con } x \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

3. Aplica la propiedad demostrada anteriormente para reducir los índices de las siguientes raíces. Considera $p, q \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$.

a. $\sqrt[8]{p^{6}} =$

b. $\sqrt[5]{q^{15}} =$

c. $\sqrt[4]{p^{2}} =$

d. $\sqrt[10]{p^{8}q^{6}} =$

e. $\sqrt[6]{p^{3}q^{3}} =$

Usa calculadora
Para explorar

4. Verifica, considerando valores para a y b positivos, que los pares de expresiones son distintos entre sí.

a. $(a + b)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$

b. $(a^{2} + b^{2})^{\frac{1}{2}}$ $\qquad a + b$

c. $(a + b)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \dfrac{1}{(a + b)^{2}}$

5. Si $a \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, explica con tus palabras, da ejemplos y demuestra la siguiente propiedad de las raíces enésimas:

$$\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}$$

¿Existe alguna condición para el valor de a? Justifica.

6. Considera las siguientes expresiones, con $a \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$:

$$\sqrt[5]{a^{3}} \cdot \sqrt[7]{a^{5}} = \sqrt[35]{a^{46}} \qquad \frac{\sqrt[7]{a^{5}}}{\sqrt[5]{a^{3}}} = \sqrt[35]{a^{4}}$$

a. ¿Son correctas? Si lo son, demuéstralo. Si no lo son, da un contraejemplo para cada una.

b. Escribe una fórmula que permita multiplicar o dividir dos raíces enésimas de distinto índice e igual cantidad subradical.

7. Aplica la fórmula deducida anteriormente y las demás propiedades para reducir las siguientes expresiones. Considera ***a***, ***b***, ***p***, ***x*** $\in \mathbb{R}^+$.

a. $\sqrt[5]{4^4} \cdot \sqrt[3]{3^2} =$

b. $\sqrt{343} \cdot \sqrt[3]{49} =$

c. $\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[6]{9^5} =$

d. $\sqrt[7]{a^3 b^4} \cdot \sqrt[3]{a^{-5} b^2} =$

e. $\sqrt[4]{3p^5} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4}{p^2}} =$

f. $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[4]{8}} =$

g. $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} =$

h. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[6]{a^3}}} =$

i. $\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt{p^3}}}{\sqrt[4]{p^5}} =$

j. $\dfrac{10\sqrt[3]{x^2} - 15\sqrt[3]{x^4}}{5\sqrt[3]{x}} =$

8. Reduce las siguientes expresiones para obtener una equivalente con la menor cantidad subradical posible. Considera ***a***, ***b***, ***p***, ***q*** $\in \mathbb{R}^+$.

a. $\dfrac{\sqrt[3]{120}}{\sqrt[3]{10}} =$

b. $\dfrac{\sqrt[5]{200}}{\sqrt[5]{4}} =$

c. $\dfrac{\sqrt[6]{24}}{\sqrt[6]{16}} =$

d. $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{8} =$

e. $\sqrt[3]{198} \cdot \sqrt[3]{21} =$

f. $\dfrac{\sqrt[5]{5^7}}{\sqrt[5]{25}} \cdot \sqrt[5]{1000} =$

g. $\dfrac{\sqrt[3]{a^4 b^5}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a b^6}} =$

h. $\dfrac{\sqrt[4]{p^5 q^3}}{\sqrt[4]{p^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt[4]{q^5}} =$

¿Qué aprendí hoy?

1 Expresa en forma de raíces y calcula.

a. $64^{\frac{1}{3}} =$

b. $81^{\frac{3}{4}} =$

2 Explica con tus palabras la relación entre las potencias con exponente fraccionario y las raíces enésimas.

3 ¿En qué casos es conveniente usar la notación de potencias con exponente fraccionario?, ¿por qué?

Cuaderno página 17

Tema 3: ¿Qué son los logaritmos?

¿Qué aprenderé?

A comprender qué es un logaritmo y su relación con las potencias y las raíces enésimas.

¿Para qué?

Para representar matemáticamente la relación entre el valor de la potencia y el exponente.

Actividad en pareja

Taller

Observen cómo se puede describir la siguiente relación.

$$4^5 = 1024$$

1024 es la quinta potencia de 4.

La raíz quinta de 1024 es 4.

$$4 = \sqrt[5]{1024}$$

El logaritmo de 1024 en base 4 es 5. Es decir, 5 es el número al cual se eleva 4 para obtener 1024.

$$\log_4(1024) = 5$$

1 En cada caso, describan la relación usando las tres interpretaciones señaladas.

$2^8 = 256$ $\quad 3^{12} = 531\,441$ $\quad 5^6 = 15\,625$

2 Completen la siguiente tabla, siguiendo el ejemplo.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$8^3 = 512$	8	3	$\log_8(512) = 3$
$10^4 = 10\,000$			
	6	-2	
			$\log_9(1) = 0$
$5^{-3} = 0{,}008$			
			$\log_{64}(4) = \frac{1}{3}$

3 Respondan cada pregunta justificando sus respuestas.

a. ¿La base de un logaritmo puede ser negativa?

b. ¿Existe el logaritmo de un número negativo?, ¿y el logaritmo de 0?

c. ¿Cuál es el logaritmo de 1 en base 3?, ¿y en base 7? ¿Depende tu respuesta de la base?

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente

Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente

Grupalmente

Matemática y ciencia

Escalas logarítmicas

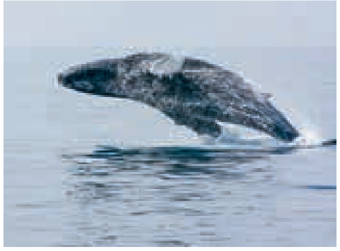
Las escalas logarítmicas son utilizadas en diversos ámbitos, por ejemplo la de magnitud sísmica de Richter para medir la intensidad de los terremotos y la del pH para medidas de acidez y alcalinidad; o bien en unidades de medida, como los decibelios para el sonido o la magnitud estelar para el brillo de las estrellas. Estas escalas son especialmente pertinentes cuando el rango de datos de que se dispone es muy amplio y cuando los datos tienen (o así parece) una conducta exponencial o potencial.

Por ejemplo, si se considera la masa de los seres vivos, existen grandes diferencias entre los más pequeños y los mayores:

- un dragón de Komodo: 90 kg = 90 000 g $\approx 10^{4,96}$ g
- un rotífero (el menor animal pluricelular): 0,00000000603 g $\approx 10^{-8,22}$ g
- una ballena (el mayor de todos los animales): 120 Tm = 120 000 000 g $\approx 10^{8,08}$ g


Rotífero


Dragón de Komodo


Ballena jorobada

Entonces, para mostrar la relación entre sus masas o intentar graficar estos datos con la misma escala, es un problema que existan tales diferencias entre los valores. Una solución para esto es asignar a cada animal un valor, correspondiente al logaritmo (en base 10) de su masa, al que se le llama el "orden de magnitud". De esta manera, el orden de magnitud del rotífero es –8,22, el del dragón de Komodo es 4,96 y el de la ballena, 8,08.

Con estos valores se puede establecer una escala para la masa de los animales que no sea excesiva. El orden de magnitud de cada animal será un número entre –8 y 8 y se puede clasificar como:

- muy pequeños, los animales de órdenes entre –8 y –5
- pequeños, los que están entre –5 y –2
- medianos, los que están entre –2 y 2
- grandes, los que están entre 2 y 5
- muy grandes, los que están entre 5 y 8.

En un rango pequeño, en este caso de –8 a 8, con esta escala se consigue expresar realidades muy diferentes. Las escalas logarítmicas pueden ser muy útiles, pero ¡cuidado!... solo si se entienden bien. Por ejemplo, cuando se dice que la ballena es de orden 8 y la langosta es de orden 4, no significa que la masa de una ballena sea el doble de la masa de la langosta. De hecho, ya que $10^{8-4} = 10^4 = 10\,000$, esto significa es que la ballena tiene 10 000 veces la masa de la langosta.

En resumen

Se llama **logaritmo** de un número en una base dada el número al cual debe elevarse la base para obtener dicho número. Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1, c \in \mathbb{R}$$

Actividades de práctica

1. Aplicando la definición de logaritmo, comprueba si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\log_5(25) = 2$

b. $\log_2(0{,}25) = 0{,}5$

c. $\log_9(-3) = 2$

d. $\log_1(3{,}78) = 0$

e. $\log(2) = 100$

f. $\log(10) = 1$

g. $\log_4(0{,}25) = -2$

h. $\log_{36}(6) = 0{,}5$

i. $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{81}}\right) = -\frac{8}{5}$

j. $\log_{\frac{1}{5}}(125) = -3$

k. $\log(10^5) = 5$

l. $\log_8\left(\sqrt[3]{64}\right) = \frac{3}{2}$

2. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.

a. $9^3 = 729$

b. $5^{-2} = \frac{1}{25}$

c. $0{,}3^2 = 0{,}09$

d. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

e. $0{,}01^{-2} = 10\,000$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

g. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

3. Determina en cada caso el valor de ***a***.

a. $\log_4(2) = a$

b. $\log_a(8) = 3$

c. $\log_a(2048) = 11$

d. $\log_9(a) = 4$

e. $\log_5(0{,}04) = a$

f. $\log_{\frac{1}{81}}(9) = a$

g. $\log_{\frac{1}{64}}(2) = a$

h. $\log_{0{,}2}(a) = -2$

i. $\log_7(a) = 3$

j. $\log_{1000}(a) = -\frac{1}{3}$

Matemática e historia

Rara vez en la historia de la ciencia una idea matemática fue recibida con tanto entusiasmo como los logaritmos. Como dijo Laplace: "Al reducir el trabajo, la invención de los logaritmos duplicó la vida de los astrónomos".

Las tablas publicadas en 1624 por Henry Briggs bajo el título *Arithmetica logarithmica* fueron la base (con pequeñas revisiones) de todas las tablas de logaritmos hasta el siglo XX.

Luego, la regla de cálculo, en sus múltiples variantes, sería la fiel compañera de todo científico e ingeniero por casi 350 años. A principios de la década de 1970, las primeras calculadoras electrónicas portátiles aparecieron en el mercado y en los siguientes diez años la regla de cálculo se volvió obsoleta.

4. Ciencias naturales. Para describir la intensidad del sonido y relacionarla con su magnitud en watts por metro cuadrado (W/m^2) se utilizan los decibeles.
La intensidad en decibeles y la magnitud (I) se relacionan mediante la fórmula

$$dB = 120 + 10 \log(I)$$

a. Analiza las siguientes situaciones y completa la tabla con la magnitud del sonido correspondiente.

Situación	Intensidad del sonido (dB)	Magnitud del sonido (W/m^2)
Pasos en el suelo	10	
Viento en los árboles	20	
Tráfico en hora de congestión	80	
Motocicleta	100	
Despegue de un avión	150	
Explosión	180	

b. Investiga: ¿qué umbrales de sonido, en decibeles, corresponden a un ambiente saludable?, ¿y al comienzo del dolor? Compara con tus compañeros.

c. ¿Cuál es la magnitud del sonido de un equipo de música utilizado en un concierto?, ¿a cuántos decibeles corresponde?

d. Si se sabe que un equipo de sonido tiene una magnitud igual al doble de la de otro, ¿cuál es la diferencia que poseen en intensidad?

- ¿Qué recomendaciones existen para el uso de audífonos para escuchar música? ¿Los usas tú en niveles adecuados para tu salud?

¿Qué aprendí hoy?

Un médico detecta que un paciente requiere mantener los niveles de un medicamento en la sangre. La cantidad C de miligramos que hay presentes en ella va disminuyendo con el tiempo t en horas de acuerdo a la relación

$$\log C = 1 - 0{,}087t$$

a. ¿Cuál es la dosis que se administra del medicamento?

b. ¿Al cabo de cuántas horas quedan 0,5 mg del medicamento?

c. ¿Cuántos miligramos quedan en la sangre 8 horas después?

d. Si el medicamento se administra a las 8 A.M. y no debe bajar de 0,3 mg, ¿a qué hora debe recibir la siguiente dosis?

Ayuda

No todas las calculadoras se usan igual, por lo que es necesario que conozcas cómo ingresar los valores según la operación requerida. Para calcular logaritmos de base 10, esencialmente existen tres formas distintas de digitar los números:

Introducir el número, y luego la tecla **log**.

7 log

Presionar la tecla **log** y luego el valor del cual se quiere calcular.

log 7

Presionar la tecla **log**, luego el valor del cual se quiere calcular y al final la tecla **=** o **EXE**.

log 7 =

log 7 EXE

Si quieres calcular el valor de una expresión compuesta, es fundamental respetar la prioridad de las operaciones. En este sentido, se pueden utilizar los paréntesis que ofrece la calculadora científica, considerando que primero calculará el argumento y luego el logaritmo.

Cuaderno página 19

Tema 4: ¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos?

¿Qué aprenderé?

A conocer y comprender las propiedades de las operaciones con logaritmos.

¿Para qué?

Para aplicarlas de manera eficiente y utilizarlas en ecuaciones que contengan logaritmos.

Y él ¿quién es?

John Napier (1550-1617)

Este matemático escocés fue quien definió los logaritmos, método ideado para simplificar el cálculo numérico con el que se redujeron todas las operaciones a la adición y sustracción. Napier publicó finalmente sus resultados en 1614 con el tratado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, fruto de un estudio de veinte años. También hizo común el uso del punto decimal en las operaciones aritméticas.

Actividad en pareja

Taller

Consideren el valor de las siguientes potencias para resolver los ejercicios:

$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$4^0 = 1$	$6^0 = 1$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$6^1 = 6$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$6^2 = 36$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$6^3 = 216$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$6^4 = 1296$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1024$	$6^5 = 7776$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$	$4^6 = 4096$	$6^6 = 46\,656$

1 Calculen los siguientes logaritmos:

a. $\log_4(4) =$ ______

b. $\log_6(1) =$ ______

c. $\log_3(1) =$ ______

d. $\log_2(2) =$ ______

e. $\log_5(5) =$ ______

f. $\log_4(1) =$ ______

- ¿Qué pueden concluir?

2 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. ______ $\log_6(6 \cdot 36) = \log_6(6) + \log_6(36)$

b. ______ $\log_4(16 \cdot 256) = \log_4(16) \cdot \log_4(256)$

c. ______ $\log_2(8) + \log_2(4) = \log_2(8 \cdot 4)$

d. ______ $\log_3(9 \cdot 81) = \log_3(9) + \log_3(81)$

e. ______ $\log_2(4 + 4) = \log_2(4) + \log_2(4)$

f. ______ $\log_6(1296) + \log_6(36) = \log_6(1296 \cdot 36)$

g. ______ $\log_4(256 \cdot 4) = \log_4(256) + \log_4(4)$

h. ______ $\log_2(8 + 8) = \log_2(8) \cdot \log_2(8)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

3 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. ________ $\log_6(216:36) = \log_6(216) - \log_6(36)$

b. ________ $\log_4(256:4) = \log_4(256) : \log_4(4)$

c. ________ $\log_2(64 - 32) = \log_2(64) : \log_2(32)$

d. ________ $\log_2(32) - \log_2(8) = \log_2(32:8)$

e. ________ $\log_3(729:27) = \log_3(729) - \log_3(27)$

f. ________ $\log_4(1024:4) = \log_4(1024) - \log_4(4)$

g. ________ $\log_2(16 - 8) = \log_2(16) - \log_2(8)$

h. ________ $\log_6(7776) - \log_6(216) = \log_6(7776:216)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

4 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. ________ $\log_6(36^2) = 2 \cdot \log_6 36$

b. ________ $\log_4(4^4) = \log_4(4 \cdot 4)$

c. ________ $\log_2(64) = 3 \cdot \log_2(4)$

d. ________ $2 \cdot \log_3(27) = \log_3(27^2)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Observa cómo se simplifica esta expresión y explica en qué consiste cada paso.

$$\log(121) + 4\log(33) - \log\sqrt[3]{\frac{9}{11}}$$

$= \log(11^2) + 4\log(3 \cdot 11) - \log\left(\frac{3^2}{11}\right)^{\frac{1}{3}}$ ______________________

____

$= 2\log(11) + 4[\log(3) + \log(11)] - \frac{1}{3}[2\log(3) + \log(11)]$ ______________________

____

$= 2\log(11) + 4\log(3) + 4\log(11) - \frac{2}{3}\log(3) - \frac{1}{3}\log(11)$ ______________________

____

$= \frac{17}{3}\log(11) + \frac{10}{3}\log(3)$ ______________________

____

- ¿Podría simplificarse más?, ¿por qué?

____

- Usando $\log(11) \approx 1{,}04$ y $\log(3) \approx 0{,}48$, ¿cuál es el valor de la expresión?

____

2. Analiza cómo se puede descomponer la expresión $\log\left(\frac{p^2 q}{r}\right)$, con $p, q, r, \in \mathbb{R}^+$.

$$\log\left(\frac{p^2 q}{r}\right) = \log(p^2 q) - \log(r) = \log(p^2) + \log(q) - \log(r)$$
$$= 2\log(p) + \log(q) - \log(r)$$

Descompón las siguientes expresiones, con $a, b, c, \in \mathbb{R}^+$.

a. $\log\left(\frac{a^2 b^3}{4}\right) =$

b. $\log\left(\frac{\sqrt{a}}{b c^3}\right) =$

c. $\log\left(\sqrt[4]{a^3 b^3 c^3}\right) =$

3. Analiza cómo se puede componer o reducir la expresión. Considera $p, q \in \mathbb{R}^+$.

$$\log(p^2) + 5\log(q) - \log\left(\sqrt[3]{p^2}\right) + \log\left(\frac{1}{q}\right) = 2\log(p) + 5\log(q) - \frac{2}{3}\log(p) - \log(q)$$
$$= \frac{4}{3}\log(p) + 4\log(q)$$
$$= \log\left(\sqrt[3]{p^4}\right) + \log(q^4)$$
$$= \log\left(\sqrt[3]{p^4} \cdot q^4\right)$$

Reduce las siguientes expresiones:

a. $\log(900) - \log(18) - \log(9) =$

b. $-\log(24) + \frac{1}{2}\log(120) =$

c. $\log(q^3) + \log(p^2) - \frac{3}{4}(\log(q^2) - 5\log(p)) =$

¿Qué dificultades encontraste?, ¿cómo las superaste?

En resumen

En las operaciones con logaritmos se verifican las siguientes propiedades, con $a > 0$ y $a \neq 1$:

- Logaritmo de la base:
$$\log_a(a) = 1$$
- Logaritmo de la unidad:
$$\log_a(1) = 0$$
- Logaritmo de una potencia:
$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x), \text{ con } x > 0, y \in \mathbb{R}$$
- Logaritmo de un producto:
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \text{ con } x > 0, y > 0$$
- Logaritmo de un cociente:
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \text{ con } x > 0, y > 0$$

Actividades de práctica

1. Calcula los siguientes logaritmos, desarrollando cada expresión de modo de utilizar los valores de la tabla y una calculadora con adición, sustracción, multiplicación y división. Observa el ejemplo.

$$\log(6) = \log(2 \cdot 3) = \log(2) + \log(3) \approx 0{,}30 + 0{,}48 \approx 0{,}78$$

$\log(2) \approx 0{,}30$	$\log(11) \approx 1{,}04$
$\log(3) \approx 0{,}48$	$\log(13) \approx 1{,}11$
$\log(5) \approx 0{,}70$	$\log(17) \approx 1{,}23$
$\log(7) \approx 0{,}85$	$\log(19) \approx 1{,}28$

a. $\log(14)$
b. $\log(35)$
c. $\log(57)$
d. $\log(63)$
e. $\log(98)$
f. $\log(120)$
g. $\log(91)$
h. $\log(128)$

2. Verifica si las siguientes igualdades son correctas o no.

a. $\log\left(\frac{3\sqrt{3}}{25}\right) + \log(125) + \log(\sqrt{363}) = \log(5) + \log(99)$

b. $\log\left(\frac{1}{a}\right) + 2\log(a) + \log(\sqrt{a}) = \frac{3}{2}\log(a)$, con $a \in \mathbb{R}^+$

c. $\log\left(\sqrt[4]{x^2 + 2x - 8}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{x+4}{x-2}\right) = \log(\sqrt{x-2})$, con $x > 2$

d. $\log\left(\frac{x\sqrt{x-1}}{x^2-1}\right) + \frac{1}{2}\log(x-1) = \log(x) - \log(x+1)$, con $x > 0$

3. Aplica las propiedades para reducir las siguientes expresiones a un solo logaritmo. Considera $a, b, p, q, r, s \in \mathbb{R}^+$.

a. $\log(5) + \log(8)$

b. $\log(15) + \log(15) - \log(5)$

c. $\frac{1}{2}\log(5) + 3\log(125)$

d. $\log(a^2 + b) - \log(a)$

e. $a\log(p) - 3c\log(q)$

f. $\log(\sqrt{p}) - 4\log(q) + \frac{1}{3}[\log(\sqrt{r}) + 2\log(s)]$

4. La relación entre el área de la superficie corporal a (m^2) de una persona, su masa m (kg) y su estatura h (cm) está dada por la siguiente expresión:
$\log(a) = -2{,}144 + 0{,}425 \log(m) + 0{,}725 \log(h)$.

Usa una calculadora

a. ¿Cuál es el área aproximada del cuerpo de Alex si su masa es de 70 kg y su estatura es 175 cm?

b. Si la masa corporal de Josefa es de 60 kg y su estatura es 1,6 m, ¿cuál es el área de su cuerpo aproximadamente?

c. Determina la estatura aproximada de una persona, si el área de su cuerpo es 2 m^2 y su masa es de 80 kg.

5. **Ciencias naturales.** El nivel de presión del sonido se puede calcular a partir de la expresión:

$N = 20 \log\left(\dfrac{p}{2 \cdot 10^{-4}}\right)$, donde p es la presión del sonido en dinas/cm^2.

a. Si $p = 2 \cdot 10^{-4}$ dinas/cm^2, ¿cuál es el nivel de presión sonora?

b. Si $p = 2 \cdot 10^{-3}$ dinas/cm^2, ¿cuál es el nivel de presión sonora?, ¿a cuántos pascales (Pa) equivale?

Usa 0,1 Pa = 1 dina/cm^2

c. Demuestra que el nivel de presión del sonido se puede expresar como
$N = 20\left(\log\left(\dfrac{p}{2}\right) + 4\right)$.

6. **Ciencias naturales.** La intensidad de la luz que ingresa a un pozo de agua va disminuyendo con la profundidad. Para describir la profundidad a la que se puede percibir un porcentaje p de luz respecto de la inicial se utiliza la siguiente relación:

$$x = -\frac{\log(p)}{0{,}9}$$

Donde x se expresa en metros.

a. Analizando la relación, ¿cómo se expresa p? Explica.

b. Si un buceador percibe un porcentaje de luz igual al 92 % del que se percibe en la superficie, ¿a qué profundidad se encuentra?

c. ¿A qué profundidades, respectivamente, se perciben porcentajes de 80 %, 70 % y 50 %? Utiliza la calculadora y redondea el valor a dos cifras decimales.

¿Qué aprendí hoy?

1 Verifica si la siguiente igualdad es correcta o no.

$$\log\left(\frac{343}{104}\right) + \log\left(\frac{\sqrt{8}}{49}\right) = \log\left(\sqrt{\frac{1}{338}}\right) + \log(7)$$

2 Aplica las propiedades para reducir la siguiente expresión a un solo logaritmo.

$$-\log(24) + \frac{1}{2}\log(120)$$

Cuaderno página 23

Taller de habilidades

Modelar

Emilia publica un *post* en una página de sus redes sociales y observa cómo es visitado por sus amigos y los amigos de ellos a medida que pasa el tiempo.

Minutos	1	2	3	4	5	6
Visitas	3	12	48	192	768	3072

¿En cuánto tiempo alcanzará a tener 768 432 visitas?

PASO 1 Se identifica si existe algún patrón o regularidad:

- Se puede observar que la diferencia entre la cantidad de visitas no es un valor constante.
- Tampoco corresponde a alguna regularidad de potencias conocida.
- Pero al comparar las cantidades de las visitas, se puede ver que hay un patrón multiplicativo entre cada una.

PASO 2 Se determina el valor inicial y el que genera el patrón observado.

$a_1 = 3 = a$

$a_2 = 12 = 3 \cdot 4 = a \cdot p$

$a_3 = 48 = 3 \cdot 4^2 = a \cdot p^2$

$a_4 = 192 = 3 \cdot 4^3 = a \cdot p^3$

$a_5 = 768 = 3 \cdot 4^4 = a \cdot p^4$

$a_6 = 3072 = 3 \cdot 4^5 = a \cdot p^5$

Luego, se puede determinar una expresión general:
$a_n = 3 \cdot 4^{n-1} = a \cdot p^{n-1}$

PASO 3 Ya que a_n es 786 432 y se busca el valor de n, a la expresión obtenida se aplica logaritmos y sus propiedades:

$$a_n = a \cdot p^{n-1}$$

$$\log(a_n) = \log(a \cdot p^{n-1})$$

$$\log(a_n) = \log(a) + (n-1) \cdot \log(p)$$

$$\log(a_n) = \log(a) + n\log(p) - \log(p)$$

$$-n\log(p) = \log(a) - \log(p) - \log(a_n)$$

$$n = \frac{-\log(a) + \log(p) + \log(a_n)}{\log(p)} = \frac{\log\left(\frac{a_n \cdot p}{a}\right)}{\log(p)}$$

PASO 4 Se remplazan los valores y se calcula.

$$\frac{a_n \cdot p}{a} = \frac{786\,432 \cdot 4}{3} = 1\,048\,576 \qquad n = \frac{\log(1\,048\,576)}{\log(4)} = 10$$

PASO 5 Se comprueba el resultado utilizando la expresión determinada antes y se responde en el contexto del problema

$$a_{10} = a \cdot p^{10-1} = 3 \cdot 4^9 = 786\,432$$

En 10 minutos, el *post* publicado por Emilia tendrá 786 432 visitas.

Emilia se entusiasma y publica otro *post* y observa la cantidad de visitas.

Minutos	1	2	3	4	5	6
Visitas	4	20	100	500	2500	125 000

1 ¿Logrará 585 937 500 visitas?, ¿y 976 562 500?, ¿en cuánto tiempo?

2 Lucas publicó una foto y observó que en el primer minuto había 2 visitas, mientras que en el minuto 13 ya había 1 062 882 visitas. Si el patrón entre las cantidades es multiplicativo, ¿por cuál número se multiplican las cantidades?

Cuaderno página 25

Evaluación de proceso

1 Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. ________ La raíz cuadrada de un número es la mitad del número.

b. ________ Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$.

c. ________ La suma de raíces cuadradas es igual a la raíz cuadrada de la suma.

d. ________ Racionalizar es elevar a potencia una raíz.

e. ________ La expresión $\log_a (b)$ se lee como "logaritmo de *a* en base *b*".

f. ________ $\log_1 (6)$ existe y su valor es 6.

g. ________ $\log_7 (-49)$ existe y su valor es -2.

h. ________ Los logaritmos son siempre positivos.

i. ________ $\log_a (x) + \log_b (x) = \log_{ab} (x)$ para todo valor de *x*, siendo *a* y *b* positivos.

2 Determina la media geométrica de los siguientes números.

a. 2, 9 y 12.

b. 5, 8 y 25.

c. 3, 4, 6 y 18.

d. 1, 2, 8, 18 y 27.

3 Calcula el valor de cada una de las siguientes expresiones.

a. $3\sqrt[3]{320} - 2\sqrt[3]{135} =$

b. $\sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{256} + \sqrt[4]{80} =$

c. $\sqrt[3]{-216} + \sqrt[5]{243} + \sqrt[4]{625} =$

d. $\sqrt[5]{64} \cdot \sqrt[5]{96} - \sqrt[5]{192} - \dfrac{\sqrt[4]{24}}{\sqrt[4]{4}} =$

4 Aplica la relación entre las raíces enésimas y las potencias de exponente fraccionario, y otras propiedades, para reducir las siguientes expresiones. Considera ***a***, ***b***, ***p*** $\in \mathbb{R}^+$.

a. $\sqrt[5]{9^3} \cdot \sqrt[3]{5^2} =$

b. $\sqrt{1331} \cdot \sqrt[3]{121} =$

c. $\sqrt[4]{25^5} \cdot \sqrt[5]{5^2} =$

d. $\sqrt[6]{a^7 b^4} \cdot \sqrt[3]{a^{-3} b^2} =$

e. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{p^{-4}}} \cdot \sqrt[4]{p^7} =$

f. $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[3]{16}} =$

5 Un terreno de forma rectangular mide $\sqrt[3]{40}$ kilómetros de ancho y $\sqrt[3]{320}$ kilómetros de largo.

a. ¿Cuál es el área total del terreno?

b. Para cercarlo, Gonzalo estimó que con 10 km de alambrada (de 2 metros de alto) sería suficiente. ¿Le alcanzará?, ¿por qué?

6 Completa la siguiente tabla.

Potencia	Raíz enésima	Logaritmo
		$\log_4(1024) = 5$
$10^3 = 1000$		
	$\sqrt[3]{512} = 8$	
$5^{-4} = 0,0016$		
		$\log_7(1) = 0$
	$\sqrt[5]{243} = 3$	

7 Calcula el valor de cada una de las siguientes expresiones.

a. $\log_4(64) + \log(1000) + \log_5(125) =$

b. $2\log(100\,000) - 2\log_4(256) + 4\log_2(32) =$

c. $2\log_5(25) - 3\log_7(49) + 4\log_8(4096) =$

d. $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right) - \log_{\frac{6}{5}}\left(\frac{125}{216}\right) + \log(10\,000) =$

e. $3\log_{\frac{1}{4}}(32) + 7\log_{\frac{1}{5}}(125) - 6\log_{\frac{1}{3}}(243) =$

f. $4\log_{\frac{5}{7}}\left(\frac{25}{49}\right) + 2\log_{\frac{9}{5}}\left(\frac{81}{25}\right) - 5\log_{\frac{6}{7}}\left(\frac{216}{343}\right) =$

8 Supón que $\log(a) = p$, $\log(b) = q$, $\log(c) = r$. Usando estas equivalencias, representa cada expresión en términos de p, q y r. Considera $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $p, q, r \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) = p - q$

a. $\log\left(\frac{a^2}{c}\right) =$

b. $\log\left(\frac{a^2b^3}{c}\right) =$

c. $\log\left(\frac{1}{b^2}\right) =$

d. $\log\left(\frac{\sqrt{a}}{bc^3}\right) =$

e. $\log\left(\sqrt[4]{a^3b^3c^3}\right) =$

f. $\log\left(a^2\sqrt[4]{\frac{c}{b^3}}\right) =$

9 Calcula los siguientes logaritmos, desarrollando cada expresión de modo de utilizar los valores de la tabla y una calculadora con adición, sustracción, multiplicación y división.

a. $\log(21) \approx$

b. $\log(55) \approx$

c. $\log(51) \approx$

d. $\log(95) \approx$

e. $\log(119) \approx$

f. $\log(121) \approx$

$\log(2) \approx 0{,}30$	$\log(11) \approx 1{,}04$
$\log(3) \approx 0{,}48$	$\log(13) \approx 1{,}11$
$\log(5) \approx 0{,}70$	$\log(17) \approx 1{,}23$
$\log(7) \approx 0{,}85$	$\log(19) \approx 1{,}28$

10 **Ciencias naturales.** Para determinar el diámetro d de un asteroide (en kilómetros), los astrónomos utilizan la expresión: $\log(d) = 3{,}7 - 0{,}2 \cdot g$, donde g corresponde a la magnitud absoluta del asteroide.

a. Determina el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 30.

b. Calcula el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 20. ¿Qué puedes concluir?

c. ¿Cuál es la magnitud absoluta de un asteroide si su diámetro mide 5,8 kilómetros?

Me evalúo

Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😒	😮
Establecí y reconocí las relaciones entre las potencias y las raíces enésimas.	○	○	○
Caractericé las raíces enésimas por medio de potencias de exponente racional, convirtiendo de un tipo de registro al otro.	○	○	○
Apliqué las propiedades relativas a multiplicaciones y divisiones con raíces enésimas.	○	○	○
Calculé logaritmos y comprendí su relación con las potencias y las raíces enésimas.	○	○	○
Comprendí y apliqué las propiedades relativas a operaciones con logaritmos.	○	○	○
Resolví problemas rutinarios y no rutinarios que involucran raíces enésimas y logaritmos.	○	○	○
Evalué el proceso y comprobé resultados y soluciones dadas de un problema matemático.	○	○	○
Trabajé en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.	○	○	○

Cuaderno página 26

Reviso mis metas y estrategias

1 Considera las estrategias que escribiste en la página 15: ¿las cumpliste?, ¿por qué?

____

____

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

____

____

LA AGUJA DE BUFFON

CONSTRUCCIÓN

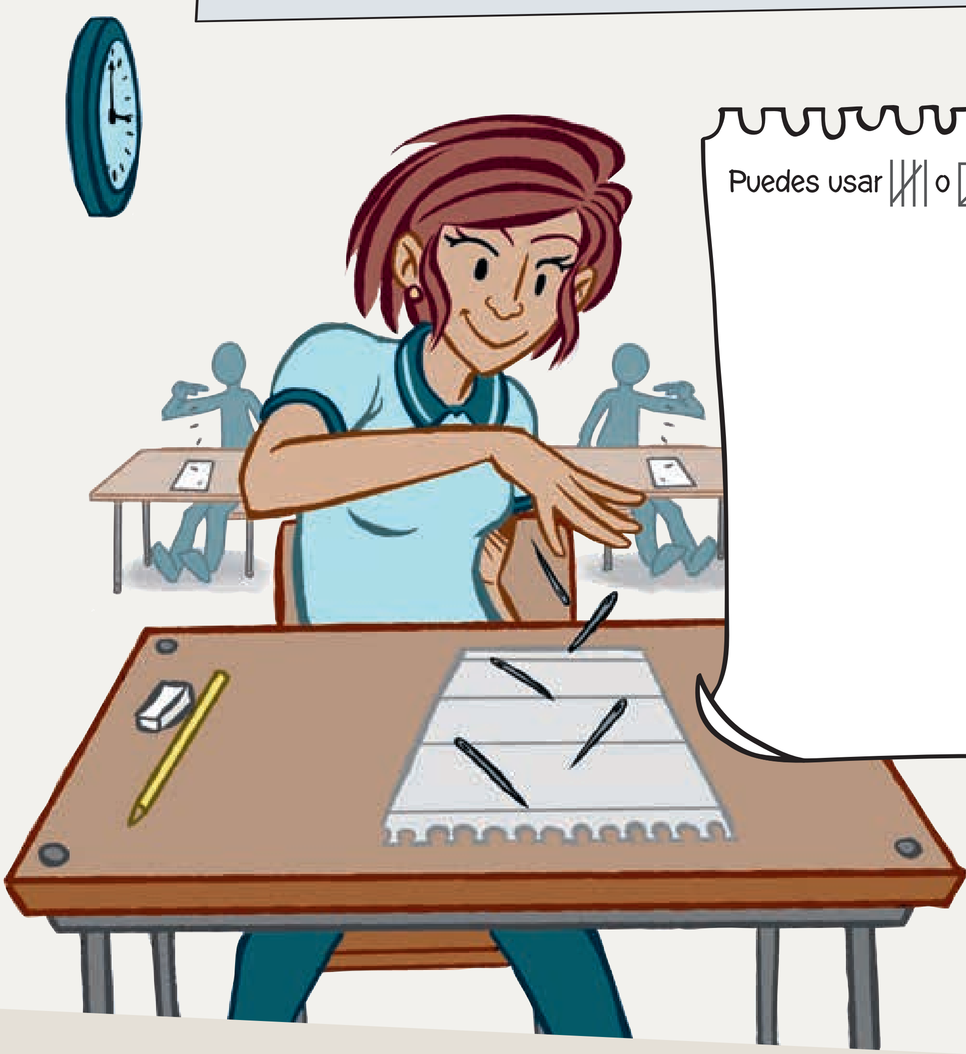
- Mide el tamaño de la aguja.
- Utilizando esa medida como distancia, traza rectas paralelas en la hoja (y paralelas a los bordes de la hoja).

¿CÓMO SE USA?

- Lanza al azar la aguja sobre la hoja.
- Registra el número de lanzamientos (*N*) y el número de cortes (*C*), es decir, la cantidad de veces en las que la aguja cruza alguna de las rectas dibujadas.

Materiales

- ✓ Una hoja de papel o cartulina.
- ✓ Regla.
- ✓ Una aguja (un mondadiente o un objeto similar).



Puedes usar ~~||||~~ o ☐ para contar más fácil después.

INSTRUCCIÓN

1 Cuando ya tengas suficientes lanzamientos (al menos 100), cuenta el valor total

$N =$ ☐ $C =$ ☐

2 Calcula el valor de la expresión $\frac{2N}{C} =$ ☐

3 Ahora pregunta sus resultados a 10 de tus compañeros y anótalos.

N										
C										

4 Suma todos los valores y calcula:

Total $N =$ ☐ Total $C =$ ☐

$\frac{2N}{C} =$ ☐

5 ¿A qué número se acerca el valor de esta expresión? ☐

6 Agrega los resultados de otros compañeros y vuelve a calcular.

N										
C										

Total $N =$ ☐ Total $C =$ ☐

$\frac{2N}{C} =$ ☐

7 ¿Cuántos lanzamientos fue necesario considerar para que este número tuviera una aproximación correcta a la décima?, ¿y a la centésima?

Y él ¿quién es?

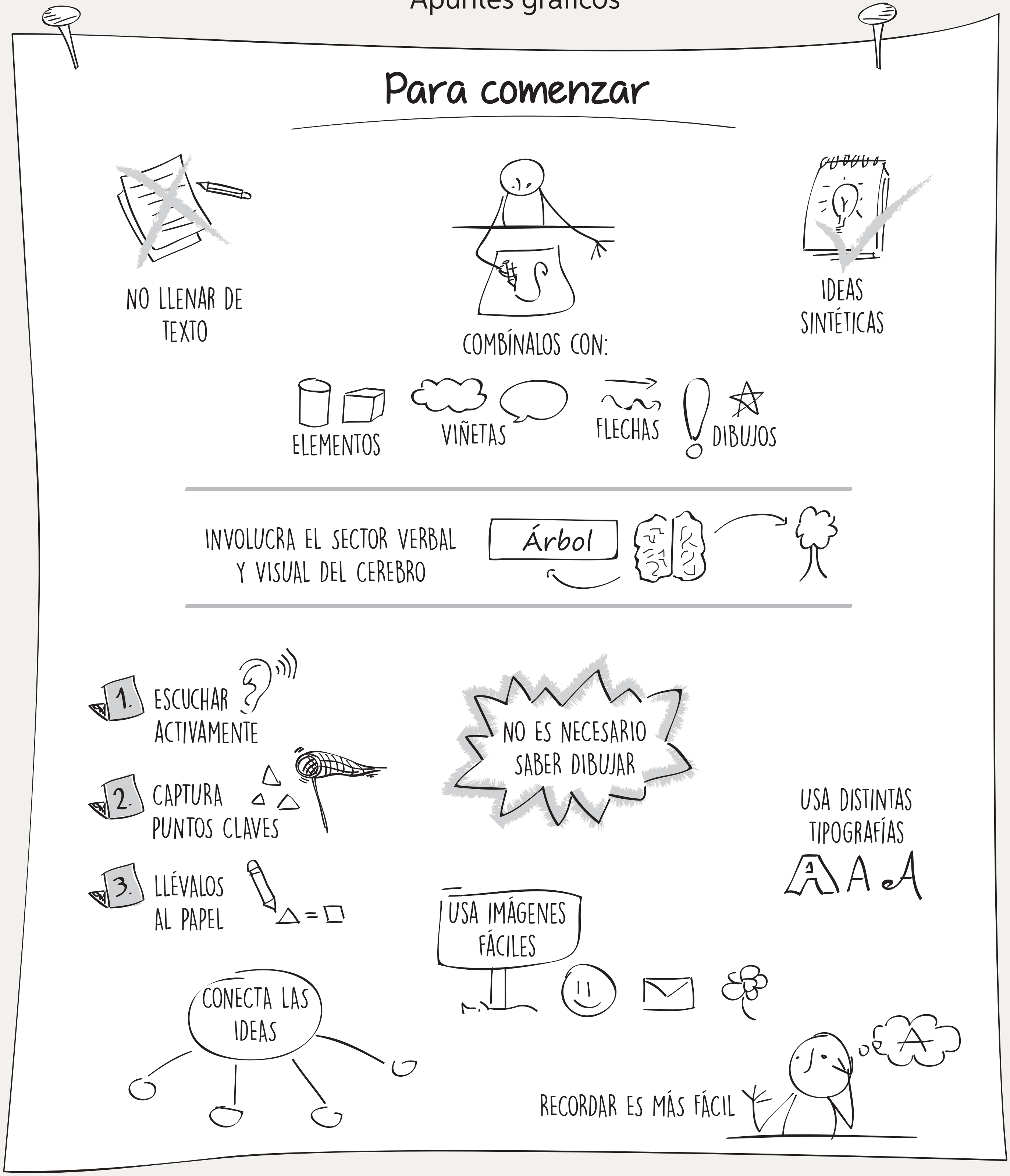
Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1707 - 1788)

Fue un naturalista, botánico, matemático, biólogo, cosmólogo y escritor francés. Intentó realizar un compendio de todo el saber sobre el mundo natural. Sus ideas influyeron sobre las siguientes generaciones de naturalistas, como Lamarck, Cuvier y Darwin. En matemática, es recordado por su teoría de la probabilidad y el problema clásico de la aguja de Buffon, planteado en 1733 y reproducido por él mismo ya resuelto en 1757.

Cuaderno página 28

APRENDER CON MONOS

Apuntes gráficos



Apuntes gráficos con números reales

Ahora es mi turno de dibujar

Temas para practicar los apuntes gráficos:

- ¿Cómo te presentarías?
- ¿Cuáles son tus propósitos para este año?

Uso apuntes gráficos para mostrar lo que sé:

- El concepto de número en general.
- Las lecciones de la unidad de Números.

Cuaderno página 30

- ¿Demostré curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en mis propias capacidades?
- Al trabajar en equipo, ¿consideré y respeté los aportes de todos?, ¿estuve dispuesto a entender sus argumentos?

¿Qué aprendí?

Evaluación final

1 Identifica si cada número pertenece ($\in$) o no pertenece ($\notin$) al conjunto dado.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
-1024				
$2,71828$				
$\sqrt{125}$				
$\sqrt{81}$				
$-\sqrt{54}$				
$\sqrt[3]{-512}$				

2 Resuelve las operaciones y clasifica los números en racionales o irracionales.

a. $\dfrac{\sqrt{16}-\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

b. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

c. $\dfrac{(\sqrt{3})^2+2}{2}$

3 Dados los números ***a*** y ***b***, determina en cada caso un número racional ***c*** y uno irracional ***d***, de modo que $a < c < d < b$.

a. $a = \sqrt{3}$ y $b = \sqrt{6}$

b. $a = \sqrt{10}$ y $b = \sqrt{12}$

c. $a = 2\sqrt{5}$ y $b = \sqrt{21}$

d. $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $b = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

e. $a = 6,93$ y $b = 7,1$

f. $a = 3\sqrt{11}$ y $b = 10$

4 Determina una aproximación de los siguientes números, aplicando el método de aproximación por acotación sucesiva.

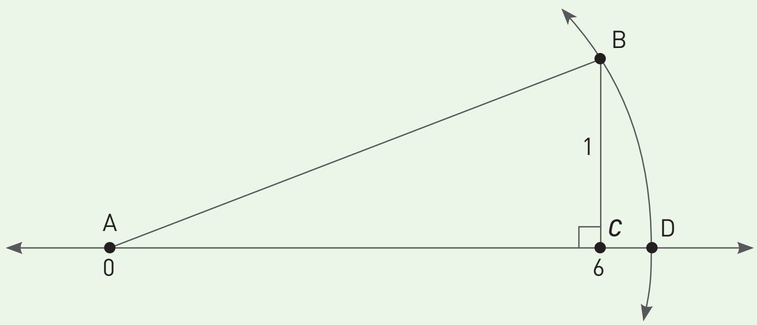
a. $\sqrt{12}$

b. $\sqrt{48}$

c. $\sqrt{105}$

d. $\sqrt{216}$

5 ¿Cuál es el número que está representado por D en la recta numérica?



6 Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu decisión.

a. __________ La multiplicación de un número irracional por sí mismo es siempre un número racional.

b. __________ Solo se puede racionalizar una fracción si su denominador tiene una raíz cuadrada.

c. __________ Para todo n, a y b en $\mathbb{N}$, se cumple que $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a + b}$.

d. __________ La raíz cuadrada de la raíz cuadrada de un número positivo es la raíz cuarta del mismo número.

e. __________ La raíz cúbica de un número negativo es un número negativo.

7 Se sabe que p es un número racional distinto de cero mientras que q es un número irracional. Determina cuál o cuáles de las siguientes operaciones da siempre como resultado un número irracional. Justifica.

a. $(p + q)(p - q)$

b. p^2q

c. pq^2

8 Descompón las siguientes raíces cuadradas.

a. $\sqrt{75} =$

b. $\sqrt{18} =$

c. $\sqrt{98} =$

d. $\sqrt{162} =$

9 Racionaliza las siguientes expresiones.

a. $\frac{1}{\sqrt{13}} =$

b. $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} =$

c. $\frac{2}{\sqrt[4]{4}} =$

d. $\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} =$

e. $\frac{8}{\sqrt{15} - \sqrt{10}} =$

f. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} =$

10 ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya arista mide $\sqrt[3]{5}$ cm?

11 Calcula el perímetro de un triángulo cuyos lados miden $\sqrt{75}$, $\sqrt{100}$ y $\sqrt{125}$ metros.

12 Un rectángulo mide $\sqrt[3]{24}$ metros de largo y $\sqrt[3]{375}$ metros de ancho.

a. ¿Cuál es su perímetro?

b. ¿Cuál es su área?

13 Sabiendo que el piso de la terraza de un hotel se encuentra a 210 cm sobre el nivel de la superficie del suelo en que fue construido, Carlos debe diseñar una escalinata de acceso hacia la terraza. Si la distancia en el suelo entre el primer peldaño y la posición de la terraza es de 480 cm, ¿cuál será la distancia entre el punto más bajo y el más alto de la escalinata?

14 Las aristas de un paralelepípedo miden $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{6}$ cm y $\sqrt{10}$ cm. ¿Cuál es su volumen?

15 La tercera ley de Kepler relaciona el período de traslación t de un planeta (en años terrestres) con su distancia d al Sol —medida en unidades astronómicas (UA)—, mediante la fórmula $t = \sqrt{d^3}$.

¿Cuál es el período de traslación de un planeta cuya distancia al Sol es de 10 UA?

16 Expresa en forma de raíces las siguientes potencias.

a. $9^{\frac{1}{4}} =$

b. $12^{\frac{1}{5}} =$

c. $27^{\frac{2}{5}} =$

d. $x^{\frac{3}{4}} =$

e. $p^{\frac{2}{7}} =$

f. $81^{\frac{2}{n}} =$

17 Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu decisión.

a. ________ El valor del logaritmo cuya base es igual al argumento es siempre igual a 1.

b. ________ La base de un logaritmo es un número real positivo.

c. ________ Dos logaritmos de igual base son iguales si y solo si sus argumentos son iguales.

d. ________ $\log_{(-3)}(81)$ existe y su valor es 4.

e. ________ $\log_5(\sqrt{125})$ existe y su valor es $\frac{3}{2}$.

f. ________ Los logaritmos están definidos para bases positivas.

18 Sea $\log 9 \approx 0{,}95424$, ¿cuál o cuáles de las siguientes igualdades son correctas?

a. $\log\left(\sqrt[3]{9}\right) \approx 0{,}31808$

b. $\log(900) \approx 2{,}95424$

c. $\log(81) \approx 1{,}90848$

19 Determina cuál o cuáles de las siguientes igualdades son falsas. Justifica las falsas. Considera $a, b \in \mathbb{R}^+$.

a. $\log_2(16) = 8$

b. $\log(1000) = 2$

c. $\log(0{,}1) = 1$

d. $\frac{4}{3}\log(a) - \frac{7}{2}\log(b) = \log\left(\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{b^7}}\right)$

e. $\log\left(\sqrt[6]{a} \cdot 2b\right) = 6\log(a) + 2\log(b)$

f. $\log_2\left(\frac{32}{64}\right) = -1$

20 Aplica las propiedades para reducir las siguientes expresiones a un solo logaritmo. Considera $a, b, p, q \in \mathbb{R}^+$.

a. $\log(900) - \log(18) - \log(9) =$

b. $\log(24) - \log\left(\sqrt[4]{6}\right) =$

c. $\frac{2}{3}\log(4) - 5\log(2) =$

d. $2\log(a) + 5\log(b) =$

e. $\log(q^3) + \log(p^2) - \frac{3}{4}\left(\log(q^2) - 5\log(p)\right) =$

21 **Ciencias naturales.** El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una sustancia. Se mide de acuerdo con la concentración de moles de hidrógeno utilizando la fórmula:

$$pH = -\log[H^+]$$

Donde $[H^+]$ corresponde a la concentración de iones de hidrógeno, medida en moles por litro.

a. Calcula el pH de una sustancia cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro.

b. En algunos lugares muy contaminados se produce el fenómeno llamado "lluvia ácida". Calcula la concentración de iones de hidrógeno de una lluvia ácida cuyo pH es 2,8.

c. Calcula la concentración de iones de hidrógeno de las siguientes sustancias, conociendo su pH aproximado.

Sustancia	pH
Vinagre	2,9
Jugo gástrico	1,5
Jugo de naranja	4,5
Orina	6,5
Jabón de manos	9,5

d. El pH del jugo de un tipo de limón es 2,5. Por otro lado, la concentración de iones de hidrógeno de un producto químico es cuatro veces mayor que la del limón. ¿El pH de ese producto es mayor o menor que el del limón?, ¿cuántas veces?

22 Considera la siguiente secuencia de números:

$$5 - 15 - 45 - 135 - 405...$$

Se puede observar que el primer término es 5, y para obtener el siguiente término se multiplica por 3. Si se sabe que el número 1 937 102 445 pertenece a esta secuencia, ¿en qué posición está?

23 $\log(P) = \dfrac{20 + t \cdot \log(2)}{10}$ es la expresión que relaciona la población P de insectos en una bodega luego de pasar t horas cerrada.

a. ¿Cuántos insectos había en el instante en que se cerró?

b. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la población de insectos se cuadruplique?

24 El área A de una herida superficial, luego de t horas de cicatrización, se puede modelar con $\log(A_0) - \log(A) = \dfrac{35t}{1000} \cdot \log(3)$, donde A_0 es el área original de la herida.

a. Según esto, ¿cuánto tarda en cicatrizar la tercera parte de una herida?

b. Si una persona tiene una herida de $9\,cm^2$, ¿cuánto tiempo tarda en reducirse a $1\,cm^2$?

Me evalúo

Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😐	😕
Reconocí los números irracionales y los representé como puntos sobre la recta numérica real.	◯	◯	◯
Estimé y aproximé números irracionales.	◯	◯	◯
Utilicé la descomposición de raíces cuadradas y sus propiedades.	◯	◯	◯
Resolví problemas que involucren números racionales e irracionales en diferentes contextos.	◯	◯	◯
Reconocí las raíces enésimas y comprendí su relación con las potencias de exponente racional.	◯	◯	◯
Calculé logaritmos y comprendí su relación con las potencias y las raíces enésimas.	◯	◯	◯
Comprendí y apliqué las propiedades relativas a operaciones con logaritmos.	◯	◯	◯
Resolví problemas rutinarios y no rutinarios que involucran raíces enésimas y logaritmos.	◯	◯	◯
Resolví problemas utilizando estrategias como simplificar el problema y estimar el resultado; y descomponer el problema en subproblemas más sencillos.	◯	◯	◯
Demostré interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.	◯	◯	◯

Cuaderno página 32

Reviso mis metas y estrategias

1 Lee nuevamente las preguntas de las páginas 12 y 13: ¿cómo las responderías ahora?

____

____

2 Considera las metas personales que escribiste en la página 15: ¿las cumpliste?, ¿por qué?

____

____

3 Ahora que terminaste la unidad, ¿qué habilidades consideras relevantes para estudiar números?

____

____

4 ¿Y qué actitudes?

____

____

UNIDAD 2

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

La física y otras ciencias naturales se benefician de las herramientas del álgebra, ya que pueden modelar fenómenos de la naturaleza usando las funciones algebraicas, con las que se relacionan las distintas magnitudes involucradas.
Al modelar estos fenómenos, no solo es posible confirmar los datos ya observados sino también predecir qué puede ocurrir cuando alguna de las condiciones iniciales cambien.

Activo mis ideas

1. Cuando se compara un bosque nativo con una plantación forestal, ¿cuál crees que crece más rápido?, ¿por qué?
2. La duración del vaivén de un columpio, ¿depende del largo de sus cadenas o cuerdas o solo de la fuerza que se aplique?
3. ¿Reconoces la curva formada por el agua?, ¿siempre se produce así?, ¿de qué depende?
4. ¿Por qué el teléfono celular muestra dos valores de temperatura?, ¿a qué se refiere?

¿Cómo se calcula el interés de un préstamo bancario?, ¿es siempre igual?

¿Cuáles son las ecuaciones de segundo grado?, ¿siempre tienen solución?

¿Qué sabes de la parábola?, ¿en qué ámbitos se puede aplicar?

¿Conoces alguna función inversa?, ¿cómo la definirías?

Mis metas y estrategias

¿Qué aprenderé?

Sobre el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo.

Sobre las ecuaciones cuadráticas y cuándo tienen solución.

Sobre la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y sus aplicaciones.

Sobre cuándo una función tiene función inversa y cómo se interpreta.

¿Para qué me servirá?

Para comprender expresiones como el interés simple y el interés compuesto, que se aplican al solicitar créditos bancarios.

Para resolver problemas geométricos, de las ciencias naturales y sociales.

Para modelar situaciones de cambio cuadrático de la vida cotidiana y de las ciencias.

Para reconocer y aplicar las características de una función y su función inversa.

¿Cómo lo voy a aprender?

Las actividades de esta unidad se situarán en contextos relacionados con las ciencias naturales, ya que el uso del álgebra permite modelar fenómenos tan diversos como el crecimiento de un bosque, el movimiento de objetos en caída libre o el vaivén de un columpio.

¿Qué actitudes crees que son necesarias para aprender geometría?

- Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general o propios de otras asignaturas
- Demostrar curiosidad, interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.
-

¿Qué habilidades consideras relevantes para estudiar álgebra?

Modelar

- Seleccionar modelos e identificar cuándo dos variables dependen cuadráticamente o inversamente en un intervalo de valores.
- Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad.
- Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.

Representar

- Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando la validez de estas y sus limitaciones.
- Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones.
- Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos.
-

¿Qué te gustaría aprender?

Mis motivaciones

¿Qué te interesa aprender en esta unidad?

Mis estrategias

¿Qué estrategias o procedimientos consideras adecuadas para lograr tus metas?

¿Cómo las cumpliré?

¿Cuáles son tus metas personales para esta unidad?

Mis recursos

¿Qué fortalezas y debilidades consideras que tienes para aplicar tales estrategias?

Lección 3

Cambio porcentual

Exploro

¿Qué entiendes por cambio porcentual? Escribe al menos dos ideas.

¿Qué conoces sobre el porcentaje?, ¿cómo puede expresarse? Explica.

Aprenderé a:

Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo:

- Identificándolo con el interés compuesto.
- Representándolo en forma recursiva $f(t + 1) - f(t) = a \cdot f(t)$.
- Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Necesito recordar...

- Potencias de base decimal y exponente natural.
- Multiplicación de números decimales.
- Porcentaje.

¿Qué debo saber?

1. Calcula cada potencia. Luego, responde.

$(0,5)^2 =$	$(1,5)^2 =$
$(0,5)^3 =$	$(1,5)^3 =$
$(0,5)^4 =$	$(1,5)^4 =$
$(0,5)^5 =$	$(1,5)^5 =$

¿Qué regularidad observas en los resultados anteriores?

2. Resuelve.

a. $(1 + 0,2)^3 =$

b. $(1 + 0,5)^3$

c. $(1 + 0,8)^2 =$

d. $(1 + 0,7)^5 =$

e. $(0,75)^3 =$

f. $(0,33)^2 =$

g. $(0,21)^4 =$

h. $(0,65)^2 =$

i. $(0,94)^2 =$

3. Calcula los porcentajes según corresponda.
   a. ¿Cuál es el 10 % de 120?
   b. ¿Cuál es el 20 % de 8000?
   c. ¿Cuál es el 25 % de 15 000?
   d. ¿Cuál es el 50 % de 22 500?
   e. ¿Cuál es el 75 % de 350 000?
   f. ¿Cuál es el 2 % del 5 % de 400?
   g. ¿De qué número 12 es el 25 %?
   h. ¿Qué porcentaje es 75 de 600?
   i. ¿Qué porcentaje es 30 del 50 % de 9000?

4. Resuelve los siguientes problemas.
   a. En una librería, durante el mes de marzo, el precio del libro *Paisajes de Chile* era de $ 14 990. Luego, en julio, el precio del mismo era de $ 19 990. ¿En qué porcentaje subió el precio del libro?
   b. Si el precio original de un producto es $ 50 000 y aumenta en un 10 %, ¿cuál es el valor final?
   c. Si se disminuye en 25 % un monto de $ 440 000, ¿cuál es el monto final?
   d. Luego de una dieta, Alexis bajó el 4,5 % de su índice de grasa corporal (IMC). Si inicialmente este era de 32,4 kg/m^2, ¿a cuánto disminuyó su IMC?
   e. En una familia, se destina el 25 % del ingreso a la educación de los hijos y el resto para todos los demás gastos. Si reciben mensualmente $ 550 000, ¿cuánto dinero les queda para cubrir los demás gastos?
   f. Si a comienzos de año Miguel tenía una masa corporal de 84 kilogramos y en el mes de septiembre esta era de 75 kilogramos, ¿de cuánto fue su cambio porcentual?
   g. Adriana cambió su plan de celular. Si este bajó de $ 24 990 a $ 18 990, ¿cuál fue la variación porcentual?
   h. El fisco recauda el IVA (impuesto al valor agregado) de todas las compras que se realizan, que corresponde al 19 % del valor. Si un libro tiene un valor de $ 9000, sin IVA, ¿cuál será su valor final?

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😏	😮
Calculé operaciones con potencias de base decimal y exponente natural y apliqué sus propiedades.	○	○	○
Calculé operaciones con porcentajes.	○	○	○
Apliqué porcentajes a la resolución de problemas de la vida cotidiana.	○	○	○
Usé modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones para resolver problemas de la vida diaria.	○	○	○
Abordé de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria y de la sociedad en general.	○	○	○

Cuaderno página 37

Tema 1: ¿Qué se entiende por cambio porcentual?

¿Qué aprenderé?

A comprender y explicar el cambio conceptual aplicado a situaciones cotidianas.

¿Para qué?

Para resolver problemas de crecimiento o decrecimiento porcentual que se observan a medida que pasa el tiempo.

Glosario

Índice de variación (Iv): se asocia a cada cambio porcentual y corresponde al factor por el cual se multiplica una cantidad inicial para aplicarle el cambio.

¿Cómo trabajé el taller?	Individualmente	Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	Individualmente	Grupalmente

Actividad en pareja

Taller

1 Observen la siguiente tabla:

Altura de un árbol nativo					
Año	2013	2014	2015	2016	2017
Altura (m)	2	2,4	2,88	3,456	4,1472

Considerando los t años transcurridos desde el 2012 (esto es, al año 2013 le corresponde t = 1) y definiendo la función f que asocia a cada uno de estos años con la altura h del árbol, se tiene la tabla:

$f(t) = h$					
t (años)	1	2	3	4	5
h (m)	2	2,4	2,88	3,456	4,1472

a. ¿Pueden observan un cambio constante a medida que pasan los años?

b. Determinen el valor constante que relaciona la altura en los años sucesivos.

- $f(2) = \boxed{} \cdot f(1) \leftrightarrow 2{,}4 = \boxed{} \cdot 2$
- $f(3) = \boxed{} \cdot f(2) \leftrightarrow 2{,}88 = \boxed{} \cdot 2{,}4$
- $f(4) = \boxed{} \cdot f(3) \leftrightarrow 3{,}456 = \boxed{} \cdot 2{,}88$
- $f(5) = \boxed{} \cdot f(4) \leftrightarrow 4{,}1472 = \boxed{} \cdot 3{,}456$

c. ¿Cómo se expresa algebraicamente este cambio constante? Explica.

d. ¿Cuál es el **índice de variación**? $\boxed{}$

2 Grafiquen los valores de la tabla. Luego, respondan:

a. ¿Cómo podrían describir la gráfica?

b. Si se mantuviera el cambio constante, ¿qué altura se espera que alcance este árbol durante 2018? $\boxed{}$

Actividades de proceso

1. Completa la tabla según la información dada.

Enunciado	Iv	Cambio porcentual
Una fotografía se reduce en un 30 %.		
La obesidad en un país aumenta en un 2,8 % al año.		
El precio de una entrada al cine disminuye en un 15 %.		
La cantidad de insectos bajó en un 4,5 %.		
Las ventas bajaron en una cuarta parte.		
Los turistas aumentaron en una décima parte.		

2. Identifica la ecuación del cambio porcentual.

Proyección del dióxido de carbono en el aire a nivel mundial					
Año	2013	2014	2015	2016	2017
Concentración (ppm)	400,0	402,4	404,8	407,2	409,6

Considerando la función h, que asocia a cada período de tiempo t (desde $t = 1$ para el año 2013) la concentración c de dióxido de carbono, se tiene la tabla:

$h(t) = c$					
t (años)	1	2	3	4	5
c (ppm)	400,0	402,4	404,8	407,2	409,6

a. Se puede observar un cambio porcentual constante, ya que:

b. Por lo tanto, la ecuación del cambio porcentual para este fenómeno es:

En resumen

El **cambio porcentua**l es la variación dado un porcentaje de cambio que sufre un número o cantidad inicial, sea que aumente o disminuya, y que puede asociarse a períodos de tiempo.

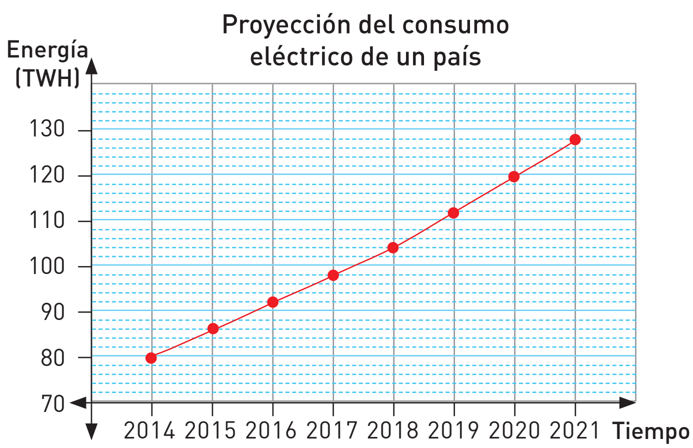
Un fenómeno que involucre un cambio porcentual constante de una cantidad entre dos períodos consecutivos, t y $t + 1$, se puede modelar con la ecuación:

$$f(t + 1) = Iv \cdot f(t)$$

Donde $f(t)$ es la cantidad en el período t; $f(t + 1)$, la del período $t + 1$; mientras que Iv es el índice de variación.

Actividades de práctica

1. El índice de variación de las precipitaciones entre junio y julio fue de 1,15.
   a. ¿Cuál fue el cambio porcentual entre esos meses?
   b. ¿Entre esos meses, se produjo un aumento o una disminución de las precipitaciones?
2. La tala de árboles en cierta región disminuyó un 12 % entre 2010 y 2015.
   a. ¿Cuál fue el cambio porcentual?, ¿fue positivo o negativo?
   b. ¿Cuál fue el índice de variación experimentado en ese período?
3. Determina la ecuación del cambio porcentual asociada a cada situación. Explica.
   a. Las ventas de una tienda crecen un 5 % mensualmente.
   b. El volumen de un glaciar se reduce un 8,9 % cada 10 años.
   c. La deuda externa de cierto país tiene un índice de variación de 1,09 anual.
   d. La población de roedores aumenta en una centésima parte cada mes.
4. Completa la tabla, redondeando los valores, y responde.



Tiempo (año)	Energía (TWh)
2014	80
2015	85,6
2016	
2017	
2018	
2019	
2020	
2021	

   a. ¿El consumo de energía eléctrica aumentará o disminuirá en ese país?, ¿cuál es el índice de variación?
   b. ¿Cuál es la ecuación del cambio porcentual asociada a la situación?
5. Una ciudad de 450 000 habitantes tiene una tasa de crecimiento anual del 2 % desde el año 2003.
   a. ¿Cuál es la ecuación del cambio porcentual que modela la situación?
   b. ¿Se podría saber la cantidad de habitantes en cualquier año conociendo solo la población actual y su tasa de crecimiento? Explica.

6. Analiza y comenta con un compañero o compañera.

   a. ¿Qué características debe tener un gráfico que represente una situación de crecimiento porcentual?

   b. Considerando una situación de decrecimiento porcentual, ¿qué características debe tener su gráfica?

   c. Menciona las diferencias entre el gráfico que representa una situación de crecimiento porcentual y el gráfico de decrecimiento porcentual.

   Analiza la siguiente información. Luego, resuelve las actividades.

> Ciertas poblaciones crecen anualmente en un porcentaje constante de la población actual. Este crecimiento se puede analizar con el modelo:
>
> $$P_n = P_0 \cdot (1 + r)^n$$
>
> Llamado modelo geométrico de crecimiento, donde P_n es la población estimada para el período n; P_0, la población actual y r, una constante de crecimiento geométrico.

7. La población de San Juan ha crecido geométricamente con constante 0,0201 desde 1998, cuando tenía 21 091 habitantes.

   a. Con esas condiciones, ¿qué población se estima para 2024?

   b. ¿Después de qué año la población de San Juan se podría duplicar?

8. Un bosque de árboles tiene un volumen de madera aproximado en 100 000 m^3 para el año 2015 y se estima un crecimiento anual del volumen de madera en un 3 %.

   a. ¿Cuál es la ecuación que modela este crecimiento?

   b. ¿En qué año el volumen de madera se duplicará?

¿Qué aprendí hoy?

Observa la tabla y verifica que la situación corresponde a un fenómeno de cambio porcentual constante.

Cantidad de agua extraída por una máquina desde un pozo						
Mes	marzo	abril	mayo	junio	julio	agosto
Volumen (m^3)	2000	2040	2080,8	2122,42	2164,86	2208,16

1. Si la máquina siguiera trabajando bajo las mismas condiciones hasta noviembre, ¿cuánta agua extraería dicho mes?

2. ¿Se podría responder la pregunta anterior conociendo solo los datos de marzo y abril? Justifica.

Cuaderno página 38

Tema 2: ¿Cómo se aplica el interés compuesto?

¿Qué aprenderé?

A comprender y diferenciar los conceptos de interés simple y compuesto.

¿Para qué?

Para discernir entre ofertas de ahorro o de crédito que involucran interés simple o compuesto.

Actividad en pareja

Taller

Las instituciones financieras ofrecen diversas oportunidades para ahorrar dinero. Las que ofrecen los bancos KDT y TyT corresponden a cuentas de ahorro básicas, en las que se generan intereses cada cierto tiempo. Pedro se encuentra evaluando la mejor opción para su ahorro. Él dispone de $ 1 000 000 para depositar inicialmente, y quisiera retirar su dinero al término de un año.

1 Observen los siguientes avisos publicitarios y respondan sin calcular. Solo analicen la publicidad de cada banco.

Banco KDT

Ahorra tu dinero con nosotros.
Cada 6 meses, te damos un 0,42 % de interés del dinero que tienes depositado.

Costo de mantención de $1000 anual.

Banco TyT

Si quieres ahorrar tu dinero, ven a nuestra casa financiera.

Te daremos un 0,8 % de interés anual.

Sin costo de mantención.

a. ¿Qué banco le recomendarían a Pedro?, ¿por qué?

b. ¿Qué opinan de la siguiente afirmación?:
"El interés que otorga el banco TyT es casi el doble que el del Banco KDT, por lo tanto, le entregaría a Pedro el doble de ganancia".
¿Está en lo correcto?

2 Completen la siguiente tabla con los datos de los avisos.

	Banco KDT	Banco TyT
Interés entregado		
Período de tiempo		
Cobro de mantención		

3 Calculen el monto ahorrado que podría obtener Pedro de la cuenta del banco KDT.

4 Considerando el banco TyT, ¿cuál es el monto final que podría retirar Pedro?

5 ¿Qué banco le recomendarían a Pedro?, ¿por qué? ¿Cambió esta recomendación respecto de la que hicieron inicialmente? Expliquen.

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente

Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente

Grupalmente

Actividades de proceso

1. Isidora planifica viajar a Tokio para los próximos Juegos Olímpicos. Para eso se propone ahorrar dinero durante dos años, y decide depositar una parte en una institución financiera, la cual le ofrece 1,5 % de interés cada 4 meses, de forma acumulativa.

PASO 1 Analiza y completa.

a. Si Isidora deposita ahora la cantidad de $ 250 000, ¿cómo podría calcular el monto (en pesos) del interés que ganaría en los primeros 4 meses? Explica.

____

b. ¿Qué cálculo debiera realizar Isidora para obtener el monto total que tendría al cabo de 4 meses?

____

c. El resultado obtenido para el interés, ¿a qué expresión es equivalente?

$250\,000 \cdot 0{,}015$ $\qquad$ $250\,000 \cdot 1{,}5$

d. La expresión obtenida para el cálculo del monto, ¿a qué expresión es equivalente?

$250\,000 \cdot 1{,}015$ $\qquad$ $250\,000 \cdot 1{,}15$

PASO 2 Completa la siguiente tabla con los montos obtenidos según pasa el tiempo.

Períodos de tiempo	Monto acumulativo de cada período
4 meses	250 000 • 1,015 = ________
8 meses	________ • 1,015 = ________
12 meses	________ • 1,015 = ________
16 meses	________ • 1,015 = ________
20 meses	________ • 1,015 = ________
24 meses	________ • 1,015 = ________

a. ¿Cuántos períodos de tiempo (de 4 meses) hay durante los 2 años?

____

b. La expresión obtenida para el cálculo del **monto final**, ¿a qué expresión es equivalente?

$250\,000 \cdot (1{,}015)^6$ $\qquad$ $250\,000 \cdot (1{,}15)^6$

c. ¿Qué expresión matemática te permite obtener el monto final (*MF*) de un capital inicial (*CI*) a un determinado interés(*r*) y en un cierto período de tiempo(*n*)?

____

Luego, Isidora tiene un monto de $ ________________ al finalizar los dos años de ahorro.

Glosario

Interés: diferencia entre el capital final y el capital inicial, de acuerdo a una determinada tasa.

Interés simple: las ganancias generadas por un capital inicial (ahorrado o prestado) por alguna institución no se agregan al capital inicial para el siguiente período.

Interés compuesto: las ganancias generadas se suman al capital inicial, de modo que en el siguiente período el interés se aplica al monto final.

Tasa de interés: porcentaje en el que varía un capital en un determinado período de tiempo.

2. Francisco desea depositar la cantidad de $2 500 000 y retirar su dinero al término del cuarto año. Una casa financiera le ofrece dos propuestas de ahorro, con distinto interés.

Propuesta 1 (interés compuesto)	Propuesta 2 (interés simple)
Interés anual de 0,75 %. Cobro por mantención anual de 0,01 % del capital acumulado.	Interés anual de 0,9 %.

a. Si el objetivo de Francisco es guardar y cuidar su dinero, ¿qué propuesta consideras que es más conveniente? Explica.

b. Identifica los datos para cada propuesta y completa la tabla.

	Propuesta 1	Propuesta 2
Capital inicial (CI)		
Períodos de tiempo (t)		
Tasa de interés (r %)		
¿Cómo podría calcularse el capital final?		
Monto total que se podrá retirar		

c. Si el fin del ahorro de Francisco fuera obtener ganancias, ¿cuál propuesta le harías? ¿Por qué?

d. ¿Coincide tu propuesta con la primera que le realizaste? Explica.

Con la información anterior: ¿puedes responder la pregunta inicial?, ¿cuál es?

Herramientas tecnológicas

Interés compuesto

Don Ricardo le dejó a su nieto, Pedro, $ 50 000 de herencia y le pidió a su hijo Carlos, padre de Pedro, que invirtiera el dinero y se lo entregara dentro de 20 años. Si se prevé una tasa de 17 % anual, ¿cuál será el valor futuro de la inversión transcurridos los 20 años si capitaliza anual, semestral, mensual o diariamente?

PASO 1 Crea una hoja de cálculo con la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F
1			Interés	Número de períodos	Capital final	
2	Capital inicial	Anual				
3		Semestral				
4		Mensual				
5		Diario				

Se fomenta el aprendizaje de objetivos transversales al utilizar aplicaciones para presentar, representar, analizar y modelar información y situaciones, comunicar ideas y argumentos, comprender y resolver problemas de manera eficiente y efectiva, aprovechando múltiples medios.

PASO 2 Asigna las fórmulas en cada celda.

Asigna a C3 → =C2/2, C4 → =C2/12, C5 → =C2/365, D3 → =D2*2, D4 → =D2*12, D5 → =D2*365 para generar el interés y el número de períodos. Finalmente, en E2 → =A3*POTENCIA((1+C2/100);D2) y copia hasta E5 para obtener el capital final.

PASO 3 Ingresa los datos del problema.

En A3 se ingresan 50 000; en C2, 17 y en D2, 20.

	A	B	C	D	E	F
1			Interés	Número de periodos	Capital final	
2	Capital inicial	Anual	17	20	1155280	
3	50000	Semestral	8,5	40	1306650,8	
4		Mensual	1,4166667	240	1462883,5	
5		Diario	0,0465753	7300	1497019,6	

Luego, en la columna E se pueden observar los distintos capitales finales según el tipo de interés.

En resumen

El **cambio porcentual** se puede aplicar en situaciones de la vida real, como economía o ciencias sociales, en las cuales una cantidad inicial sufre alguna variación porcentual, resultando de esta forma una cantidad final.

Así, si C_I corresponde al capital inicial y C_F al capital final que se obtiene luego de T períodos de tiempo a una tasa de i % por cada período, entonces se puede calcular:

Interés simple	Interés compuesto
$C_F = C_I \cdot (1 + i \cdot T)$	$C_F = C_I \cdot (1 + i)^T$

Actividades de práctica

1. En una cuenta bancaria se depositan $ 60 000 con una tasa de interés del 1,6 % anual.

   a. Si se aplica interés simple, ¿qué monto habrá luego de 4 años?

   b. Si se aplica interés compuesto, ¿qué monto habrá luego de 4 años?

   c. ¿Qué diferencia hay entre ambos montos obtenidos?

2. Con una tasa de interés simple, calcula la cantidad de meses en que:

   a. $ 60 000 se convierten en $ 78 900 al 3,15 % mensual.

   b. $ 200 000 se convierten en $ 396 000 al 6,125 % mensual.

3. Con una tasa de interés compuesto, calcula la cantidad de meses en que:

   a. $ 80 000 se convierten en $ 101 200 al 6 % mensual.

   b. $ 150 000 se convierten en $ 226 500 al 7 % mensual.

4. Amalia tiene una cuenta en una institución financiera que, por concepto de mantención, descuenta un 2 % del capital por cada mes en que no se haga depósito en ella. ¿Cuánto dinero tendría Amalia al cabo de tres meses sin realizar depósito si originalmente tenía $ 370 000?

5. Martín quiere tomar un préstamo a 4 años de $ 6 000 000. ¿Cuál de las siguientes tasas de interés es la que más le conviene?, ¿por qué?

   - Tasa A: 1 % de interés compuesto mensual.
   - Tasa B: 12 % de interés compuesto anual.

6. Josefina ha recibido una herencia de $ 9 000 000 y quiere invertirlos durante un año. El banco del cual es clienta le ofrece tres alternativas de inversión:

   - Alternativa 1. Entregarle un 1,4 % de interés mensual simple.
   - Alternativa 2. Entregarle un 15 % de interés anual simple.
   - Alternativa 3. Entregarle un interés fijo trimestral de $ 400 000.

   ¿Con cuál alternativa obtendría mayores ganancias?

7. Una institución financiera ofrece a sus clientes dos alternativas de inversión.

   - Alternativa A. Consiste en depositar $ 1 000 000 a un 6 % anual con interés compuesto a 2 años.
   - Alternativa B. consiste en invertir $ 1 000 000, y recibir $ 61 800 al finalizar el primer año y $ 61 800 al finalizar el segundo año.

   ¿Cuál es la alternativa más conveniente?

8. Supón que eres un ejecutivo de banco que debe aconsejar a un cliente que necesita saber cómo obtener ganancias de un capital inicial de $ 4 000 000. Como ejecutivo tienes dos opciones para ofrecer:

   - Opción 1. Depósito con un interés compuesto con un 2,8 % anual.
   - Opción 2. Depósito con interés simple con un XX % mensual.

   La opción 2 no tiene definido su interés, pues tú ganarías la más alta comisión por ofrecerle al cliente la opción 2 respecto de la opción 1.

   Si el cliente quiere depositar su dinero por 3 años, ¿qué porcentaje de interés debieras ofrecerle en la opción 2 para que este la elija?

9. Gabriel depositará un millón de pesos en un banco a 5 años con una tasa de interés simple anual del 3 %. ¿Cuál será el capital final de Gabriel después de 5 años?

10. Magdalena desea tener 2 millones de pesos dentro de 5 años. Si un banco le ofrece una tasa de interés simple del 4 % anual, ¿cuánto dinero debe depositar, como mínimo, para obtener esa cantidad?

Usa calculadora
Para explorar

11. Una persona ahorra $ 400 000 a una tasa del 4 % anual de interés compuesto. Si no retira su ahorro, ¿en cuántos años el monto ahorrado superará por primera vez los $ 500 000?

12. Investiga, junto con un compañero o una compañera, sobre los períodos de capitalización del interés compuesto. Luego, resuelve.

    a. Se depositan $ 350 000 en un banco con un 3 % anual de interés compuesto. ¿Cuál será el capital final a los dos años con un período capitalizable cuatrimestral?

    b. Si a un capital inicial de 2 millones de pesos se le aplica el 2 % de interés compuesto anual, ¿cuál es el capital final luego de 5 años con períodos de capitalización semestrales?

13. Roberto, Catalina y Andrés depositaron cada uno $ 64 000 a 3 años en sus cuentas con una tasa de interés compuesto anual. Roberto realizó el depósito con una tasa del 2 % anual, Catalina, con un 0,5 % anual y Andrés, con un 1 % anual.

    a. Determina la función que te permite modelar la situación anterior.

    b. Al cabo de los 3 años, ¿quién obtuvo mayor ganancia?, ¿cuánto más?

14. Eva invirtió $ 300 000 a una tasa de interés compuesto del 4 % anual durante 5 años.

    a. ¿Cuál será el capital final?

    b. Y si la tasa de interés fuera el doble, ¿cuál será el capital final?

15. Antonio y Paula depositaron cada uno $ 37 000 en sus cuentas bancarias. Antonio lo hizo al 3 % anual por 6 años, y Paula, al 5 % anual por 2 años, ambas tasas de interés compuesto. Cuando cada uno retire el dinero: ¿quién tendrá más?, ¿cuánto más?

¿Qué aprendí hoy?

Se depositan $ 900 000 en una cuenta bancaria con una tasa de interés del 4 % anual.

1 Si se aplica interés simple, ¿cuál será el monto luego de 2 años?

____

2 Si se aplica interés compuesto, ¿cuál será el monto luego de 2 años?

____

3 ¿Qué diferencia hay entre ambos montos obtenidos?

____

Cuaderno página 40

1 Completa la tabla.

Índice de variación Iv	Cambio porcentual	Positivo o negativo
1,52		
0,97		
	35 %	Negativo
	12 %	Positivo

2 La superficie de un bosque es de 10 000 hectáreas. Si cada semana se tala el 10 % de la superficie, ¿cuánta superficie de bosque queda luego de 4 semanas?

3 El precio de un artículo electrónico disminuye un 25 % cada año después de su compra. Cuando se compró, el artículo costó $ 1 200 000.

a. Completa la tabla.

Tiempo (años)	0	1	2	3	4
Precio ($)	1 200 000	900 000	675 000		

b. ¿Cuál es la ecuación del cambio porcentual de la situación?

c. ¿Qué características tiene el cambio porcentual de la situación? ¿Cuál es su índice de variación?

4 Representa la situación mediante una ecuación de cambio porcentual constante y completa la tabla.

El precio de las acciones de una empresa ha experimentado una disminución mensual constante de un 8 % desde marzo.

Mes	Precio ($)
Marzo	
Abril	
Mayo	839,808
Septiembre	
Diciembre	

5 Analiza la siguiente tabla y determina la ecuación del cambio porcentual.

Presión atmosférica				
Altura (m)	0	1000	2000	3000
Presión (hPa)	1000	880	774,4	681,472

6 **Ciencias naturales.** Para la producción de yogur se necesitan bacterias lácteas, cuyas poblaciones aumentan de acuerdo a un crecimiento porcentual constante. Si en el comienzo de las observaciones hay 30 000 bacterias en 1 mL de leche y una hora después el número de estas asciende a 35 000, ¿cuál es el cambio porcentual de la población de bacterias lácteas por hora?

7 Analiza las afirmaciones con respecto a la representación gráfica de un cambio porcentual constante y escribe verdadero o falso según corresponda. Justifica.

a. ________ Puede ser creciente o decreciente.

b. ________ Siempre contiene al origen del plano.

c. ________ Si la gráfica es decreciente, representa un Iv negativo.

d. ________ Un cambio porcentual positivo se representa con una gráfica creciente.

8 En una cuenta bancaria se depositan $ 250 000 con una tasa de interés del 2,4 % anual.

a. Si se aplica interés simple, ¿qué monto habrá luego de 5 años?

b. Si se aplica interés compuesto, ¿qué monto habrá luego de 5 años?

c. ¿Qué diferencia hay entre ambos montos obtenidos?

9 Daniela y Renato solicitarán un crédito hipotecario de 2700 UF en un banco que aplica un interés compuesto anual del 5,5 % a un plazo de 25 años.

a. ¿Cuál será el monto final que deberán pagar Daniela y Renato?

b. ¿Cuál será el valor de cada cuota mensual?

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😐	😟
Modelé un crecimiento o decrecimiento porcentual constante.	○	○	○
Desarrollé la forma recursiva del cambio porcentual constante a base de datos iniciales.	○	○	○
Resolví ecuaciones recursivas del cambio porcentual constante en ejercicios rutinarios.	○	○	○
Resolví problemas de ciencias y de la vida diaria que involucren el cambio porcentual constante.	○	○	○
Ajusté modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad.	○	○	○
Abordé de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general o propios de otras asignaturas	○	○	○

Cuaderno página 42

Reviso mis metas y estrategias

1 Considera las estrategias que escribiste en la página 79: ¿han sido eficaces?, ¿por qué?

____

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

____

Lección 4

Ecuaciones cuadráticas

Exploro

¿Qué sabes de las ecuaciones cuadráticas? Escribe dos ideas.

____

____

¿Cómo se resuelve una ecuación?, ¿puede tener más de una solución?

____

____

Aprenderé a:

Resolver ecuaciones cuadráticas de la forma:

- $ax^2 = b$
- $(ax + b)^2 = c$
- $ax^2 + bx = 0$
- $ax^2 + bx = c$

(a, b, c son números reales, $a \neq 0$)

Necesito recordar...

- Ecuaciones lineales
- Expresiones algebraicas
- Factorización

¿Qué debo saber?

1. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales.

a. $5 + x = 6$

b. $12 - x = 20$

c. $18 - x = 2x - 5$

d. $3x + 2 = 10$

e. $20 - 5x + 2x = 15$

f. $12 - 7x = 9x + 1$

g. $20x - 4 = 6 - 18x$

h. $14 + 5 - 3x + 2x = 6x$

2. Resuelve los siguientes problemas usando ecuaciones lineales.

a. El triple de un número aumentado en 13 es igual al doble de la suma entre 3 y el doble del mismo número. ¿Cuál es la mitad del número?

b. La suma de tres números consecutivos es 54. ¿Cuál es el valor de cada número?

c. Ramón y Sergio confeccionaron 320 bolsos para una feria de Navidad. Si Ramón confeccionó 60 bolsos más que Sergio, ¿cuántos confeccionó Sergio?

3. Calcula el valor de las expresiones considerando los valores dados.

a. $3x - 1$ si $x = -2$

b. $-7x + 10$ si $x = -3$

c. $5 - 2x - x^2$ si $x = -4$

d. $(x - 10)(x - 4)$ si $x = -5$

e. $9 - x^2$ si $x = 3$

f. $(5x - 2)^2$ si $x = -6$

4. Multiplica según corresponda. Luego, escribe el nombre del producto notable.

a. $(x - 5) \cdot (x - 7)$
b. $(x + 10) \cdot (x - 6)$
c. $(x - 6) \cdot (x - 6)$
d. $(x - 11) \cdot (x + 1)$
e. $(4x + 11) \cdot (4x - 2)$
f. $(x - 5) \cdot (x - 1)$
g. $(x + 12) \cdot (x - 12)$
h. $(2x - 5) \cdot (2x - 5)$
i. $(3x - 3) \cdot (3x + 3)$
j. $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$
k. $\left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot (x - 3)$
l. $(5x + 3) \cdot (5x - 4)$

5. Une con una línea las expresiones de la columna A con el nombre que le corresponda de la columna B.

Columna A	Columna B
a. $(x + 4) \cdot (x + 4)$	Suma por su diferencia
b. $(x - 3) \cdot (x + 6)$	
c. $(x + 5)^2$	Cuadrado de binomio
d. $(x + 7) \cdot (x - 7)$	
e. $(x - 10) \cdot (x + 10)$	Binomio con término común
f. $(x - 1)^2$	
g. $(x - 1) \cdot (x - 8)$	

6. Factoriza las expresiones algebraicas.

a. $x^2 - 49$
b. $9x^2 - 1$
c. $x^2 - 2x + 1$
d. $4x^2 - 4x + 1$
e. $4x^2 - 2x - 2$
f. $x^2 - 3x + 2$
g. $x^2 - 7x + 10$
h. $x^2 + 6x - 160$
i. $x^2 - 11x + 30$
j. $3x^2 - 7x + 2$
k. $6x^2 + 5x + 1$
l. $9x^2 - 9x + 2$

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😐	😕
Resolví ecuaciones lineales y las apliqué a problemas de la vida cotidiana.	○	○	○
Valoricé expresiones algebraicas.	○	○	○
Desarrollé y factoricé expresiones algebraicas, reconociendo los productos notables.	○	○	○
Elegí o elaboré representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas.	○	○	○
Demostré curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en mis capacidades, incluso cuando no conseguí un resultado inmediato.	○	○	○

Cuaderno página 44

Tema 1: ¿Cuándo se dice que una ecuación es cuadrática?

¿Qué aprenderé?

A comprender las características que tiene una ecuación cuadrática.

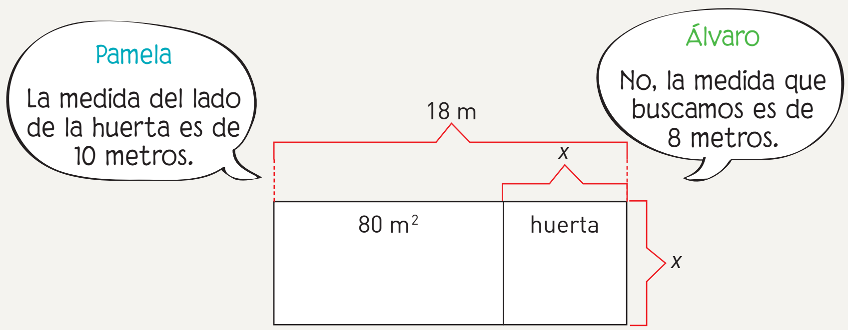
¿Para qué?

Para distinguirla de las ecuaciones lineales y utilizarla en situaciones de la vida diaria.

Actividad en pareja

Taller

Dos hermanos analizan el patio de su casa para construir una huerta que les permita obtener sus propios vegetales. Han decidido que esta tenga forma cuadrada, a lo que se agrega la condición que Fabiola, su mamá, les dio para permitirles construir la huerta: que el área restante del patio sea de 80 m². Ellos saben que el "frontis" del patio tiene una medida de 18 metros y esbozan la situación de la siguiente manera:



1 Sin calcular, ¿cuál de los hermanos creen ustedes que está en lo correcto?

- **a.** Uno de ustedes elija representar a Pamela y el otro, a Álvaro. Luego, cada uno debe comprobar si lo afirmado por uno de los hermanos es cierto. ¿Cómo pueden decidirlo?
- **b.** ¿Cuál de los hermanos estaba en lo correcto? Expliquen.

2 Fabiola afirma que ambos hijos están en lo correcto.

- **a.** ¿Están de acuerdo con lo dicho por ella? Justifiquen.
- **b.** ¿Pueden ambos hermanos estar en lo correcto?, ¿por qué?

3 Ahora, escriban una expresión algebraica para esta situación.

- **a.** ¿Es necesario plantear dos expresiones distintas? Expliquen.
- **b.** Si escriben la ecuación igualando la expresión anterior a 0 y, luego, ordenan la variable x de mayor a menor según su exponente, ¿qué ecuación resulta?
- **c.** ¿Qué características distintas a las que conocen de una ecuación tiene la ecuación obtenida?

4 ¿Conocen alguna otra situación similar a la anterior? ¿Cuál?

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente

Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente

Grupalmente

Actividades de proceso

Se dejó caer un objeto de 49 metros de altura. Si suponemos que no existe resistencia del viento, ¿cuánto tiempo demoró el objeto en llegar al suelo?

PASO 1 Identifica los datos del problema.

Distancia (d): ______________

Rapidez inicial (v_o): ______________

Gravedad (g): ______________

¿Cuál variable es la incógnita? ______________

PASO 2 Reemplaza los datos anteriores en la ecuación.

La ecuación que modela la caída libre de objetos desde una determinada distancia es:

$$d = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

a. ¿Cuál es el exponente mayor que tiene la variable t (tiempo)?

b. ¿Cómo se interpreta que la variable incógnita t tenga ese exponente?

c. Si una ecuación lineal tiene una única solución, ¿cuántas soluciones puede tener una ecuación si su mayor exponente es 2?

PASO 3 Reemplaza los datos del problema. Luego, iguala la ecuación a 0 y reescríbela para que la variable t^2 tenga coeficiente numérico 1.

a. ¿Qué ecuación obtuviste?

b. ¿Cuáles crees que son las posibles soluciones a la ecuación?, ¿por qué?

PASO 4 Ya puedes responder la pregunta del problema.

a. Amanda dice que las posibles soluciones de la ecuación son $\sqrt{10}$ y $-\sqrt{10}$. ¿Cómo podrías comprobarlo?

b. ¿Se podría asegurar que ambos valores (matemáticamente) son correctos?, ¿por qué?

c. ¿Ambas soluciones permiten dar respuesta al problema? Explica.

Finalmente, el objeto demoró ______________ segundos en caer al piso.

En resumen

Se dice que una ecuación es **cuadrática**, o de segundo grado con una incógnita, cuando después de reducir sus términos semejantes se puede ordenar como: $ax^2 + bx + c = 0$. Los coeficientes a, b y c corresponden a números reales y a debe ser distinto de cero ($a \neq 0$).

Así, por ejemplo, las expresiones de la forma $ax^2 = b$, $(ax + b)^2 = c$, $ax^2 + bx = 0$, y $ax^2 + bx = c$ son ecuaciones cuadráticas.

Una ecuación cuadrática puede tener a lo más **dos soluciones** en los números reales.

Y él ¿quién es?

Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Matemático y jurista francés. Descubrió el cálculo diferencial antes que Newton y Leibniz, sentó las bases de la teoría de probabilidades junto con Pascal y descubrió el fundamento de la geometría analítica de forma independiente a Descartes.

Sin embargo, es más conocido por sus aportes a la teoría de números y por el llamado último teorema de Fermat, que preocupó a los matemáticos durante 350 años, hasta que fue demostrado en 1995 por Andrew Wiles.

Actividades de práctica

1. Encierra las ecuaciones que correspondan a ecuaciones cuadráticas.

$-5x - 5x^2 + 5 = 0$ $\quad x^2 + 2x^2 + 12 = 0$ $\quad 7 = x + x$

$x + 2x = 6$ $\quad 8x^2 = 16$ $\quad 200 = x \cdot x - 5x$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 3 = 0$ $\quad 2x + 15 = \frac{x}{2}$

2. Justifica, en cada caso, por qué la expresión no es una ecuación cuadrática.

a. $x^3 + 4x - 27 = 0$

b. $4x^2 - 3x + 1$

c. $-x + 8y - 9 = 0$

d. $x \cdot (2 + x) = -5 + x \cdot (x + 4)$

e. $x \cdot (x + 3)^2 = 5(x - 4)$

f. $(2x - 3)(2x + 3) = 4x^2 - 9$

3. Multiplica y reduce los términos semejantes en cada expresión algebraica. Luego, clasifica cada ecuación.

a. $x(x + 1) = 0$

b. $x + x + 2 = 4$

c. $(x + 3) + (x - 3) = 10$

d. $(x - 1)(x - 1) = 1$

e. $12 = (x + 8)^2$

f. $1000 + 2x^2 = 42x^2 + 200x$

g. $(2x - 3)(x + 8) = 0$

h. $25 + 3x(x + 1) = 25$

4. Las siguientes ecuaciones están escitas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Determina los valores de ***a***, ***b*** y ***c*** en cada caso.

a. $x^2 + 5x - 24 = 0$

b. $2x^2 - 6x + 4 = 0$

c. $x^2 - 25 = 0$

d. $x^2 + 16x = 0$

e. $-x^2 + 5x - 3 = 0$

f. $5x^2 - x + 6 = 0$

5. Lee cada situación y determina la ecuación cuadrática que la representa.

Situación	Ecuación cuadrática
Un número y es mayor en 10 unidades que un número *x*. Si el producto entre ellos es de 50, ¿cuáles son los números?	$x \cdot (x - 10) = 50$ $x \cdot (x + 10) = 50$
Una ecuación cuadrática tiene como soluciones los números −5 y 6. ¿Cuál podría ser esa ecuación?	$(x + 5) \cdot (x - 6) = 0$ $(x - 5) \cdot (x + 6) = 0$
Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 6, 8 y 10. Si el área del triángulo es 144 cm^2, ¿cuáles son las medidas de los lados del triángulo?	$\frac{6x \cdot 8x}{2} = 144$ $\frac{8x \cdot 10x}{2} = 144$ $\frac{6x \cdot 10x}{2} = 144$

6. Analiza si los números son o no raíces de la ecuación y completa la tabla.

Ecuación	Números			¿Cuáles de ellos satisfacen la ecuación?
$x(x - 5) = 0$	5	−5	10	
$(x + 1)x = 0$	0	1	−1	
$(x + 10)(x + 2) = 0$	10	2	−2	
$(x - 14)(x - 8) = 0$	14	−8	6	
$(x + 7)(x - 5) = 0$	−7	5	2	
$2x(x - 2) = 0$	2	0	−2	

¿Qué aprendí hoy?

1 Determina si la expresión es una ecuación de segundo grado. Cuando lo sea, determina el valor de sus coeficientes.

a. $3x(4 + 5x) = 0$

b. $x(x + 7) = 4x$

c. $(x + 5)(x - 3) = 5$

d. $(x - 9)(x - 9) = x^2$

2 Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. ________ *Una ecuación cuadrática siempre tiene más de una solución.*

b. ________ *A los valores de a, b y c en la expresión* $ax^2 + bx + c = 0$ se les llama coeficientes.

Cuaderno página 45

Tema 2: ¿En qué consiste la resolución por factorización?

¿Qué aprenderé?

A resolver ecuaciones cuadráticas por medio de la factorización.

¿Para qué?

Para resolver problemas cotidianos aplicando la estrategia de factorizar una ecuación cuadrática para obtener dos ecuaciones lineales.

Ayuda

Factorizar una expresión algebraica es expresarla como producto de dos o más factores, los que pueden ser tanto números como expresiones algebraicas más simples.

Para aplicar este método, la ecuación debe estar escrita igualada a cero antes de factorizar, pues se basa en la relación: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$. Esto es: el producto de dos términos es cero si y solo si al menos uno de ellos es cero.

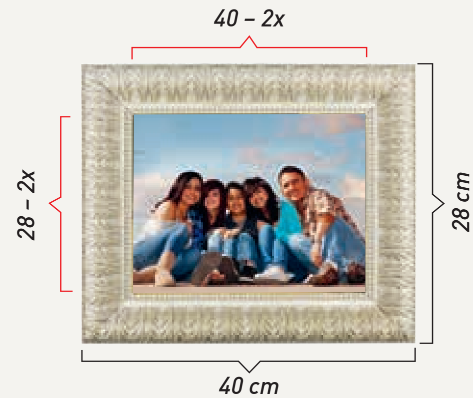
¿Cómo trabajé el taller?	
Individualmente	○ ○ ○
Grupalmente	○ ○ ○

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	
Individualmente	○ ○ ○
Grupalmente	○ ○ ○

●● Actividad en pareja

Taller

El marco de una fotografía mide 40 cm de ancho y 28 cm de alto, pero la fotografía misma tiene una superficie de 640 cm^2. ¿Cuál es el ancho del marco?



Si se designa con x el ancho del marco, se puede observar en la imagen que el área de la fotografía es: $(28 - 2x)(40 - 2x) = 640$.

1 Analicen y comenten.

a. ¿La expresión $(28 - 2x)(40 - 2x) = 640$ es una ecuación cuadrática?, ¿por qué?

b. Si prueban con algunos valores para x, ¿pueden encontrar alguna solución? Expliquen.

c. Al desarrollar el producto y ordenar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, ¿qué ecuación se obtiene?

d. ¿Se puede simplificar de modo que el coeficiente a sea 1? Si es posible, simplifiquen la ecuación.

2 ¿Pueden factorizar el lado izquierdo de la ecuación?, ¿cuáles son los factores?

$\boxed{} = 0 \Leftrightarrow \boxed{} \cdot \boxed{} = 0$

a. Solo observando la igualdad anterior, ¿pueden identificar las soluciones de la ecuación cuadrática?, ¿cuáles son? Justifiquen.

b. Si uno de los factores es distinto de 0, ¿qué debe cumplir el otro factor para que se cumpla la igualdad?, ¿por qué?

c. Apliquen esta idea para resolver la ecuación. ¿Cuáles son las soluciones?

d. En el contexto del problema, ¿ambas soluciones son válidas? Expliquen.

3 Observen la siguiente ecuación ya factorizada: $(2x - 20) \cdot (2x - 16) = 0$. ¿Pueden identificar sus soluciones?, ¿cuáles son?

Actividades de proceso

1. ¿Cuánto tiempo demora una pelota en volver al suelo si su altura (en metros) está dada por $h(t) = 90 + 15t - 5t^2$, donde t mide el tiempo transcurrido (en segundos) desde que fue lanzada verticalmente hacia arriba?

PASO 1 Interpreta los datos para escribir la ecuación.

Cuando la pelota está en el suelo, su altura h es 0; por tanto, se reemplaza en la expresión algebraica y se obtiene la ecuación

____

Si es posible, simplifica la ecuación de modo que el coeficiente para t^2 sea 1.

____

¿Qué tipo de factorización se puede aplicar? Justifica tu decisión.

Polinomio con término común	Diferencia de cuadrados
Trinomio cuadrado perfecto	Trinomio cuadrado con término común

PASO 2 Factoriza la expresión según corresponda y luego analiza las posibles soluciones.

Entonces ______ = 0

$\Leftrightarrow$ ______ · ______ = 0

Factor 1 Factor 2

Ya que $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$, podemos separarla en dos ecuaciones:

- ______ = 0, y al resolverla, se obtiene t_1 = ______
  Factor 1
- ______ = 0, y al resolverla, se obtiene t_2 = ______
  Factor 2

PASO 3 Interpreta las soluciones en el contexto del problema.

- En el caso de t_1 = ______, significa que a los ______ segundos de lanzada, la pelota vuelve al suelo.
- En el caso de t_2 = ______, significa que a los ______ segundos de lanzada, la pelota vuelve al suelo.

De las soluciones obtenidas, ¿ambas son pertinentes al contexto del problema? Explica.

Ayuda

Factorizaciones

Factorizaciones
Polinomio con término común
$ap + aq = a(p + q)$
Diferencia de cuadrados
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Trinomio cuadrado perfecto
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
Trinomio cuadrado con término común
$a^2 + (p + q)a + pq = (a + p)(a + q)$

Y él ¿quién es?

Karl-Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Matemático, astrónomo, físico, geodesta e inventor alemán. En 1799, demostró rigurosamente el "teorema fundamental del álgebra" (aunque no fue el primero), que señala que toda ecuación algebraica tiene una solución en números reales o complejos, lo que permite expresar cualquier polinomio como el producto de factores binomiales simples.

Contribuyó en muchos campos: teoría de números, análisis matemático, geometría diferencial, estadística, álgebra, geodesia, magnetismo y óptica, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia han tenido en la historia de esta ciencia.

2. En un laboratorio con 117 computadores, los equipos están ordenados en filas y columnas. Si la cantidad de computadores por fila es 4 más que la cantidad de filas, ¿cuál es la cantidad de filas y de computadores por fila?

PASO 1 Interpreta los datos para escribir la ecuación.

Si se asigna como x la cantidad de filas, entonces la cantidad de computadores por fila es ______.

Luego, en total, son $x \cdot$ ______ $= 117$.

Para resolver una ecuación usando factorización, la ecuación debe estar igualada a cero; en este caso:

$x \cdot$ ______ $= 117$, entonces $x \cdot$ ______ $- 117 = 0$

Escrita en su forma general, es ______.

¿Qué tipo de factorización se puede aplicar? Justifica tu decisión.

Polinomio con término común	Diferencia de cuadrados
Trinomio del cuadrado perfecto	Trinomio de cuadrado con término común

PASO 2 Factoriza la expresión según corresponda. Luego, analiza las posibles soluciones.

¿Piensas que hay alguna otra manera de realizarlo? Explica.

Usa calculadora
Para explorar

Entonces, ______ $= 0 \Leftrightarrow$ ______ $\cdot$ ______ $= 0$

Podemos separarla en dos ecuaciones: ______ $= 0$ ______ $= 0$

$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

PASO 3 Interpreta las soluciones en el contexto del problema.

- En el caso de $x_1 =$ ______ significa que hay ______ filas de computadores y ______ computadores por cada fila.
- En el caso de $x_2 =$ ______ significa que hay ______ filas de computadores y ______ computadores por cada fila.

¿Son ambas soluciones obtenidas pertinentes al contexto del problema? Explica.

3. Tomás necesita saber las medidas del lado de un cuadrado cuya área está dada por la ecuación $x^2 - 64 = 0$. ¿Cómo podrías factorizar la expresión $x^2 - 64$ para facilitar la resolución de la ecuación?, ¿qué tipo de factorización se puede aplicar? Justifica tu decisión.

PASO 1 Factoriza la expresión según corresponda. Luego, analiza las posibles soluciones.

Entonces $\boxed{} = 0 \Leftrightarrow \boxed{} \cdot \boxed{} = 0$

Podemos separarla en dos ecuaciones: $\boxed{} = 0$ $\boxed{} = 0$

$x_1 = \boxed{}$ $x_2 = \boxed{}$

PASO 2 Interpreta las soluciones en el contexto del problema.

- En el caso de $x_1 = \boxed{}$, significa que ______________________________

____

- En el caso de $x_2 = \boxed{}$, significa ______________________________

____

¿Son ambas soluciones obtenidas pertinentes al contexto del problema? Explica.

En resumen

- Cuando en una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ la expresión algebraica $ax^2 + bx + c$ se puede factorizar en dos expresiones lineales, la ecuación se puede resolver al separarlas en las dos ecuaciones lineales asociadas.
  Esto puede realizarse en los números reales ya que se cumple:
  $$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \lor b = 0.$$
- En particular, cuando en la ecuación $a = 1$, una estrategia posible es buscar dos números x_1 y x_2 tales que su producto sea igual a c y su suma sea igual a b, de forma que su factorización es:
  $$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$
  En este caso, se tiene que x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación.
- Cuando $a \neq 1$, se puede intentar usar la estrategia anterior, dividiendo toda la ecuación por a para luego factorizarla, aunque esta idea no siempre logra simplificar la resolución de la ecuación, porque puede suceder que con los coeficientes obtenidos la expresión no sea simple de factorizar.

Actividades de práctica

1. Dadas las siguientes ecuaciones, factoriza según corresponda. Luego, determina las soluciones de cada ecuación.

Ecuación	Factorización	Soluciones	
		x_1	x_2
$x^2 + 4x = 0$			
$x^2 - 14x + 49 = 0$			
$x^2 - 125 = 0$			
$x^2 - 4x - 21 = 0$			
$10x^2 - 50x = 0$			
$6x^2 + 12x + 6 = 0$			
$16x = 32x^2$			
$16x^2 + 4x = 0$			
$4x^2 = -12x - 9$			
$4x^2 + 10x + 6 = 0$			

2. Analiza la resolución del recuadro. Luego, aplícala para resolver.

Para factorizar la expresión $5x^2 + 4x - 12$, se pueden seguir estos pasos:

- Se resuelve $5 \cdot (-12) = -60$.
- Se buscan factores de -60 que sumen 4, en este caso 10 y -6.
- Se reescribe la expresión original considerando esos factores: $5x^2 + 10x - 6x - 12$
- Se asocia y se factoriza: $5x(x + 2) - 6(x + 2) = (5x - 6)(x + 2)$.

De esta forma, la ecuación $5x^2 + 4x - 12 = 0$ se resuelve como:

$$5x - 6 = 0 \qquad x + 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{6}{5} \qquad x_2 = -2$$

a. $-10x^2 - 7x + 12 = 0$

b. $-6x^2 + 7x + 5 = 0$

c. $18x^2 + 17x - 15 = 0$

d. $6x^2 + 23x + 20 = 0$

3. Lee cada situación, plantea la ecuación cuadrática que corresponda y resuelve. Luego, responde según corresponda.

a. Dos números consecutivos son tales que el cuadrado del mayor excede en 111 al triple del menor. ¿Cuáles números son?

b. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su área 48 cm^2. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo?

c. El profesor de Matemática plantea el siguiente desafío: "Determina un número tal que el cuadrado de su antecesor sea igual al triple de ese número menos cinco". ¿Cuál o cuáles son los números?

d. Gabriel le contaba a sus vecinos: "La nueva plaza tendrá forma rectangular, imagínenla, son 170 m^2 de área total y 54 m de perímetro". ¿Cuáles serán las medidas de la plaza?

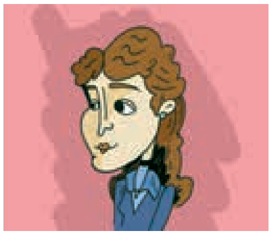
e. Catalina observa dos cuadrados y calcula que la suma de sus perímetros es 60 cm, mientras que la suma de sus áreas es 125 cm^2. ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrado?

f. Un grupo de amigos organizó un viaje cuyo transporte costaba $300 000 en total. En el último momento se inscribieron cinco amigos más, por lo que cada uno pagó $2000 menos de la cuota fijada. ¿Cuántos amigos iban al viaje inicialmente?

g. Se requiere revestir el piso de un gimnasio, de 12 metros de ancho y 15 metros de largo, dejando una franja uniforme sin revestimiento alrededor del espacio central. El presupuesto disponible permite pagar los materiales y la mano de obra para revestir 108 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones máximas que puede tener el espacio central?

h. Una embotelladora desea crear un envase cilíndrico de 18 cm de largo y de 288π cm^2 de área. ¿Cuál debe ser el radio de dicho cilindro?

Y ella ¿quién es?



Marie-Sophie Germain (1776 - 1831)

Matemática, física y filósofa francesa. Realizó importantes contribuciones a la teoría de números y a la teoría de la elasticidad. Estudió los que ahora son llamados números primos de Sophie Germain (Si p es número primo, $2p + 1$ también es un número primo). A pesar de la oposición de sus padres y las dificultades presentadas por una sociedad sexista, se educó con los libros de la biblioteca y gracias a su correspondencia con matemáticos como Gauss, Lagrange y Legendre. Debido a la exclusión de las mujeres de las universidades imperante en su época, no desarrolló una carrera matemática formal, sino que trabajó de manera independiente a lo largo de su vida.

¿Crees que en la actualidad la participación de las mujeres en las universidades ha cambiado?, y en las carreras científicas, ¿se mantiene esta participación?, ¿por qué?

¿Qué aprendí hoy?

1 Resuelve mediante factorización las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 - 36 = 0$

b. $x^2 - 3x - 10 = 0$

c. $5x^2 - 20 = 0$

d. $x(x - 1) + 2(x - 1) = 0$

2 Francisca quiere hacer una caja, sin tapa, de 108 cm^3 de volumen con un trozo cuadrado de cartón. Para hacerla, decidió cortar en cada esquina cuadrados de 3 cm de lado, para luego plegar el cartón y unirlo por las aristas. ¿Cuánto mide el lado del trozo de cartón?

Cuaderno página 47

Tema 3: ¿Cuál es el algoritmo para completar el cuadrado?

¿Qué aprenderé?

A comprender y aplicar el algoritmo de la completación de cuadrados.

¿Para qué?

Para resolver ecuaciones cuadráticas que no sean simples de factorizar.

Actividad en pareja

Taller

Otra forma de resolver ecuaciones cuadráticas también se refiere a separar la ecuación en dos ecuaciones lineales, pero solo en ciertos casos.

1 Observen el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned} x^2 + 12x + 36 &= 9 \\ (x+6)^2 &= 9 \\ x + 6 &= \sqrt{9} \\ x + 6 &= 3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

a. ¿Cómo podrían describir los pasos aplicados para resolver esta ecuación?

b. ¿La solución es correcta?

c. ¿Existe otra solución?, ¿por qué?

d. Resuelvan la ecuación $x^2 + 12x + 36 = 9$ utilizando el método por factorización. ¿Qué pueden concluir?

2 Observen el siguiente desarrollo y comenten.

$$x^2 - 8x - 38 = 10$$
$$x^2 - 8x = 48$$
$$x^2 - 8x + 16 = 48 + 16$$
$$(x-4)^2 = 64$$
$$x - 4 = \sqrt{64} \qquad x - 4 = -\sqrt{64}$$
$$x - 4 = 8 \qquad x - 4 = -8$$
$$x_1 = 12 \qquad x_2 = -4$$

a. ¿Por qué se suma 16 a ambos lados de la ecuación?

b. ¿Esto cambia las soluciones de la ecuación?, ¿por qué?

c. ¿Qué relación tiene 16 con los demás términos de la ecuación?, ¿cómo se determina ese valor?

d. ¿Por qué la ecuación cuadrática se separa en dos ecuaciones lineales de esa manera?

e. ¿Las soluciones son correctas?, ¿existe otra solución?

3 Describan, paso a paso, este método para resolver una ecuación cuadrática.

a. ¿En qué casos no se pueden determinar las soluciones mediante este método?

b. ¿Cómo se puede reconocer una ecuación que no tenga solución en los números reales al aplicar este algoritmo? Expliquen.

¿Cómo trabajé el taller?	Individualmente ○ ○ ○	Grupalmente ○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	Individualmente ○ ○ ○	Grupalmente ○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Observa los pasos para resolver $2x^2 - 3x - 2 = 0$ aplicando la completación de cuadrados y determina sus soluciones.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

Se simplifica por el valor de ***a*** $\quad x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$

Si tiene término libre en el lado derecho $\quad x^2 - \frac{3}{2}x = 1$

Divide el coeficiente de ***x*** por 2, elévalo al cuadrado y súmalo a ambos lados de la igualdad.

Se completa el cuadrado de binomio $\quad x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 1 + \frac{9}{16}$

Se factoriza $\quad \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

¿Por qué esta ecuación tiene dos soluciones?

En resumen

El algoritmo de **completación de cuadrados** consiste en transformar una ecuación cuadrática, ya sea que esté escrita en la forma general $ax^2 + bx + c = 0$ o no, en una ecuación de la forma $(x - m)^2 = n$, siguiendo estos pasos:

1º Cuando la ecuación está en su forma general, si $a \neq 1$ se divide por a, y se resta el término independiente a ambos lados de la ecuación, de modo que quede de la forma: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

2º Se calcula el término que permite completar el cuadrado: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ y se suma a ambos lados de la igualdad.

3º En el lado izquierdo, se factoriza como un cuadrado de binomio y en el derecho, se calcula la suma para dejar solo un número racional. Si este resultado es negativo, la ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales.

4º Se separa en dos ecuaciones. Como en el lado izquierdo hay una expresión algebraica que está al cuadrado, al escribir las ecuaciones lineales deba considerarse los dos signos. Es decir, se escribe una ecuación con el signo positivo (para el lado derecho) y otra con el signo negativo.

5º Luego, se resuelven las ecuaciones lineales resultantes y se expresa cada solución por separado.

Y ella ¿quién es?

Guacolda Antoine Lazzerini (1908-2015)

Matemática, física y docente chilena. Fue la primera mujer en ejercer como decana en la antigua Universidad Técnica del Estado (UTE). Formó a generaciones de jóvenes, impartiendo clases en diferentes establecimientos educacionales tanto a nivel secundario como universitario.

En el año 2000 fue reconocida como profesional destacada por la Agrupación de Mujeres Ingenieras. Y en el año 2008, recibe la Medalla al Mérito Científico de la Facultad de Ciencia, de la Universidad de Santiago de Chile.

Actividades de práctica

1. Responde:

a. ¿Cuál es el primer paso en el método de completación de cuadrados?

b. Para resolver la ecuación $17x^2 + 12x = -4$ con este método, ¿cuál es el primer paso?

c. Cuando se resuelve $x^2 + 8x = -15$ aplicando la completación de cuadrados, ¿qué número se suma a ambos lados de la ecuación?

d. ¿Por qué la ecuación $(x + 1)^2 + 3 = 0$ no tiene solución en los números reales?

2. Observa atentamente cada resolución de ecuación presentada, identifica el error y corrígelo.

a.

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$3x^2 - 5x = -2$$
$$x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{2}{3}$$
$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{6} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$$
$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} \leftrightarrow x - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \leftrightarrow x - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

- ¿Cuáles son las soluciones correctas?

$x_1 =$ ______ , $x_2 =$ ______

b.

$$4x^2 - 12x - 5 = 0$$
$$x^2 - 3x = -\frac{5}{4}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{5}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 1 \leftrightarrow x - \frac{3}{2} = 1 \leftrightarrow x - \frac{3}{2} = -1$$
$$x_1 = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

- ¿Cuáles son las soluciones correctas?

$x_1 =$ ______ , $x_2 =$ ______

3. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas completando cuadrados.

a. $x^2 + 10x - 75 = 0$

b. $x^2 - 4x + 1 = 0$

c. $x^2 + 8x + 7 = 0$

d. $x^2 - 5x + 6 = 0$

e. $3x^2 - 4x + 2 = 0$

f. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

g. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

h. $3x^2 - 4x - 5 = 0$

i. $3x^2 + x + 1 = 0$

4. Resuelve los siguientes problemas utilizando la completación de cuadrados y responde.

a. La diagonal de un rectángulo mide 5 m y su área es 12 m^2. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo?

b. ¿Cuáles son los números pares consecutivos cuyo producto es 728?, ¿piensas que hay alguna otra manera de realizarlo? Explica.

c. La superficie de un terreno es de 500 m^2. Si la medida del largo del terreno es el quíntuplo de la medida de su ancho, ¿cuál será la medida de su perímetro?

d. Una salida pedagógica al teatro tiene un valor de $ 80 000 para todo el colegio. Este costo se dividirá en partes iguales entre las personas que participen. A último momento, 8 personas cancelan su participación, lo que implica que la cantidad que le corresponde pagar a quienes asistan aumenta en $ 500. ¿Cuántas personas eran inicialmente?

e. Sergio encontró un trozo de madera de forma rectangular, que mide 15 cm de largo y 8 cm de ancho. Si requiere que la diagonal del rectángulo sea 4 cm menor, ¿en cuántos centímetros tendría que cortar, simultáneamente, el largo y el ancho para obtener esta medida?

¿Qué aprendí hoy?

1 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas completando cuadrados.

a. $2x^2 - 7x - 4 = 0$

b. $x^2 - 5x + 19 = 12$

2 Las ganancias por la venta de un producto dependen de la cantidad de productos vendidos según el modelo $g(c) = c^2 - 5c + 8$ (miles de pesos) al vender c unidades. ¿Cuántos productos deben venderse para obtener $ 22 000 de ganancia?

Cuaderno página 49

Tema 4: ¿Cómo se aplica la fórmula general?

¿Qué aprenderé?

A resolver ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general.

¿Para qué?

Para poder disponer de otro método de resolución, más directo, y que depende solo de los coeficientes ***a***, ***b*** y ***c***.

Actividad en pareja

Taller

El método por completación de cuadrados puede resumirse en la siguiente expresión algebraica, conocida como la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1 Observen la fórmula general. ¿Qué condiciones o restricciones existen para los términos de ***a***, ***b*** y ***c*** para que la fórmula se pueda calcular? Expliquen.

a. ¿Cómo se interpreta el signo ±?

b. Usando esta expresión, ¿siempre se pueden determinar las soluciones de una ecuación cuadrática?, ¿por qué?

2 Utilicen la fórmula general para determinar las soluciones de $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

a. Identifiquen los valores de los coeficientes:

$a =$ ____, $b =$ ____ y $c =$ ____.

b. Escriban la fórmula general, reemplazando los valores anteriores.

$x =$ ____

c. Calculen el valor final de las dos soluciones.

$x_1 =$ ____ y $x_2 =$ ____

3 Del mismo modo, resuelvan:

a. $6x^2 + 17x - 5 = 0$

b. $2x^2 - 4x + 2 = 0$

c. $x^2 + x + 1 = 0$

4 Consideren los resultados obtenidos y comenten:

a. ¿Todas las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones en los números reales?

b. ¿Cómo podría determinarse, antes de calcular toda la expresión, la cantidad de soluciones reales que tiene una ecuación cuadrática? Justifiquen.

¿Cómo trabajé el taller?	Individualmente ○ ○ ○
	Grupalmente ○ ○ ○

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	Individualmente ○ ○ ○
	Grupalmente ○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Un sitio rectangular, de área 500 m^2, fue cercado utilizando 90 m de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones del sitio?

PASO 1 Identifica los datos del problema y formula una ecuación que represente la situación.

Área del sitio: 500 m^2. → Incógnita x: ancho del sitio.

Perímetro del sitio: 90 m. → Incógnita y: largo del sitio.

Se conoce el perímetro, luego ________ + ________ = 90 m (ecuación 1)

Se conoce el área del sitio, luego ________ • ________ = 500 m^2 (ecuación 2)

Como en un sistema de ecuaciones, sustituye el valor de x de la ecuación 1 en la ecuación 2:

________ + ________ = 90 → x = ________

________ • y = 500

PASO 2 Multiplica e iguala la ecuación a 0. Luego, identifica los coeficientes ***a***, ***b*** y ***c***.

________ • y^2 + ________ • $y - 500 = 0$

a = ☐ b = ☐ c = ☐

PASO 3 Aplica la fórmula general de la ecuación cuadrática, reemplazando los valores.

$y_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \boxed{}$, $y_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \boxed{}$

PASO 4 Comprueba la pertinencia de las soluciones.

¿Ambas soluciones obtenidas satisfacen el problema dado?

	Medida del largo	Medida del ancho	¿Es posible?
y_1			
y_2			

¿Qué puedes concluir de las dimensiones del sitio?

____

____

____

2. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez de 16 m/s.
La altura ***y*** en metros que alcanza el objeto después de ***t*** segundos está dada por la ecuación del lanzamiento vertical:

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

a. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que el objeto esté a 12 metros del suelo?

b. ¿Cuándo alcanzará el suelo el objeto?

c. ¿Cuándo el objeto estará a 80 metros del suelo?

PASO 1 Identifica los datos del problema y determina la ecuación que representa la situación.

- Rapidez inicial: 16 m/s
- Aceleración de gravedad: 10 m/s^2 aproximadamente.
- Altura: 12 m, 0 m y 80 m, respectivamente.
- Incógnita t: tiempo.

Se remplazan los valores en la ecuación de lanzamiento vertical: $y = 16t - 5t^2$

PASO 2 En cada caso, iguala la ecuación a 0, e identifica los coeficientes ***a***, ***b*** y ***c***. Luego, resuelve la ecuación.

Ecuación cuadrática	Coeficientes			Fórmula general	Soluciones	
	a	b	c		t_1	t_2
$12 = 16t - 5t^2$						
$0 = 16t - 5t^2$						
$80 = 16t - 5t^2$						

PASO 3 Comprueba la pertinencia de las soluciones.

¿Las soluciones obtenidas satisfacen el problema dado?

Altura	Soluciones		¿Es pertinente?, ¿por qué?
	t_1	t_2	
12 m			
0 m			
80 m			

¿Qué puedes concluir?

Comprendo la demostración

Observa cómo se aplican los pasos de la completación de cuadrados a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ para determinar la fórmula general.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se simplifica por el valor de a $\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Si tiene término libre en el lado derecho $\quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Se completa el cuadrado de binomio $\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

Divide el coeficiente de x en 2, elévalo al cuadrado y súmalo a ambos lados de la igualdad.

Se factoriza $\quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¿Piensas que lo que está descrito está bien?, ¿por qué?

En resumen

Al considerar la **ecuación cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$; se pueden obtener sus soluciones, x_1 y x_2, directamente mediante las siguientes fórmulas generales:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Además, con la fórmula general se puede determinar la cantidad de soluciones reales de una ecuación cuadrática, sin necesidad de calcularlas rigurosamente, es decir, sin aplicar algún tipo de resolución.

Esto es posible calculando el valor del **discriminante** de una ecuación cuadrática, que se simboliza con la letra griega delta (Δ). Este valor, que se obtiene de la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, cumple las siguientes características:

1º Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones** en los números reales.

2º Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene **una solución** en los números reales.

3º Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación **no tiene solución** en los números reales.

Actividades de práctica

1. Dadas las siguientes ecuaciones cuadráticas, identifica sus coeficientes y resuélvelas aplicando la fórmula general.

Ecuación cuadrática	Coeficientes			Fórmula general	Soluciones	
	a	b	c		x_1	x_2
$x^2 + 6x + 8 = 0$						
$x^2 - x - 2 = 0$						
$2x^2 - 5x - 3 = 0$						
$4x^2 + 8x + 3 = 0$						
$x^2 - 10x + 20 = 0$						
$5x^2 + 125 = 0$						
$3x^2 - 7x = 0$						
$4x^2 - 8x + 20 = -6$						
$12x^2 = -6x$						
$x^2 + 6x = 27$						
$400 - 100x^2 = 0$						
$5x^2 - 6x - 5 = 0$						
$9x^2 - 6x + 1 = 0$						

2. Calcula el discriminante de las siguientes ecuaciones cuadráticas e indica, sin resolver, cuál es el número de soluciones en los números reales de cada una.

a. $14x^2 + 2x + 4 = 0$

b. $x^2 - \frac{8}{3}x + 4 = 0$

c. $x^2 + 7x - 1 = 0$

d. $-3x^2 - 11 = 0$

e. $5x^2 + 9x = 0$

f. $12 - 5x + 8x^2 = 0$

Usa calculadora
Para explorar

3. Usando la fórmula general, resuelve las siguientes ecuaciones literales.

a. $x^2 + 2mx + r^2 = 0$

b. $2x^2 + m^2 = 3mx$

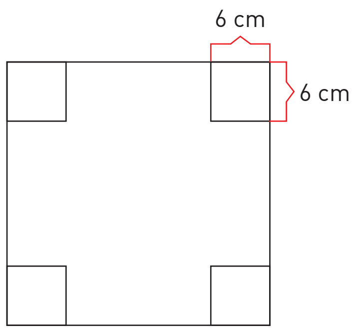
4. Determina para qué valores de m, la ecuación $x^2 - mx + 100 = 0$ tiene:

a. Dos soluciones en los números reales.

b. Una solución en los números reales

c. No tiene soluciones en los números reales.

5. Con un cartón de forma cuadrada, se quiere construir una caja sin tapa (con forma de prisma de base cuadrada). Para esto, se le corta un cuadrado de 6 cm de lado en cada uno de sus vértices. Si se sabe que el volumen de la caja debe ser de 216 cm^3, ¿cuál es la medida del lado del cartón?



¿Crees que el cartón pueda medir 12 cm de lado? ¿por qué?

Y ella ¿quién es?

Maryam Mirzajaní (1977-2017)

Matemática iraní y profesora de matemáticas en la Universidad de Stanford. Su trabajo en superficies de Riemann y sus modelos espaciales conectan varias disciplinas matemáticas (Geometría hiperbólica, análisis complejo, topología y dinámica) e influyen en todas ellas.

En 2014 fue galardonada con la Medalla Fields, siendo la primera mujer en recibir este premio equivalente al Nobel de las matemáticas.

¿Qué aprendí hoy?

1 Usando la fórmula general, resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $10x^2 + 14x - 2 = 0$

b. $4x^2 - 8x + 12 = 0$

2 De un triángulo de área 54 cm^2, se quiere determinar la medida de la base (b) y la medida de altura (h). Si se sabe que su base es 12 cm más larga que su altura, ¿cuáles son las medidas?

Cuaderno página 51

La posición de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba está dada por la expresión algebraica $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, donde v_0 es la rapidez inicial con que se lanza el objeto, t el tiempo transcurrido, g la aceleración de gravedad, que se puede aproximar por 10 m/s^2, e y_0 la altura inicial del objeto. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio de 15 m de altura, con una rapidez inicial de 10 m/s. ¿Cuánto tiempo demorará la pelota en llegar al suelo?, ¿por qué?

PASO 1 Reconocer los datos del problema y reemplazarlos en la expresión algebraica.

Según los datos del lanzamiento de la pelota, en este caso, $y_0 = 15$ y $v_0 = 10$, de modo que, al reemplazar, su altura está dada por $y = 15 + 10t - 5t^2$.

PASO 2 Relacionar la pregunta del problema con los parámetros de la ecuación.

Cuando la pelota se encuentre en el piso su altura será 0; es decir, se debe resolver la ecuación $15 + 10t - 5t^2 = 0$.

PASO 3 Resolver la ecuación cuadrática utilizando alguna de las estrategias.

Por factorización:

$$15 + 10t - 5t^2 = 0$$

$$3 + 2t - t^2 = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t + 1)(t - 3) = 0$$

Luego, necesariamente, se tiene que:

$t + 1 = 0$, o bien que $t - 3 = 0$, de donde se obtiene $t = -1$ y $t = 3$.

PASO 4 Argumentar y comunicar correctamente la respuesta al problema.

Como la pelota no puede llegar al suelo un segundo antes de ser lanzada desde la azotea del edificio, la solución algebraica $t = -1$ no es pertinente al contexto del problema, por lo que se descarta. Por lo tanto, la pelota demora tres segundos en llegar al suelo.

1 ¿Cuáles son los dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145?

2 Un rectángulo está formado de modo tal que su largo mide 2 cm más que su ancho y su diagonal mide $3\sqrt{2}$ cm. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo?

Cuaderno página 73

1 Determina si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.

a. ________ $x = \sqrt{7}$ y $x = -\sqrt{7}$ son soluciones de la ecuación $x^2 + 7 = 0$.

b. ________ $x = 5\sqrt{3}$ y $x = -5\sqrt{3}$ son soluciones de la ecuación $x^2 + 10 = 85$.

c. ________ La ecuación $(x - 2)^2 + 5 = (2x + 1)^2$ es una ecuación de segundo grado.

d. ________ Las soluciones de la ecuación $x^2 + 8 = 0$ no son números reales.

e. ________ $x^2 + 4x - 9 = 0$ es una ecuación de segundo grado con una incógnita.

f. ________ Si las soluciones de una ecuación de segundo grado son números enteros, se pueden obtener mediante el método por factorización.

g. ________ Si el discriminante de una ecuación de segundo grado es negativo, la ecuación tiene soluciones en los números reales.

h. ________ El discriminante de una ecuación de segundo grado es el signo de su solución.

2 Reduce los términos semejantes para escribir cada ecuación en la forma general. Luego, determina sus valores de ***a***, ***b*** y ***c***.

Ecuación cuadrática	Forma general	Coeficientes		
		a	*b*	*c*
$4x\,(x + 2) = -4x$				
$(x + 2)^2 = 5(x - 7)$				
$(2x - 5)^2 = (x + 3)^2$				
$3x \cdot (x - 1) + 5x \cdot (x + 2) = 3x$				
$3(x^2 + 5x - 20) = x(4 + 2x)$				
$(x - 1)^2 - 3x - 5(x + 3) = -2 + 3(x - 1)$				

3 Reemplaza el valor dado en las siguientes ecuaciones y decide, en cada caso, si es solución:

a. $x = 3$ $\quad x^2 - 9 = 0$

b. $x = 4$ $\quad x^2 + 16 = 0$

c. $x = -2$ $\quad x^2 - 3x + 2 = 0$

d. $x = 1$ $\quad 5x^2 - 3x - 2 = 0$

e. $x = 4$ $\quad (x - 2)(x + 3) = 3x + 2$

f. $x = 4$ $\quad 2x^2 - 11x + 12 = 0$

4 Analiza si los números son o no raíces de la ecuación y completa la tabla.

Ecuación	Números			¿Cuáles de ellos satisfacen la ecuación?
$x^2 + x - 6 = 0$	-2	2	3	
$x^2 - 8x = 0$	8	4	2	
$x^2 + 5x - 14 = 0$	5	2	-7	
$x^2 + 7x = -12$	-4	-3	6	
$4x^2 - 13x + 9 = 0$	-1	1	2	
$(2x + 1)^2 + 3 = 4(x + 1)^2$	2	0	-3	

5 Iguala cada ecuación a cero, para luego resolverlas mediante factorización:

a. $x^2 + 81 = 18x$

b. $x^2 + 2x = 15$

c. $x^2 = 9(x - 2)$

d. $x^2 = 13x - 42$

e. $x^2 + x = 156$

f. $x^2 - 10x - 45 = 3x - 15$

6 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas completando cuadrados.

a. $x^2 + 8x + 18 = 0$

b. $x^2 - 11x + 30 = 0$

c. $10 - 8x = 4x^2$

d. $2x^2 - 2x - 1 = 0$

e. $2x^2 - 7x - 4 = 0$

f. $x^2 + 18x - 72 = 0$

7 Calcula el discriminante de las siguientes ecuaciones y determina cuántas soluciones tiene cada una en los números reales.

a. $x^2 - 10x + 20 = 0$

b. $4x^2 - 8x + 29 = 3$

c. $x^2 - 4x + 4 = 0$

d. $x^2 - 6x + 12 = 0$

e. $5x^2 + 125 = 0$

f. $3x^2 - 7x = 0$

8 Resuelve las siguientes ecuaciones mediante la fórmula general.

a. $x^2 - 5x - 14 = 0$

b. $-x^2 - 11x - 30 = 0$

c. $2x^2 - x - 3 = 0$

d. $x^2 + 12x + 31 = 0$

e. $-2x^2 + 12x - 29 = 0$

f. $3x^2 - 10x + 8 = 0$

9 La suma de los primeros n números naturales consecutivos 1, 2, 3, ... n está dada por la expresión $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$. ¿Cuántos números naturales consecutivos se deben sumar para obtener un total de 300?

10 **Geometría.** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y su perímetro 60 cm.

a. ¿Cuáles son las medidas de cada lado del triángulo rectángulo?

b. ¿A qué corresponde la variable x, en este caso?

c. Escribe la ecuación respectiva.

11 La masa de un lobo marino en sus primeros dos años de vida está dada por la relación $4m = a^2 - 4a + 272$, donde m es su masa (en kilogramos) y a es su edad (en meses).

a. ¿A qué edad un lobo marino puede llegar a pesar 83 kilogramos?

b. ¿A qué corresponde la variable x, en este caso?

c. Escribe la ecuación respectiva.

12 La edad de Jorge es el cuadrado de la de su hija Francisca. En 24 años más, la edad de Jorge será el doble de la de Francisca. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

13 Si el discriminante de la ecuación $3x^2 - 2x + k = 0$ es 64, ¿cuál es el valor de k?

14 Determina para qué valores de k, la ecuación $x^2 + x = 5k$ tiene:

a. Dos soluciones en los números reales.

b. Una solución en los números reales.

c. No tiene soluciones en los números reales.

15 **Ciencias naturales.** La ecuación $-\frac{1}{100}x^2 + \frac{27}{50}x = 2$ representa la distancia horizontal desde el punto de lanzamiento en que el objeto alcanza los 2 metros de altura.

a. Multiplica la ecuación por 100, de modo que quede expresada con coeficientes enteros.

b. Resuelve la ecuación usando los métodos que has aprendido. ¿Cuál es la solución?

c. ¿Cómo se interpreta esta solución en el contexto del problema?

16 **Ciencias naturales.** La ecuación con dos incógnitas $20y = -3x^2 + 36x$ representa la relación entre la altura y de un objeto y su distancia horizontal x desde el punto de lanzamiento.

a. Calcula a qué distancia del punto de lanzamiento el objeto vuelve al suelo.

b. Ahora, calcula a qué distancia del punto de lanzamiento el objeto se encuentra a 3 metros de altura, reemplazando el valor de y en la ecuación. Luego, resolviendo la ecuación de segundo grado obtenida: ¿esta distancia es única?, ¿cómo se interpreta en el contexto del problema?

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Modelé problemas geométricos, de la vida cotidiana, de ciencias naturales y sociales mediante ecuaciones cuadráticas.			
Resolví algebraicamente las ecuaciones cuadráticas mediante varios métodos, como factorizar, completar el cuadrado y aplicar la fórmula general.			
Identifiqué y representé casos en los cuales la ecuación cuadrática tiene una sola o ninguna solución.			
Evalué el proceso y comprobé resultados y soluciones dadas de un problema matemático.			
Trabajé en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.			

Cuaderno página 54

Reviso mis metas y estrategias

1 Considera las estrategias que escribiste en la página 79: ¿han sido eficaces?, ¿por qué?

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

Lección 5

Funciones cuadráticas

Exploro

¿Qué condición debe cumplir una función?

____

____

¿Cómo crees que se utilizan las funciones cuadráticas en el estudio de fenómenos naturales?

____

____

Aprenderé a:

Comprender la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$:

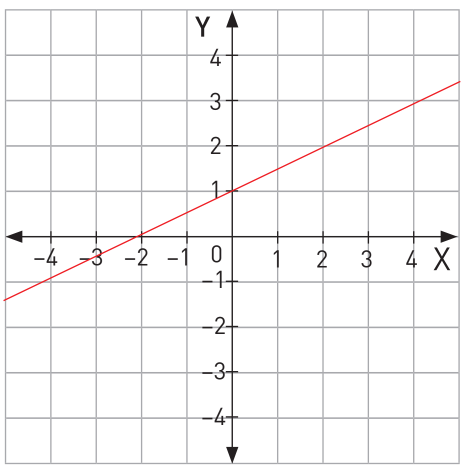
- Reconociendo la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ en situaciones cotidianas y otras asignaturas.
- Representándola en tablas y gráficos.
- Determinando puntos especiales de su gráfica.
- Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático.

Necesito recordar...

- Concepto de función.
- Funciones lineales y afines.
- Ecuaciones lineales y cuadráticas.

¿Qué debo saber?

1. La siguiente gráfica corresponde a una función afín.



a. ¿En qué puntos la recta interseca con el eje X e Y?

Eje X:

Eje Y:

b. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

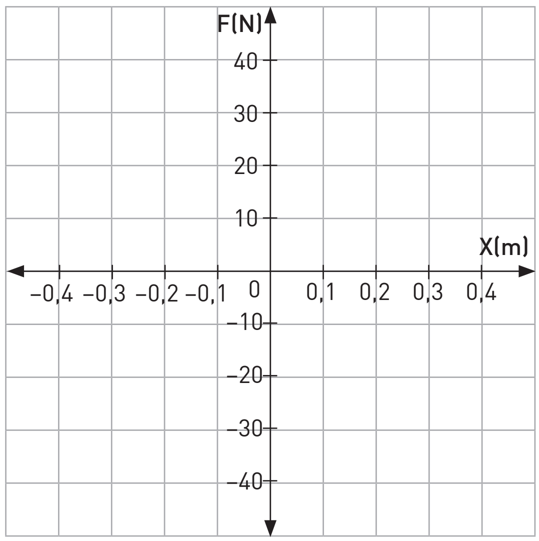
$m =$

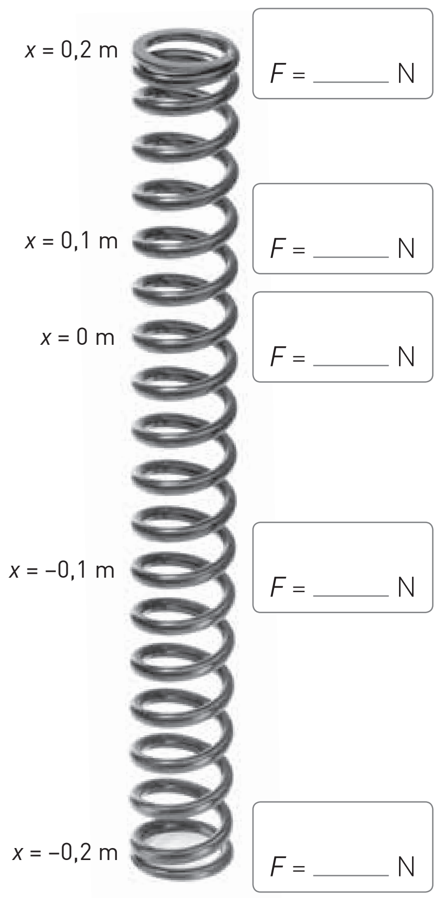
c. ¿Cuál es la representación algebraica de la función?

2. Ciencias naturales. El estiramiento o compresión de un resorte es directamente proporcional a su fuerza de restitución. Esta relación, conocida como la ley de Hooke, está dada por $F = -kx$, donde F es la fuerza de restitución; x, su deformación (estiramiento o compresión) y k es la constante de deformación del resorte. Para el resorte de la imagen, la relación es $F = -100x$.

a. Calcula la fuerza de restitución del resorte para cada distancia en que este se estira o comprime en la imagen.

b. A partir de los datos obtenidos, traza la gráfica que representa la relación entre la fuerza de restitución y la elongación del resorte.





c. ¿La relación entre ambas magnitudes corresponde a una función? ¿Por qué?

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Comprendí el concepto de función.	○	○	○
Interpreté y grafiqué funciones lineales o afines.	○	○	○
Modelé problemas de ciencias naturales mediante funciones lineales.	○	○	○
Usé modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.	○	○	○
Participé en la búsqueda de una posible solución a un problema.	○	○	○

Cuaderno página 56

Tema 1: ¿Cuándo se dice que una función es cuadrática?

¿Qué aprenderé?

A reconocer una función cuadrática en situaciones de la vida diaria.

¿Para qué?

Para distinguir una función cuadrática de las funciones lineales y afines, tanto de forma gráfica como algebraica.

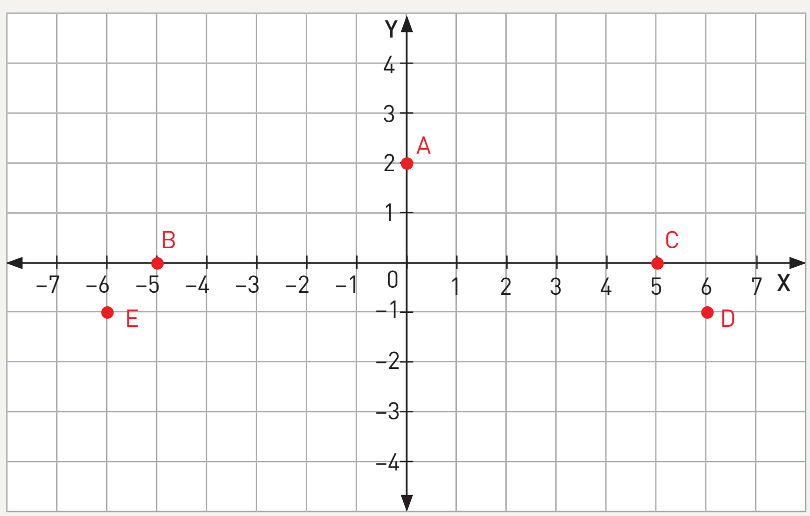
Taller

En la imagen, se puede ver el puente de la bahía de Sídney, en Australia, visto desde el mar. Observen la fotografía y respondan.

224111326 Tooykrub

1. ¿Es simétrica la estructura? Si es así, tracen en la imagen el eje de simetría.
2. ¿Cuál es el punto más alto del puente?, ¿este punto pertenece al eje de simetría?
3. Si la curva del puente pudiera proyectarse bajo el mar, ¿cómo creen que continuaría? Expliquen.

Si se relaciona la línea horizontal del puente, donde transitan los vehículos, con el eje X, se pueden ubicar algunos puntos que representen los del puente para identificar cuál es la función asociada a la curva de la imagen.



4 Escriban las coordenadas de los puntos anteriores en la tabla. Luego, verifiquen que son puntos de la gráfica de la función $f(x) = -\frac{2}{25}x^2 + 2$.

x	y	$f(x)$

Usa calculadora
Para explorar

5 Esbocen la gráfica de la función en el gráfico anterior. ¿Cómo podrían describir esta curva?

6 ¿Con cuáles puntos de la gráfica se puede relacionar la ecuación $-\frac{2}{25}x^2 + 2 = 0$? Justifiquen.

7 ¿Cómo se puede interpretar el punto más alto del puente en el contexto de la función $f(x)$? Expliquen.

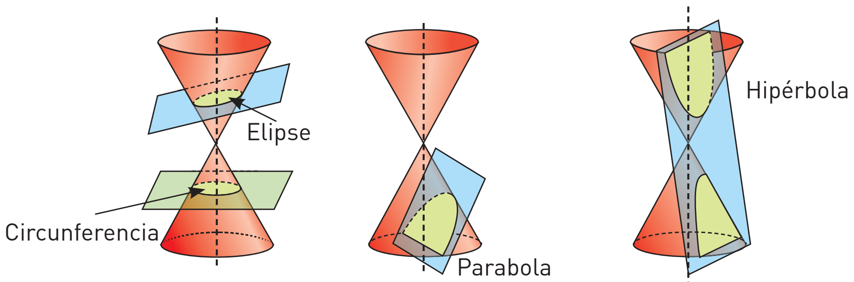
	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Matemática e historia

Secciones cónicas

Se les llama cónicas a cuatro curvas planas: circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas, formadas mediante la intersección de un cono circular recto con un plano, siempre que este plano no pase por el vértice del cono.

Si el plano es perpendicular al eje del cono, la intersección resultante es una circunferencia. Si el plano está ligeramente inclinado, el resultado es una elipse. Si el plano es paralelo al costado del cono, se produce una parábola. Si el plano corta ambas extensiones del cono, produce una hipérbola.



Actividades de proceso

1. Las siguientes construcciones presentan formas parabólicas.

¿Qué características posee cada una de estas **parábolas**?

a. Realiza un bosquejo de la parábola presente en ambas situaciones.

b. Determina si cada parábola es **cóncava** o **convexa**.

A: ______________________ B: ______________________

c. En cada caso, traza el eje de simetría de la parábola y marca el punto de intersección entre el eje de simetría y la parábola. Dicho punto se conoce como **vértice** de la parábola.

d. Luego, determina si el vértice de la parábola es un punto mínimo o máximo según su posición.

En A el vértice es un punto ______________________ y

en B es un punto ______________________.

Glosario

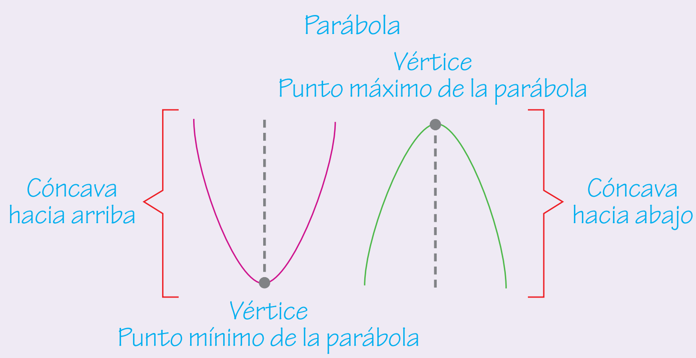
Parábola: corresponde a la gráfica de una función cuadrática.

Se dice que una parábola es **cóncava** (o también cóncava hacia arriba) si se abre hacia arriba y que es **convexa** (o también cóncava hacia abajo) cuando se abre hacia abajo.

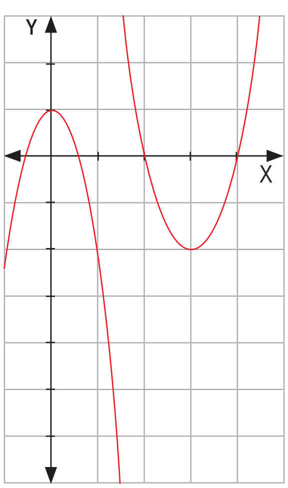
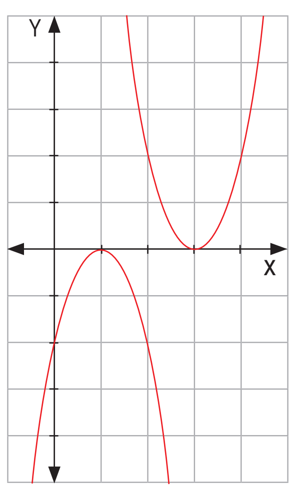
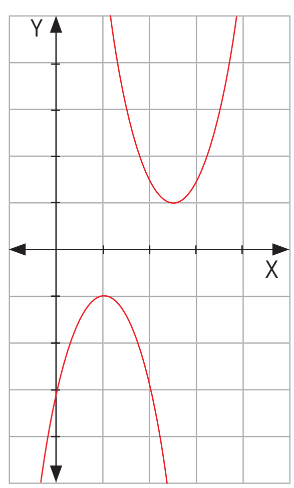
El **vértice** de una parábola es el punto donde la parábola cruza su eje de simetría.

En resumen

- Se dice que una función es **cuadrática** cuando se puede escribir de la forma:
  $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$
  Se puede distinguir el término cuadrático ax^2, el término lineal bx y el término independiente c.
- La gráfica en el plano cartesiano de una función cuadrática es una **parábola**, curva simétrica que se observa en la figura. Una parábola se dice cóncava hacia arriba si la curva se abre hacia arriba y cóncava hacia abajo si se abre hacia abajo.
- Toda parábola posee un punto máximo o mínimo llamado **vértice**, por donde pasa el eje de simetría de la parábola. Este punto será máximo cuando la parábola es cóncava hacia abajo y mínimo cuando es cóncava hacia arriba.



- Los puntos en que la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersecan el eje X se asocian a las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, y se cumple que:

Si la parábola interseca en dos puntos el eje X, la ecuación tiene dos soluciones en los números reales. 	Si la parábola interseca en un solo punto el eje X, la ecuación tiene una solución en los números reales. 	Si la parábola no interseca el eje X, la ecuación no tiene solución en los números reales. 

Actividades de práctica

1. Completa la siguiente tabla, indicando si cada expresión es una función cuadrática. Si es así, determina sus coeficientes ***a***, ***b*** y ***c***.

Función	¿Es cuadrática?	Coeficientes		
		a	*b*	*c*
$f(x) = 5x^2$				
$g(x) = x^2 - 2$				
$h(x) = -2x^3 + 2x + 4$				
$q(x) = (x + 1)(x - 9)$				
$r(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 5)$				
$t(x) = (2x + 1)^2 - 4x^2 - 1$				

2. En las siguientes funciones cuadráticas, para cada valor de ***x***, ¿cuál es el punto correspondiente en su gráfica?

a. $f(x) = -5x^2 + 6$, con $x = 0$ el punto es

b. $q(x) = \frac{3}{4}x^2 + x + 1$ con $x = -2$ el punto es

c. $r(x) = -8x^2 - 3x + 1$ con $x = \frac{1}{2}$ el punto es

d. $p(x) = x^2 - x + 2$ con $x = 0{,}6$ el punto es

e. $s(x) = -2x^2 - 12x + 9$ con $x = 4$ el punto es

f. $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$ con $x = -3$ el punto es

3. Francisca y Mateo discuten sobre la función $f(x) = x^2 + 5x$. Mateo afirma que la función no es cuadrática pues no está presente el término independiente. Francisca, por otra parte, afirma que es una función cuadrática y que posee un término independiente. ¿Quién tiene la razón?, ¿por qué?

4. El vértice de la parábola de una función cuadrática se encuentra en el segundo cuadrante de un plano cartesiano. Si el vértice es un punto máximo, ¿la parábola intersecará el eje X? Si es así, ¿en cuántos puntos lo intersecará?

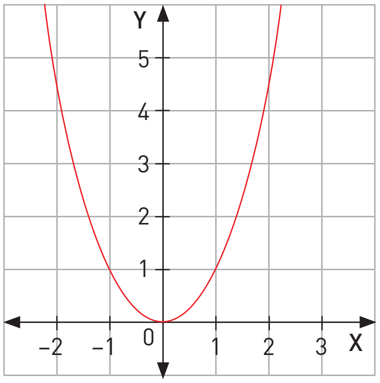
5. Observa cada gráfica y determina la concavidad de cada una y si sus vértices son máximos o mínimos. Calcula, además, las soluciones de las ecuaciones cuadráticas cuando el valor de la función es igual a cero.

a. $f(x) = x^2$

Concavidad: ______________________

Vértice: ☐

$x_1 =$ ☐ $x_2 =$ ☐

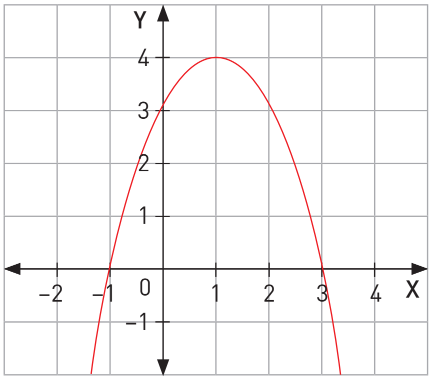


b. $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

Concavidad: ______________________

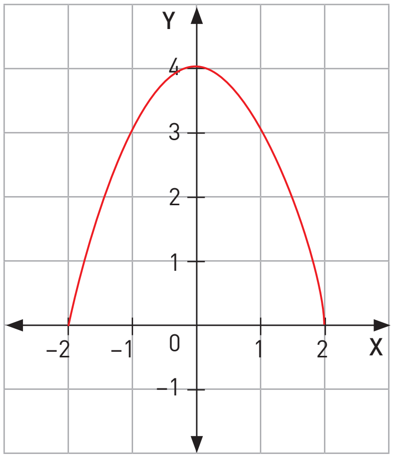
Vértice: ☐

$x_1 =$ ☐ $x_2 =$ ☐



¿Qué aprendí hoy?

Se desea medir la altura máxima y la distancia máxima de un chorro de agua que es lanzado con una manguera. Para realizar las mediciones de distancia y altura se trazó en la pared un plano cartesiano graduado en metros.



a. Observa la trayectoria del chorro de agua. ¿Se la puede relacionar con una función cuadrática? Comenta con un compañero o compañera.

b. ¿Cómo se puede describir la trayectoria del chorro de agua en términos de la concavidad y el vértice?

c. Observa el punto de la salida del agua de la manguera y el punto de su llegada al suelo. ¿A qué puntos corresponden en la gráfica de una función cuadrática? Explica.

d. ¿Cuál es la distancia máxima alcanzada por el chorro de agua?

e. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el chorro de agua?

f. ¿Qué punto de la parábola representa la altura máxima del chorro de agua?

Cuaderno página 57

Tema 2: ¿Cómo se interpretan los parámetros de la gráfica?

¿Qué aprenderé?

A relacionar la forma general y la forma canónica de una función cuadrática y graficarla usando diversas estrategias.

¿Para qué?

Al graficar funciones cuadráticas es posible conocer de forma detallada la parábola y sus principales puntos.

Actividad en pareja

Taller

1. Consideren las funciones $f(x) = x^2 + 4x + 3$ y $g(x) = (x + 2)^2 - 1$. ¿Son iguales o distintas estas funciones?, ¿cómo pueden determinarlo? Comenten.

2. Cada uno de ustedes escoja una de las funciones y determine algún punto que pertenezca a la gráfica de la función, reemplazando un valor cualquiera en su expresión algebraica. Escojan seis valores distintos y completen la tabla.

Usa calculadora Para explorar

x	$f(x)$	$g(x)$

3. Según los valores de la tabla, ¿las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son iguales o distintas? Justifiquen su respuesta.

4. Según su representación algebraica, ¿las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son iguales o distintas?, ¿por qué?

5. Observando la expresión algebraica, ¿cuál de ellas les parece más fácil de graficar?, ¿por qué?

6. Grafiquen cada función en un plano cartesiano. ¿Se pueden reconocer los valores de los coeficientes en cada caso con los puntos de la gráfica? Expliquen.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Ya que la parábola tiene ciertas características gráficas, es posible esbozar su gráfica a partir de algunos puntos principales que se pueden calcular a partir de los coeficientes de la función. Por ejemplo, para graficar $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, podemos buscar los puntos de intersección con los ejes, y el vértice.

a. ¿En qué punto la función interseca el eje Y?

Para calcular el punto de intersección con el eje Y, se reemplaza en la función el valor asociado de x.

Entonces, $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 6 = \boxed{}$.
Luego, el punto es (0, ______)

b. ¿En qué punto la función interseca el eje X?

Para calcular el o los puntos de intersección con el
eje X, se iguala la función a cero y se resuelve la ecuación correspondiente.

Entonces de la ecuación $2x^2 - 8x + 6 = 0$ se obtienen las soluciones $x_1 = \boxed{}$ y $x_2 = \boxed{}$. Luego, los puntos son (______, 0) y (______, 0).

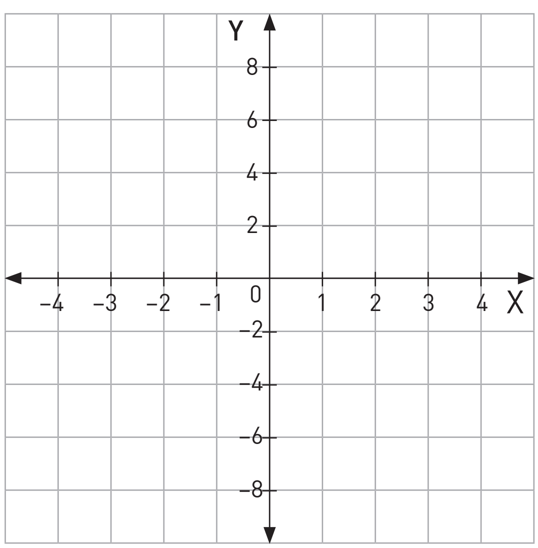
c. ¿En qué punto se encuentra el vértice de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$?

El vértice se puede obtener a partir de sus coeficientes a, b y c como el punto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Los coeficientes de $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ son $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ y $c = \boxed{}$, y se reemplazan en $-\frac{b}{2a} = \boxed{}$ y $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \boxed{}$.

Luego, el vértice es el punto $\boxed{}$.

d. Ubica todos los puntos calculados en el siguiente gráfico. Luego, únelos a mano alzada para obtener la gráfica de la función.



Glosario

Forma canónica: se dice de la expresión algebraica de una función cuadrática cuando se escribe de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
Así, se puede deducir directamente que el vértice de la parábola se encuentra en el punto (h, k).

2. Otra forma de determinar el vértice de la parábola consiste en escribir la función en su **forma canónica** y luego reconocer en su expresión algebraica los valores de las coordenadas del vértice. Por ejemplo, determina el vértice de la parábola de $f(x) = 3x^2 + 30x + 71$, escribiéndola en su forma canónica:

$f(x) = 3(x^2 + 10x) + 71$ — *si $a \neq 0$, se factorizan los términos que involucran x por el valor de a.*

$f(x) = 3\left[\left(x^2 + 10x + \boxed{}\right) - \boxed{}\right] + 71$ — *se completa el cuadrado de binomio y se resta la constante sumada.*

$f(x) = 3\left[\left(x + \boxed{}\right)^2 - \boxed{}\right] + 71$ — *se factoriza el cuadrado de binomio.*

$f(x) = 3(x + 5)^2 - \boxed{} + 71$ — *se eliminan los paréntesis.*

$f(x) = 3(x + 5)^2 - 4$ — *se suman los valores constantes.*

Luego, la función escrita en forma canónica es $f(x) = 3(x + 5)^2 - 4$. De esta expresión, se concluye que el vértice de la parábola se ubica en el punto $(-5, -4)$.

¿Qué dificultades encontraste?, ¿cómo lo superaste?

3. Determina la expresión algebraica de la función cuadrática cuyo vértice está en $(2, -5)$ y cuya gráfica contiene al punto $(3, -9)$. Describe su gráfica.

Se representa la función en su forma canónica

$f(x) = a(x - h)^2 + k$ $\quad\quad$ $f(x) = ax - (\boxed{})^2 - \boxed{}$.

Se reemplazan los valores del vértice $(2, -5)$

Se reemplaza el punto $(3, -9)$ porque pertenece a la gráfica de $f(x)$, por hipótesis.

$f(3) = a(3 - 2)^2 - 5 = -9$ $\quad\quad$ $a = \boxed{}$

Entonces, la función es $f(x) = \boxed{}$ y, en su forma general,

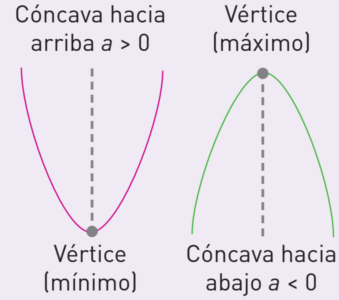
$f(x) = \boxed{}$.

Por hipótesis, el vértice se encuentra en $(2, -5)$ y su concavidad es ________________ (porque $a = \boxed{}$).

Además, como la primera coordenada del vértice es 2, el eje de simetría corresponde a la recta $\boxed{}$.

En resumen

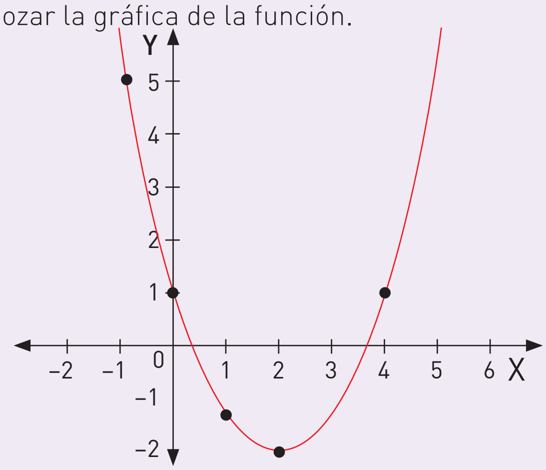
Al graficar una función cuadrática, se debe considerar el signo del coeficiente a para determinar la concavidad de la parábola.
Si $a > 0$, es cóncava hacia arriba, y su vértice es un punto mínimo. Si $a < 0$, es cóncava hacia abajo y su vértice es un punto máximo.



Se puede esbozar la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ de dos formas:

- Utilizando una **tabla de valores**, en la que para algunos valores de x, se calculen los valores de y. Luego, los puntos ubicados en el plano cartesiano se unen a mano alzada de los puntos para esbozar la gráfica de la función.

x	$y = ax^2 + bx + c$
x_1	$y_1 = a \cdot (x_1)^2 + b \cdot (x_1) + c$
x_2	$y_2 = a \cdot (x_2)^2 + b \cdot (x_2) + c$
x_3	$y_3 = a \cdot (x_3)^2 + b \cdot (x_3) + c$
x_4	$y_4 = a \cdot (x_4)^2 + b \cdot (x_4) + c$
⋮	⋮
x_n	$y_3 = a \cdot (x_n)^2 + b \cdot (x_n) + c$

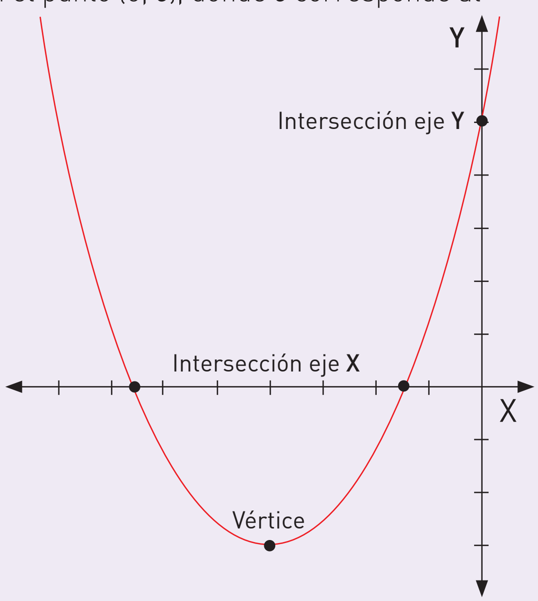


- Ubicando los **principales puntos** de la gráfica, que luego se unen a mano alzada.

Intersección con el eje Y: se ubica en el punto $(0, c)$, donde c corresponde al término independiente de la función.

Intersección con el eje X: se ubican en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, donde x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
Existen dos, uno o ningún punto de intersección, dependiendo de las soluciones en los números reales de la ecuación.

Vértice de la parábola: es el punto máximo o mínimo de la parábola. Sus coordenadas están dadas por $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$.



Actividades de práctica

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cuando consideres que la afirmación es falsa.

a. ________ Si $a > 0$, la gráfica de la función cuadrática es cóncava hacia arriba y su vértice es un punto máximo.

b. ________ Si la gráfica de la función cuadrática interseca el eje X en dos puntos, entonces ninguno de esos puntos puede ser el vértice de la parábola.

c. ________ La gráfica de una función cuadrática siempre interseca el eje Y en un solo punto.

d. ________ La gráfica de una función cuadrática con coeficiente $a < 0$ y cuyo vértice se encuentre en el punto (0, 3) no intersecará el eje X.

2. Determina la concavidad de las siguientes funciones cuadráticas

a. $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$ Concavidad: ____________________

b. $g(x) = -x(x + 3)$ Concavidad: ____________________

c. $h(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 3\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)$ Concavidad: ____________________

d. $p(x) = -\frac{3}{4}x(-0,4x + 2x) + 3x - 3$ Concavidad: ____________________

3. Calcula los puntos principales de cada función y traza un bosquejo de sus gráficas.

a. $f(x) = -2x^2 + 3$

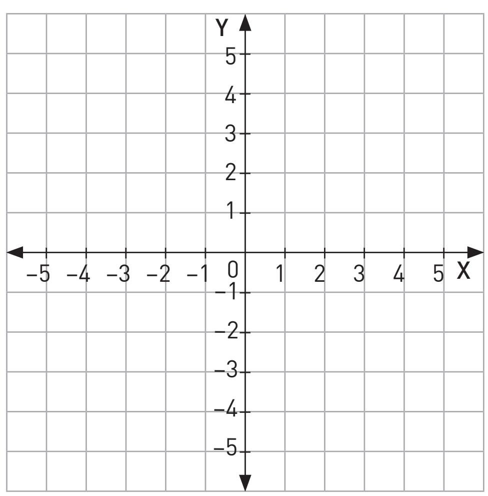
Intersección con eje Y: [ ], intersección con eje X: [ ] y [ ]

Vértice: [ ].

b. $g(x) = 3x^2 - 24x + 16$

Intersección con eje Y: [ ], intersección con eje X: [ ] y [ ].

Vértice: [ ].



4. Grafica en tu cuaderno las siguientes funciones cuadráticas usando tablas de valores.

a. $f(x) = -x^2 + 7$

b. $g(x) = x^2 + 2x - 2$

5. Escribe las siguientes funciones cuadráticas en forma canónica. Luego, determina su vértice y su eje de simetría.

a. $f(x) = 4x^2 + 5$

b. $f(x) = 9 - 4x^2$

c. $f(x) = 2x^2 - 3x - 14$

d. $f(x) = x^2 - 7x - 10$

e. $f(x) = x^2 + 5x + 6$

f. $f(x) = 7 - 4(x - 5)^2$

6. Si el vértice de la gráfica se encuentra en el punto (32, 3), ¿cuál es el valor de k en la función $f(x) = x^2 + 8kx + 16k^2 + 3$?

7. Tamara analiza una función cuadrática y le comenta a Sebastián: la gráfica de esta función es una parábola cuyo vértice es el punto (1, 2) y que también pasa por el punto (1, –1).

a. ¿Estás de acuerdo con Tamara?, ¿es esto posible? Explícalo geométricamente.

b. ¿Puedes explicarlo de manera algebraica?, ¿cómo?

8. Justifica, en cada caso, por qué no existe una función cuadrática cuya gráfica contenga los puntos dados.

a. (1, 1) y (1, 2)

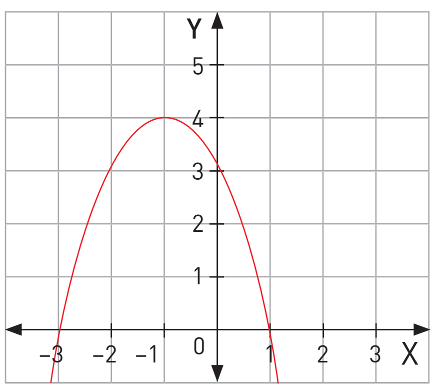
b. (3, 4), (4, 3) y (3, 6)

c. (4, 5), (5, 5) y (6, 5)

d. (–2, 7), (8, 5) y (8, 7)

¿Qué aprendí hoy?

1 Determina la representación algebraica de la siguiente gráfica.



2 Respecto de la parábola de la función $f(x) = -(x + 4)^2 - 4$, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justifica.

a. ________ Tiene concavidad positiva.

b. ________ Interseca el eje Y en el punto (0, –20).

c. ________ Su vértice está en el punto (4, 4).

d. ________ El punto (4, 0) pertenece a la parábola.

e. ________ Su eje de simetría es la recta $x = 4$.

Cuaderno página 59

Tema 3: ¿Cómo cambia la gráfica según cada parámetro?

¿Qué aprenderé?

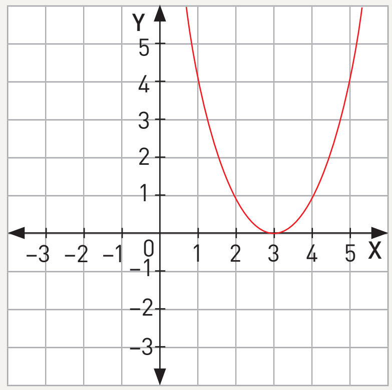
A observar los cambios en la gráfica de una función cuadrática al variar sus parámetros.

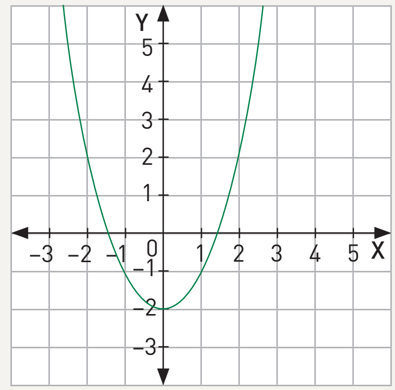
¿Para qué?

Comprender la relación entre los parámetros de una función cuadrática y las características de la gráfica, en particular, su posición en el plano cartesiano.

Taller

1 Observen las gráficas de las siguientes funciones $g(x)$ y $h(x)$. Luego, respondan.





a. ¿Son cuadráticas las funciones anteriores?, ¿por qué?

b. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian ambas funciones?

2 Representen en cada gráfico la función $f(x) = x^2$.

a. ¿Cómo pueden describir la diferencia entre la gráfica de $f(x) = x^2$ y las gráficas originales en cada caso? Expliquen.

b. Completen las siguientes tablas con algunos valores para x.

x	$f(x)$	$g(x)$

x	$f(x)$	$h(x)$

c. ¿Qué pueden observar al comparar los valores en las tablas?

d. ¿Cuál es la representación algebraica de $g(x)$ y $h(x)$?

3 La gráfica de color verde representa, por definición, los puntos tales que $y = h(x)$.

a. ¿Por qué el punto (1, 1) no pertenece a la gráfica? Expliquen.

b. ¿Se cumple que $y > h(x)$? Justifiquen.

c. Considerando lo anterior, ¿cuáles son todos los puntos en el plano cartesiano que corresponden a $y > h(x)$? Fundamenten su respuesta.

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente

Grupalmente

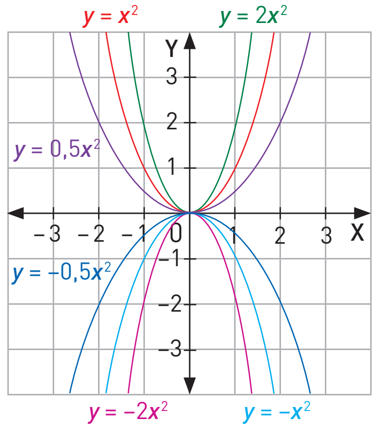
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente

Grupalmente

Actividades de proceso

1. Analiza las parábolas de $f(x) = ax^2$ para distintos valores de a y contesta.



a. ¿Varió la forma de la parábola para los distintos valores de a?

____

____

b. ¿Entre qué parábolas se ubicaría la correspondiente a $h(x) = 1{,}5x^2$?, ¿y la correspondiente a $g(x) = -0{,}8x^2$?

____

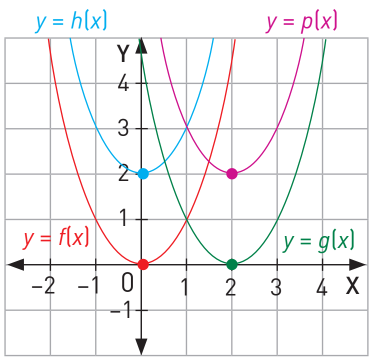
____

c. ¿La parábola de $p(x) = 2(x - 1)^2 + 1$ tiene la misma forma que alguna de las representadas?, ¿se ubica en la misma posición? Justifica.

____

____

2. Analiza las parábolas considerando que todas tienen la misma forma pero distinta posición. Luego, responde.



a. Si $f(x) = x^2$, ¿cuál es la forma canónica de $g(x)$, $h(x)$ y $p(x)$?

Como todas las parábolas tienen la misma forma, basta con analizar su vértice. Así:

- $g(x) = (x - 2)^2$, ya que su vértice es V(2, 0).
- $h(x) = x^2 + 2$, ya que su vértice es V(0, 2).
- $p(x) = (x - 2)^2 + 2$, ya que su vértice es V(2, 2).

b. Si se considera que las parábolas de $g(x)$, $h(x)$ y $p(x)$ son una traslación de la parábola de $f(x)$, ¿cuál es el vector de cada traslación en cada caso?

$g(x) \rightarrow$ $\vec{v}$ ______ $h(x) \rightarrow$ $\vec{w}$ ______ $p(x) \rightarrow$ $\vec{z}$ ______

3. Determina el o los puntos que son solución de la inecuación $y < \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$.

PASO 1 Identifica la función cuadrática asociada.

La función cuadrática es $f(x)$ =

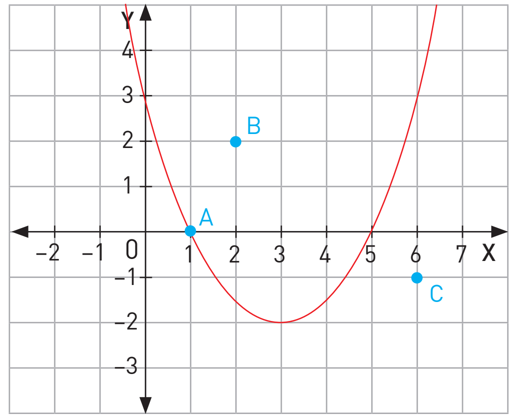
PASO 2 Representa la gráfica de $f(x)$ y ubica tres puntos en distintos sectores: en la parábola, al interior de ella y en el exterior.

¿Cuáles son los puntos que se marcaron en el plano cartesiano?

A =

B =

C =



PASO 3 Verifica para qué punto se satisface la inecuación.

Reemplaza uno de los puntos en la inecuación y analiza si se cumple o no.

Por ejemplo, para el punto (4, 0), se reemplaza:

$$0 < \frac{1}{2}(4)^2 - 3 \cdot 4 + \frac{5}{2} \qquad 0 < 8 - 12 + \frac{5}{2} \qquad 0 < -\frac{3}{2}$$

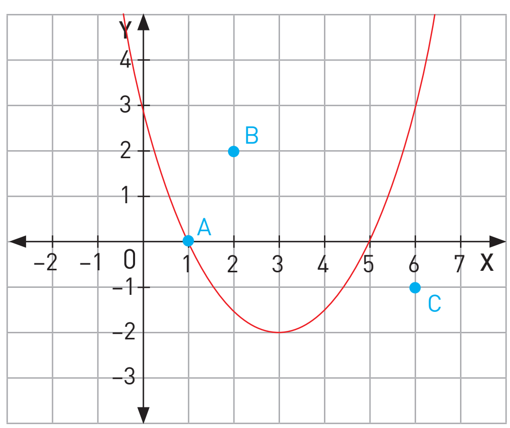
Y se concluye que la desigualdad es **falsa**.

Punto A:	Punto B:	Punto C:

PASO 4 Marca el sector que corresponde a la solución.

El punto cuyos valores hicieron verdadera la desigualdad pertenece a la solución y permite identificar el sector. ¿Cuál es este punto?

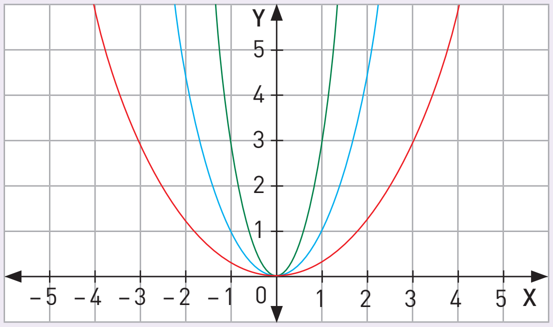
¿Hay alguna otra manera de que lo puedas hacer? Explica.



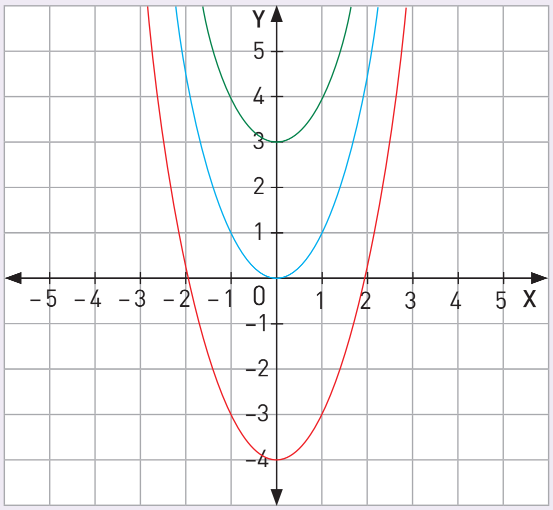
En resumen

En toda función $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- si $0 < a < 1$, se dice que la gráfica de $f(x)$ se **dilata** respecto de la gráfica de la función $g(x) = x^2$.
- si $a > 1$, se dice que la gráfica de $f(x)$ se **contrae** respecto de la gráfica de la función $g(x)$.

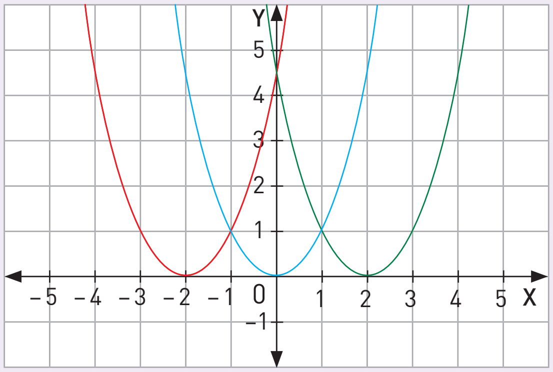


Para cualquier valor de k, la gráfica de $f(x) = x^2 + k$ está **desplazada verticalmente** k unidades hacia arriba respecto de la gráfica de $g(x) = x^2$, si $k > 0$; o bien, $|k|$ unidades hacia abajo, si $k < 0$.



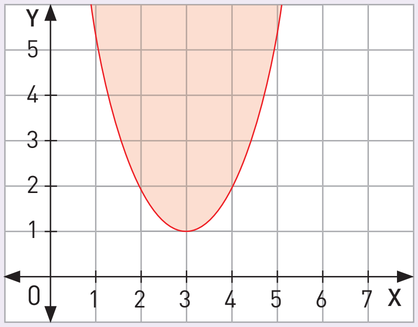
Para cualquier valor de h, la gráfica de la función $f(x) = (x - h)^2$ es una parábola, **desplazada horizontalmente** $|h|$ unidades hacia la izquierda respecto de la gráfica de $g(x) = x^2$, si $h < 0$; o bien, h unidades hacia la derecha, si $h > 0$.

Se pueden combinar los desplazamientos verticales y horizontales de modo que $f(x) = (x - h)^2 + k$ es un desplazamiento vertical en $|k|$ unidades y uno horizontal en $|h|$ unidades. En este caso, el vértice se sitúa en (h, k).



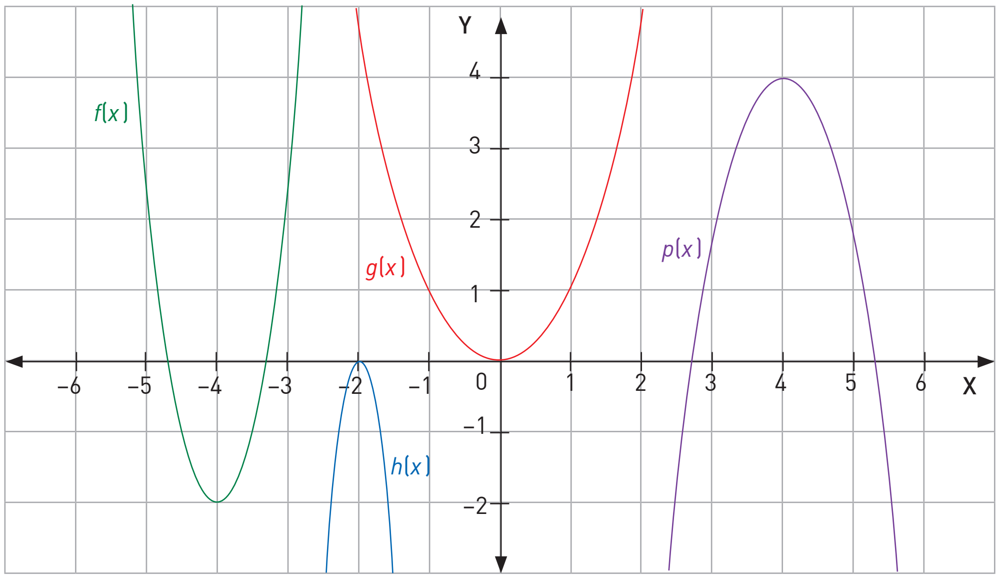
La solución de una **inecuación cuadrática** $y > ax^2 + bx + c$ o $y < ax^2 + bx + c$ se puede representar en el plano cartesiano identificando a cuál de los semiplanos (que divide la parábola) corresponde.

Para reconocerlo, se escoge un punto del plano cartesiano (que no pertenezca a la gráfica de la función cuadrática asociada $f(x) = ax^2 + bx + c$) y se reemplaza en la inecuación original. Si la satisface, el sector del plano que contiene a dicho punto es la solución. Si no la satisface, es el semiplano que lo complementa.



Actividades de práctica

1. Los coeficientes a, r, n y m de las siguientes funciones pertenecen a $\mathbb{R}$. Observa el gráfico, estima los valores para los coeficientes y ordénalos de forma creciente.



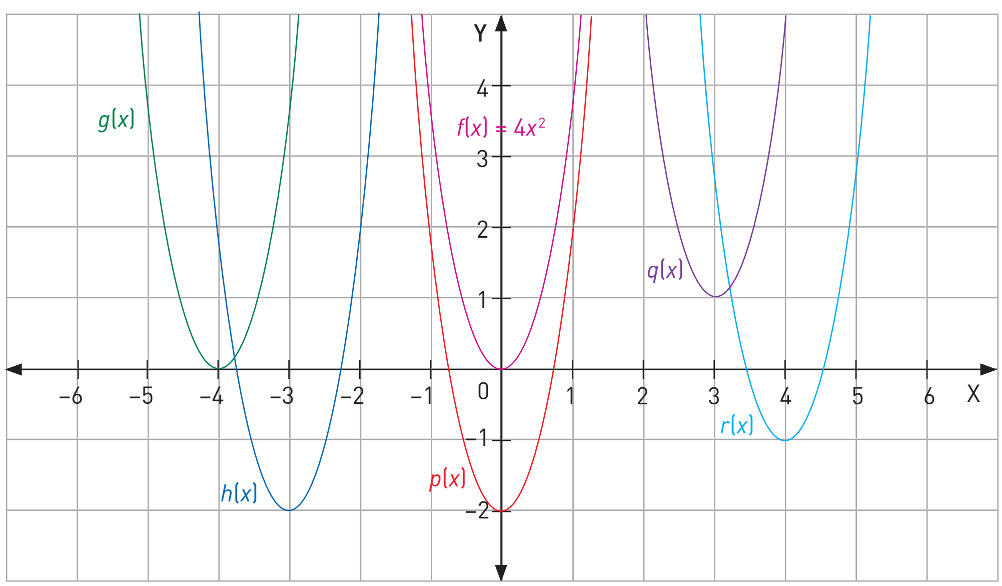
$f(x) = ax^2 + 40x + 78$

$g(x) = nx^2$

$h(x) = rx^2 - 32x - 32$

$p(x) = mx^2 + 16x - 18$

2. Las siguientes gráficas corresponden a traslaciones de la función $f(x) = 4x^2$. Escribe cada una de ellas en su forma canónica.

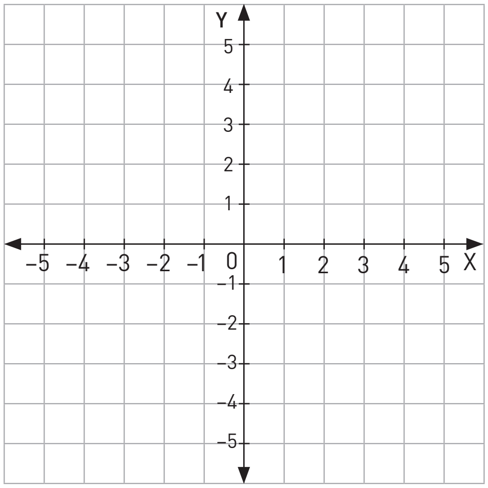


$f(x) = 4x^2$ $h(x) =$ ____________ $q(x) =$ ____________

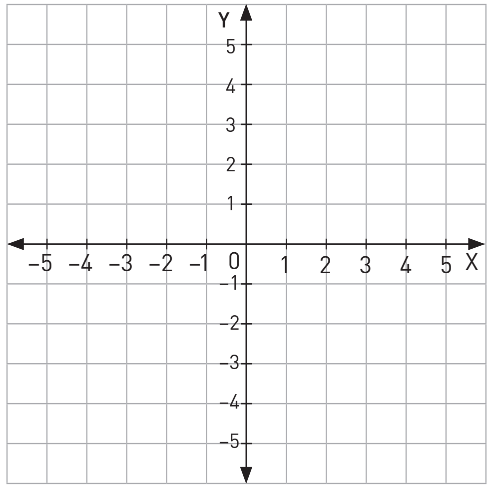
$g(x) =$ ____________ $p(x) =$ ____________ $r(x) =$ ____________

3. En parejas, marquen el conjunto de puntos en el plano que son soluciones de las siguientes inecuaciones.

a. $y > x^2 + 4x + 3$



b. $y < -2x^2 + 8x - 4$



c. ¿Qué conjuntos de puntos se incluyen a las soluciones encontradas si las inecuaciones fueran $y \geq x^2 + 4x + 3$ y $y \leq -2x^2 + 8x - 4$ respectivamente? Expliquen.

4. Sofía compara las funciones $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 8\boldsymbol{x}^2$ y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = -8\boldsymbol{x}^2$, concluyendo que las ramas de la parábola de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ están más cerca del eje Y que las de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, pues su coeficiente en el término cuadrático es mayor. ¿Cómo le fundamentarías a Sofía que sus conclusiones son erróneas?

5. Se aplica una traslación T_1 a la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 9(\boldsymbol{x} - 2)^2 + 3$, de la que se obtiene la función $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 9(\boldsymbol{x} - 1)^2 - 1$. Luego, se traslada esta función aplicando el vector de traslación $T_2(-2, 2)$, y se obtiene la función $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$.

a. ¿Qué coordenadas tiene el vector de traslación T_1?

$T_1 = \boxed{}$

b. ¿Cuál es la representación algebraica de la función $h(x)$?

$h(x) = \boxed{}$

¿Qué aprendí hoy?

Determina una función cuadrática de la forma $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2$ que pase por el punto (6, 18).

a. ¿La gráfica de $f(x)$ es más abierta o más cerrada que la de $g(x) = x^2$?

b. ¿Su concavidad es positiva o negativa?

c. Si se traslada esta función aplicando el vector de traslación $T_1(-2, 2)$, se obtiene la función $h(x)$. ¿Cuál es la función $h(x)$?

d. Traza la gráfica de $h(x)$ y determina la solución de la inecuación $h(x) < 0$.

Cuaderno página 63

Tema 4: ¿En qué situaciones se aplican las funciones cuadráticas?

¿Qué aprenderé?

A modelar y resolver situaciones utilizando funciones cuadráticas.

¿Para qué?

Para resolver problemas de otro contexto modelando situaciones en las que se utilice la función cuadrática.

Ayuda

El resultado de todo problema matemático con un contexto determinado debe ser interpretado ajustándose a dicho contexto. Sean cantidades o mediciones, todo resultado numérico de este tipo debe tener alguna unidad de medida asociada o alguna descripción que sea **pertinente** a la solución del problema.

Taller

La señora Laura desea vender empanadas y necesita determinar cuál debe ser el precio de venta para obtener las mayores ganancias. El precio debe ser tal que permita cubrir los costos de producción y el trabajo realizado.

1 Si se ha calculado que la ganancia obtenida está dada por la función $G(p) = -\frac{1}{5}p^2 + 350p - 100\,000$, donde p el precio en que se vende cada empanada (en pesos).

a. ¿De cuánto será la ganancia si vendiera cada una a \$ 1000?

b. ¿Qué ocurrirá con la ganancia si las vendiera a \$ 400? Expliquen.

c. ¿Qué ocurrirá si las vendiera a un precio menor? Justifiquen.

2 Al observar la expresión algebraica de la función $G(p)$, ¿es posible decidir si la función tiene un valor máximo o mínimo?, ¿a qué punto de la gráfica se asocia este valor?

a. En el contexto del problema, ¿cómo se interpreta dicho valor?

b. Entonces, ¿a cuánto debe vender cada empanada la señora Laura para que su ganancia sea máxima?

c. ¿Cuál sería esa ganancia?

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Actividades de proceso

Antonio analiza los precios y la cantidad de productos vendidos para fijar el precio de venta de sus artesanías. Él ha observado que, de acuerdo a la **demanda**, la cantidad de productos vendidos disminuye al aumentar su precio de venta, según la función $x(v) = -0{,}25v + 600$, donde x corresponde a la cantidad de artesanías y v al precio de venta. Como corresponde, el ingreso total I, obtenido en la venta respecto de la cantidad de productos vendidos x, está dado por la función $I(x) = vx$. ¿A qué precio debe vender Antonio cada uno de sus productos para tener el máximo de ingresos con la venta?

a. Expresa el ingreso total en función del precio de venta v.

El ingreso total de la venta está dado por la función $I(x) = vx$

La cantidad x está dada por $x(v) = -0{,}25v + 600$

Al remplazar se obtiene que el ingreso total I en función del precio de venta v corresponde a:

$$I(v) = v \cdot (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$$

Resolviendo algebraicamente se obtiene la función cuadrática:

$$I(v) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Glosario

Demanda: disposición de los consumidores para pagar, pudiendo hacerlo, el precio de un producto. En economía, la ley de la demanda establece que el precio de venta de un bien es inversamente proporcional a su demanda. Es decir, si se aumenta el precio de venta de un producto, menos cantidad de gente lo comprará.

b. Calcula el vértice de la parábola de la función $I(v)$ e interprétalo.

El vértice corresponde al punto __________ de la parábola. Al calcularlo se obtiene la coordenada:

Esta coordenada indica ____________________

Esta coordenada indica ____________________

El producto se debe vender a \$__________ para obtener un ingreso máximo de \$__________.

En resumen

La función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ como modelo matemático permite representar fenómenos naturales, como la altura de un cuerpo respecto del tiempo al lanzarlo verticalmente, o bien, en caída libre, así como problemas de optimización, cuyo objetivo es encontrar el valor de la variable independiente x para que la variable dependiente y sea máxima o mínima, como el precio de venta de un producto para obtener una ganancia máxima.

Se debe considerar que los valores que pueden tomar ambas variables están determinados y restringidos por las características que describen. Por ejemplo, si una de las variables es el tiempo, esta magnitud no puede tener valores negativos. Así, en la gráfica se debe contemplar solo los valores permitidos en cada variable.

Y él ¿quién es?

Isaac Newton (1643-1727)

Físico, filósofo, alquimista, inventor, teólogo y matemático inglés. Autor de los *Principia*, donde describe la ley de la gravitación universal, estableció además las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. También destacan sus trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica y el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. Además, desarrolló el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes.

Newton fue el primero en aplicar las mismas leyes naturales a los fenómenos en la Tierra que a los observados en el movimiento de los cuerpos celestes.
A menudo, es calificado como el científico más grande de todos los tiempos y su obra es considerada como la culminación de la revolución científica.

Actividades de práctica

1. Si Antonio ha calculado que el costo para fabricar cada uno de sus productos es de \$500 más un costo fijo de \$40 000, de manera que el costo total C respecto de la cantidad de artesanías x está dado por la función $C(x) = 500x + 40\,000$, entonces su ganancia G corresponde a la diferencia entre el ingreso total y el costo total, es decir $G = I - C$. ¿A qué precio debe vender Antonio cada uno de sus productos para que su ganancia sea máxima?

- **a.** Determina el ingreso total I y el costo C en función del precio de venta v.
- **b.** Calcula la función de ganancia $G(v) = I(v) - C(v)$ a partir de las funciones calculadas.
- **c.** ¿Cuál es el vértice de la parábola de la función $G(v)$?, ¿cómo se interpreta en este contexto?
- **d.** ¿Por qué crees que el precio de venta del producto obtenido en ambas situaciones es distinto? Explica.

2. **Ciencias naturales.** Se lanza verticalmente hacia arriba un objeto A desde el suelo, con una rapidez inicial de 15 m/s. Al mismo tiempo, se deja caer otro objeto B (con rapidez inicial 0 m/s) desde una altura de 30 m.
La altura y de los objetos en cada instante t está dada por $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, donde y_0 corresponde a la altura inicial, v_0 a la rapidez inicial del objeto y g a la aceleración de gravedad terrestre, que se puede aproximar a 10 m/s^2.

- **a.** ¿Cuál es la función que representa la altura de los objetos A y B respecto del tiempo?
- **b.** ¿En qué instante el objeto A alcanza la altura máxima?, ¿a qué altura corresponde?
- **c.** ¿En qué instante los objetos A y B llegan al suelo?
- **d.** En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones $y_A(t)$ e $y_B(t)$. A partir de estas gráficas, determina en qué instante ambos objetos alcanzan la misma altura y a qué altura corresponde. Explica qué procedimiento utilizaste para encontrarla.

3. El ancho de un rectángulo tiene una medida de x cm, mientras que el largo tiene una medida de $10 - x$ cm. Si el área del rectángulo corresponde al producto entre su ancho y su largo, entonces:

- **a.** ¿Qué función representaría al área A del rectángulo respecto de su ancho x?
- **b.** ¿Qué medida debe tener el ancho del rectángulo para que su área sea máxima?, ¿cuánto medirá su área máxima?
- **c.** ¿Cuánto deberá medir el largo del rectángulo?
- **d.** Observando las medidas de largo y ancho obtenidas, ¿qué ocurre con el rectángulo al tener el máximo de área posible? Explica.

4. María José decide vender volantines durante septiembre. El costo total C en función de la cantidad de volantines x es de $C(x) = 60x + 7000$. En el precio de venta v que se va a fijar por cada volantín influye en la cantidad de volantines que se estima que se venderán según la función $x(v) = -0{,}6v + 500$. Además, el ingreso total I en función de la cantidad de volantines vendidos está dado por $I(x) = vx$ y la ganancia G percibida por María José está dada por $G = I - C$.

   a. ¿Cuál es la función correspondiente al ingreso total I y el costo total C respecto del precio de venta v?

   b. Si María José quiere obtener el máximo de ingresos, ¿a qué precio debe vender cada volantín?, ¿cuál sería el ingreso máximo de María José?

   c. ¿Qué función corresponde a la ganancia G respecto del precio de venta v?

   d. ¿A qué precio debe vender María José para que su ganancia sea máxima?, ¿cuál es esa ganancia máxima?

5. La distancia recorrida por una moto que viaja en línea recta se puede modelar con $x(t) = 8t + 3t^2$, donde $x(t)$ está expresada en metros y t, en segundos.

   a. ¿Qué distancia ha recorrido al cabo de 4 segundos?

   b. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando el motorista recorre una distancia de 380 m desde su partida?

6. Florencia, una clavadista, se prepara para su salto sobre una plataforma a 10 m sobre la superficie del agua. La altura de la clavadista mientras cae al agua, en metros, está dada por la expresión $h(t) = -5t^2 + \frac{7}{6}t + 10$, donde t es el tiempo, en segundos, después del salto. ¿Cuánto tiempo tarda Florencia en alcanzar una distancia de 1 m sobre el nivel del agua?


Paolo Bona / Shutterstock.com

¿Qué aprendí hoy?

La altura de un avión que vuela entre dos ciudades se puede modelar con la función $h(t) = 800t - 30t^2$, donde h es la altura en metros y t es el tiempo en minutos transcurridos una vez que despega el avión.

a. ¿Cuánto dura el viaje?

____

b. ¿En qué instante alcanza la altura máxima?

____

c. ¿A qué altura comienza su descenso?

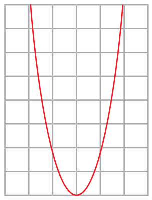
____

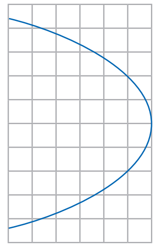
Cuaderno página 66

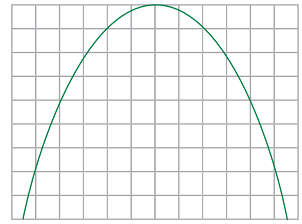
¿Cómo voy?

Evaluación de proceso

1 Indica cuáles de las siguientes parábolas pueden ser gráficas de una función cuadrática. Justifica las que no lo sean. Y para las que sí son cuadráticas, describe su concavidad y si el vértice es punto mínimo o máximo.

a.


b.


c.


2 Determina si cada función es cuadrática o no. Si lo fuera, indica sus coeficientes ***a***, ***b*** y ***c*** y grafícalas utilizando una tabla de valores.

a. $f(x) = 4x + 5x^2 - 2$

b. $g(x) = -[(3x + x^2) - (x^2 + 5)]$

c. $h(x) = 3(x^2 + 2) - x^2(3 + x)$

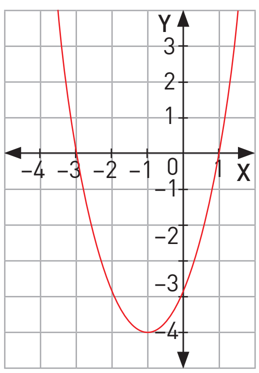
d. $p(x) = x^2\left(\frac{2}{x} - 3\right)$

e. $q(x) = \left(x + \frac{1}{5}\right)^2$

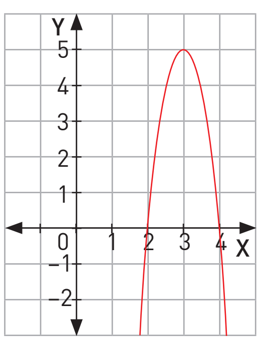
f. $r(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)$

3 Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas, escribe la ecuación cuadrática correspondiente y determina su solución a partir de la gráfica.

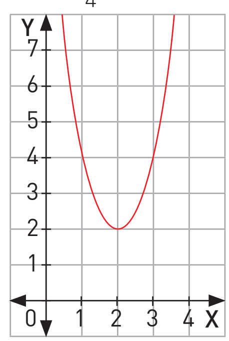
a. $f(x) = x^2 + 2x - 3$



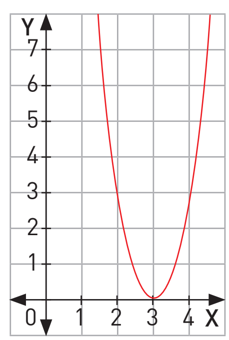
b. $g(x) = -5x^2 + 30x - 40$



c. $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$



d. $m(x) = x^2 - 6x + 9$



4 Determina la concavidad de la gráfica de cada función e indica si sus vértices son puntos máximos o mínimos.

a. $f(x) = -x^2 + 3$

b. $h(x) = 4x + 5 + 3x^2$

c. $g(x) = -(10x - x^2)$

d. $p(x) = \left(x + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3} - x\right)$

e. $q(x) = -\frac{5}{4}(x + 4)^2 - 2$

f. $r(x) = -\left[-3\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - \frac{3}{4}\right]$

5 Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados y el vértice de la gráfica de cada función. Luego, realiza un bosquejo de cada gráfica a partir de estos puntos.

a. $h(x) = x^2 + 6x + 8$

b. $f(x) = -5x^2 + 5$

c. $g(x) = 3x^2 + 6x + 3$

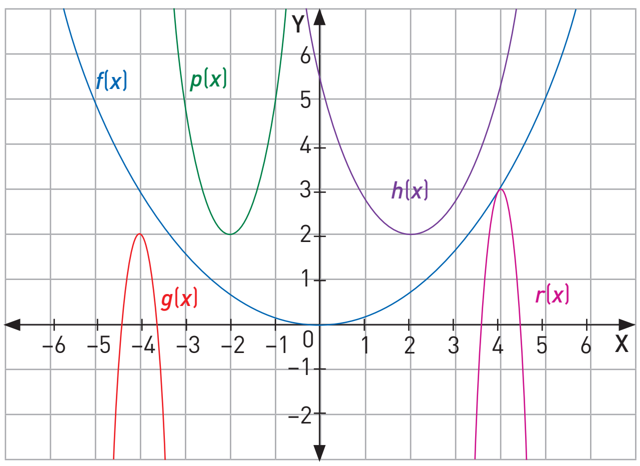
d. $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$

e. $q(x) = (x + 4)^2 - 9$

f. $r(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

6 Observa las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas, determina los valores de los coeficientes cuadráticos ***k***, ***m***, ***n***, ***t*** y ***u***, y ordénalos en forma decreciente.

- $f(x) = kx^2$
- $g(x) = mx^2 - 8x - 158$
- $h(x) = nx^2 - \frac{16}{5}x + \frac{26}{5}$
- $p(x) = t(x + 2)^2 + 2$
- $r(x) = u(x - 4)^2 + 3$



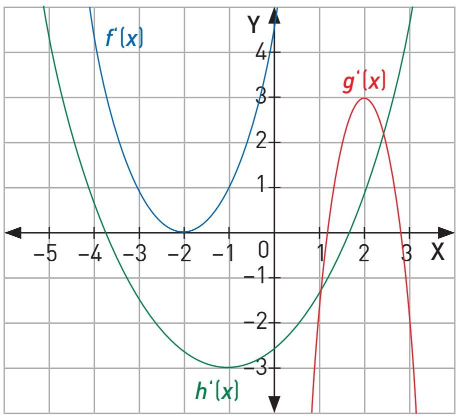
7 En el siguiente plano cartesiano se observan las gráficas de las funciones ***f'***(***x***), ***g'***(***x***) y ***h'***(***x***), que han sido trasladadas de ***f***(***x***), ***g***(***x***) y ***h***(***x***), respectivamente. Escribe las funciones ***f'***(***x***), ***g'***(***x***) y ***h'***(x) en su forma canónica.

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = -5x^2$
- $h(x) = \frac{1}{8}x^2$

a. $f'(x) =$

b. $g'(x) =$

c. $h'(x) =$



8 **Ciencias naturales.** Al patear un balón, la trayectoria que este sigue en el aire está dada por la función $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$, donde x corresponde a la distancia horizontal, medida en metros, e $y = f(x)$ corresponde a la distancia vertical, también medida en metros.

a. ¿Qué forma tiene la trayectoria seguida por el balón en el aire?, ¿por qué?

b. ¿Qué altura ha alcanzado el balón si ha recorrido horizontalmente una distancia de 3 metros?

c. ¿Cuál es la máxima altura que podrá alcanzar el balón?, ¿cuánto recorre horizontalmente para alcanzarla?

d. ¿Cuál es la distancia horizontal que ha recorrido el balón desde que fue pateado hasta que llegó al suelo?

e. Grafica la función que representa la trayectoria de la pelota a partir de tus respuestas en las preguntas anteriores.

9 En la imagen de una copa se puede reconocer una forma parabólica. La copa se usa en la posición A, mientras que, cuando se la lava y se la deja secar, toma la posición B. Si la forma de la copa está determinada por una función cuadrática:

a. ¿Qué posición tendrá la copa si el coeficiente cuadrático de la función es un número positivo?, ¿y si es negativo?

b. ¿Cómo son sus vértices en cada uno de los casos?

c. Si se quisiera aumentar el volumen de la copa para que pueda contener más líquido, ¿qué debería ocurrir con el coeficiente cuadrático de la función cuadrática asociada?

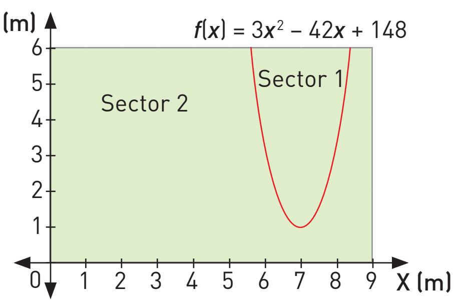
10 Se ha aplicado una traslación en el plano cartesiano a la función $f(x)$ según un vector $T_1(1, 1)$, y se obtuvo la función $g(x) = \frac{1}{3}(x + 3)^2 + 1$. Luego, se aplicó el vector de traslación T_2 dos veces, en forma sucesiva, y se obtuvo la función $h(x) = \frac{1}{3}(x - 1)^2 + 3$.

a. ¿Cuál es la función $f(x)$?

b. ¿Cuál es el valor del vector de traslación T_2?

c. ¿Sería correcto afirmar que $f(x)$ y $h(x)$ tienen gráficas idénticas?, ¿por qué?

11 Se planea dividir una plaza en dos sectores de modo que el límite queda trazado por la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 - 42x + 148$, como se observa en la imagen.



a. Gonzalo indica que, en el sector de la plaza cuyos puntos cumplen con la inecuación $y < 3x^2 - 42x + 148$, se planea construir asientos y juegos infantiles. ¿A qué sector corresponde?

b. ¿Cuál es la condición que describe el otro sector? Explica.

c. En el punto (8, 2), se instalará un poste de luz. ¿A qué sector corresponde?

12 El ingreso total $I(v)$ que se obtiene por la venta de lápices de tinta está dado por la función $I(v) = -\frac{1}{3}v^2 + 200v$, donde v es el precio de venta de cada lápiz (pesos).

a. ¿Cuál debe ser el precio de venta de cada lápiz para que el ingreso total sea máximo?

b. ¿A cuánto equivale este ingreso?

13 La posición de un ciclista que viaja por una ciclovía rectilínea está dada por la función $d(t) = \frac{1}{5}t^2$, donde d corresponde a la distancia, medida en metros, que ha recorrido el ciclista en cada instante t, medido en segundos.

a. Bosqueja la gráfica que representa la distancia recorrida por el ciclista respecto del tiempo.

b. Observando la gráfica que realizaste, ¿cuánto demora el ciclista en recorrer 12 metros? ¿Cómo lo calcularías a partir de la función $d(t)$?

14 **Ciencias naturales.** Cuando un objeto se lanza verticalmente hacia arriba, su altura y, en metros, que alcanza en cada instante t, en segundos, se puede modelar por la función $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}g t^2$, donde y_0 es la altura inicial del objeto, v_0 su rapidez inicial y g la aceleración de gravedad terrestre, cuyo valor aproximado es de 10 m/s^2. Si desde una altura de 15 m se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una rapidez inicial de 10 m/s:

a. ¿Cuál es la función que representa la altura del objeto respecto del tiempo?

b. ¿En qué instante el objeto alcanza la altura máxima?, ¿a qué altura corresponde?

c. ¿En qué instante el objeto llega al suelo?

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Reconocí la función cuadrática, escrita en su forma general o canónica.			
Grafiqué una función cuadrática y analicé las variaciones que se producen al modificar los parámetros.			
Discutí las condiciones que debe cumplir la función cuadrática para que su gráfica interseque el eje X.			
Modelé situaciones o fenómenos asociados a funciones cuadráticas.			
Usé modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.			
Ajusté modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad.			

Cuaderno página 68

Lección 6

Función inversa

Exploro

¿Has utilizado el término "inverso" en otras situaciones de la matemática?, ¿en cuáles y para qué se aplican?

____

____

Entonces, para una función, ¿cuál podría ser su función inversa?

____

____

Aprenderé a:

Comprender la inversa de una función:

- utilizando la metáfora de una máquina.
- representándola por medio de tablas y gráficos.
- utilizando la reflexión de la gráfica de la función.

Determinar la función inversa de funciones lineales, afines y cuadráticas.

Necesito recordar...

- Relaciones lineales en dos variables de la forma $ax + by = c$.
- Ecuaciones lineales y cuadráticas.
- Funciones lineales, afines y cuadráticas.

¿Qué debo saber?

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, primero para la incógnita ***x*** y luego para ***y***.

a. $5x + 3y = 4$ $\quad x = \boxed{} \quad y = \boxed{}$

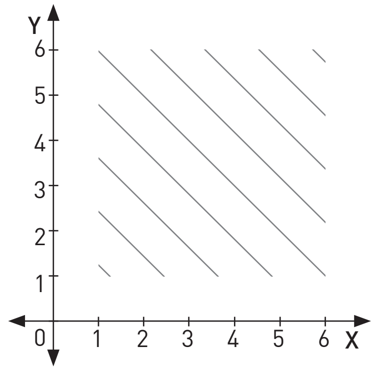
b. $3(x + y) + 4 = 2x + y$ $\quad x = \boxed{} \quad y = \boxed{}$

c. $\frac{2}{3} + 4y = \frac{x - y}{2} + 3$ $\quad x = \boxed{} \quad y = \boxed{}$

d. $y + 5 = x^2 + 10$ $\quad x = \boxed{} \quad y = \boxed{}$

2. Las personas pueden percibir una figura aunque esta no esté explícitamente demarcada, tal como lo establece la psicología de la percepción. En la imagen, se puede ver un conjunto de segmentos de rectas, que en su conjunto sugieren un cuadrado.

a. Elige 4 de los segmentos de la figura y escribe, para cada segmento, la ecuación de la recta a la que pertenece. Escríbelas de la forma $ax + by = c$.



b. ¿Qué características tienen en común las ecuaciones escritas?, ¿en qué se diferencian?

c. Para que el cuadrado sea más evidente se podrían trazar más segmentos entre los que ya están. ¿Se puede inferir cómo serían sus ecuaciones a partir de las ecuaciones anteriores?, ¿cómo?

d. ¿Un segmento de recta cuya ecuación es $x + y = 0$ podría pertenecer al cuadrado?, ¿por qué?

e. ¿Qué importancia tiene el coeficiente c en la ecuación de los segmentos que conforman el cuadrado?, ¿puede ser cualquier valor? Fundamenta.

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Reconocí e interpreté relaciones lineales en dos variables de la forma $ax + by = c$.			
Resolví ecuaciones lineales y cuadráticas.			
Escribí la relación entre las variables de un gráfico dado; de la forma $ax + by = c$.			
Describí relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.			
Participé en la búsqueda de una posible solución a un problema.			

Cuaderno página 70

Tema 1: ¿Cuándo una función tiene función inversa?

¿Qué aprenderé?

A comprender el concepto de función inversa a través de tablas, estableciendo la relación entre una función y su función inversa.

¿Para qué?

Para distinguir entre dos funciones que sean inversas una de la otra e interpretarlas como tales en problemas de distintos contextos.

Actividad en pareja

Taller

En la imagen se observa un termómetro exterior, que incluye las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

1 ¿Qué temperatura marca el termómetro?

☐ °C ☐ °F

2 Observando el termómetro, completen la siguiente tabla que relaciona los grados Celsius y Farhenheit.

Grados °C	-40		0		15	
Grados °F		0		40		90

3 La función que relaciona las dos escalas está dada por la expresión $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, donde x es la temperatura en grados Celsius y $f(x)$, la temperatura en grados Fahrenheit.

a. ¿Cuál es la temperatura, en grados Fahrenheit, cuando hay 25 °C?

b. ¿A cuántos grados Celsuis equivale 72 °F?, ¿cómo lo calcularon?

c. ¿Es posible determinar una función similar $g(x)$, pero que permita calcular los grados Celsuis si se conoce la temperatura en grados Fahrenheit?, ¿por qué?

d. ¿Cuál es la representación algebraica de $g(x)$?

e. ¿Cómo podrían describir la relación entre $f(x)$ y $g(x)$? Expliquen.

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente ○ ○ ○

Grupalmente ○ ○ ○

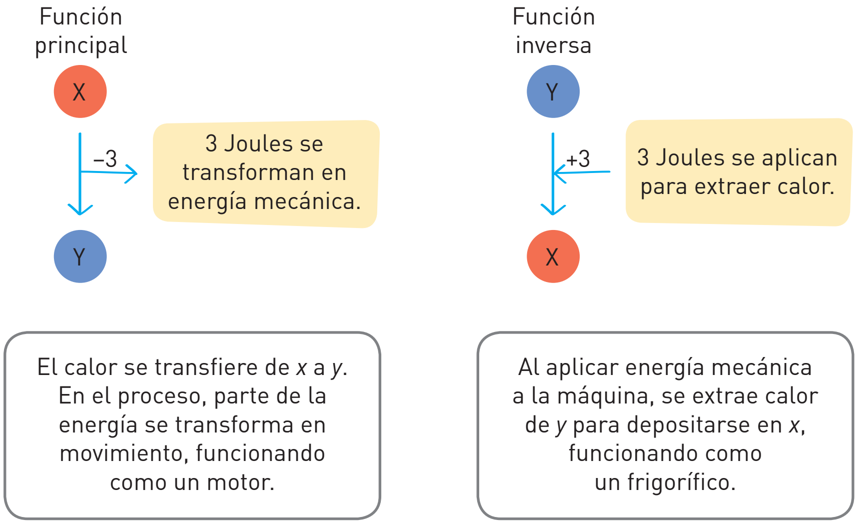
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente ○ ○ ○

Grupalmente ○ ○ ○

Actividades de proceso

1. El siguiente esquema representa el funcionamiento de una máquina de Carnot. Esta es una **máquina térmica** ideal de máxima eficiencia, que funciona entre dos fuentes de calor: una a mayor temperatura (en rojo) y otra a menor temperatura (en azul).



a. Observando el esquema, ¿cómo pueden expresarse matemáticamente ambas funciones de la máquina? Completa.

Función principal

$f(x) = x - 3$

$f(x)$	
x	y
4	1
5	
6	
7	
8	

Función inversa

$f^{-1}(x) =$ ______

$f^{-1}(x)$	
x	y
1	4
2	
3	
4	
5	

b. ¿Cómo se relacionan las tablas de valores de ambas funciones?

______

______

Y él ¿quién es?

Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832)

Ingeniero y físico francés cuyo trabajo influyó en el estudio de la termodinámica. Aunque se trata de un dispositivo ideal (no real), una máquina de Carnot es un ejemplo de una máquina térmica. Fue propuesta en 1824.

Glosario

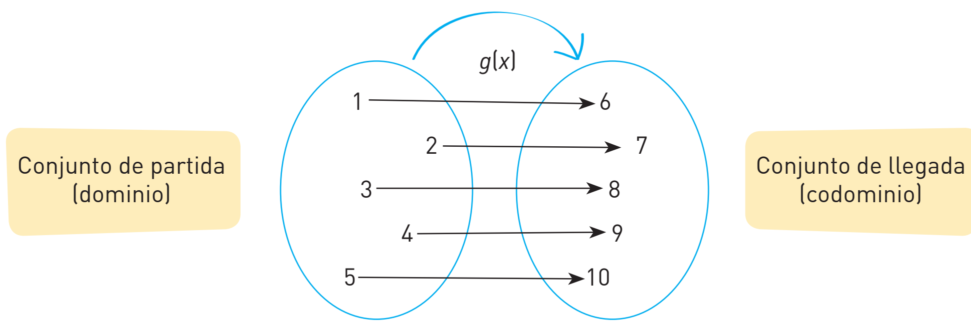
Máquina térmica: máquina cuyo funcionamiento se basa en la utilización de la energía en forma de calor.

Función inversa: de una función $f(x)$ se denota como $f^{-1}(x)$.

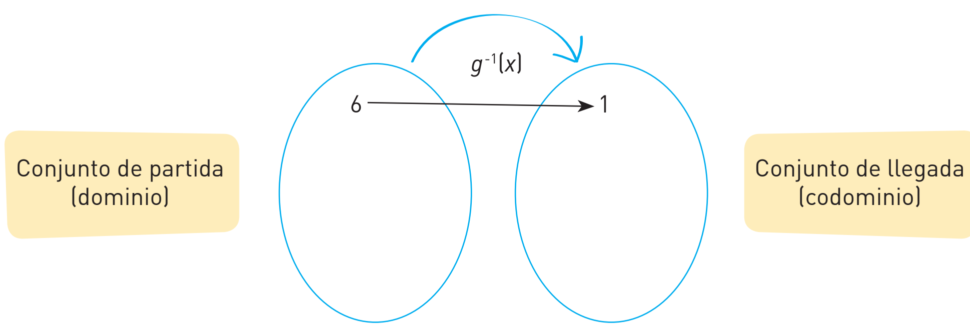
2. Analiza cada situación. Luego, describe su proceso inverso.

Máquina	Función	Función inversa
Automóvil	Avanza 15 km	
Escáner		Aumenta al doble
Aire acondicionado	Baja la temperatura en 15 °C	
Cajero automático	Realiza un giro de $ 50 000	
Ascensor		Baja la cabina por 12 m

3. En el siguiente diagrama sagital se representa la función ***g***(***x***). Se muestran los elementos del conjunto de partida o dominio y los elementos del conjunto de llegada o codominio.



a. ¿Cómo se puede representar en un diagrama sagital la función inversa $g^{-1}(x)$? Completa.



Ayuda

El **dominio (dom *f*)** de una función $f(x)$ corresponde a todos los elementos que pertenecen al conjunto de partida.

El **codominio** de una función $f(x)$ corresponde a todos los elementos que pertenecen al conjunto de llegada. que toma la variable dependiente y, los resultados obtenidos al evaluar f(x

El **recorrido (rec *f*)** de una función $f(x)$ corresponde a todos los elementos del conjunto de llegada que son **imágenes** de los elementos del dominio.

b. Observando los diagramas, ¿cómo se relacionan el dominio y el recorrido de ambas funciones?

El dominio y el recorrido de $g(x)$ corresponden a:

Dom $g(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Rec $g(x) =$ ☐

El dominio y el recorrido de $g^{-1}(x)$ corresponden a:

Dom $g^{-1}(x) =$ ☐ Rec $g^{-1}(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

El dominio de $g(x)$ es equivalente al ______________ de su función inversa, mientras que el recorrido de $g(x)$ es equivalente al ______________ de su función inversa. Es decir:

Dom $g(x) =$ ☐ y Rec $g(x) =$ ☐

En resumen

Si $f(x)$ es una función tal que a cada elemento de un conjunto A le asigna un elemento de un conjunto B y $g(x)$ es una función que realiza el proceso contrario, es decir, que a cada elemento del conjunto B le asigna su elemento de origen del conjunto A, es decir, se conservan los pares de elementos relacionados, entonces se dice que $f(x)$ es la función inversa de $g(x)$ y se puede designar como $f^{-1}(x)$.

Dada una función $f(x)$, su función inversa $f^{-1}(x)$ existe cuando se cumple que a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen y también que su recorrido coincide con el codominio.

Cuando una función $f(x)$ está representada en una tabla de valores, entonces es posible determinar su función inversa $f^{-1}(x)$ utilizando, también, una tabla de valores.

Por ejemplo:

Función $f(x)$	
x	$f(x)$
a	d
b	e
c	f

Función $f^{-1}(x)$	
x	$f^{-1}(x)$
d	a
e	b
f	c

De las tablas, se puede observar que se cumple que Dom $f(x)$ = Rec $f^{-1}(x)$ y también Rec $f(x)$ = Dom $f^{-1}(x)$.

Y ella ¿quién es?

Katherine Coleman Goble Johnson (1918 - EE.UU.)

Física, científica espacial y matemática estadounidense. Trabajó en los programas espaciales de la NASA. Destacada por su precisión en la navegación astronómica, calculó la trayectoria para los vuelos a la Luna del Apolo 11 en 1969 y del Apolo 13 en 1970. Una vez que esta última misión fue abortada, implementó los procedimientos y las cartas de navegación que ayudaron a que la tripulación regresara a salvo a la Tierra cuatro días después. Recibió de Barack Obama la Medalla Presidencial de la Libertad en 2015.

Glosario

Imagen: de un número por $f(x)$ es el número obtenido al valorizar la función. Si $f(5) = 12$, 12 es la imagen de 5.

Preimagen: de un número por $f(x)$ es el valor del dominio con el que se obtiene el número. Si $f(10) = 7$, 10 es la preimagen de 7.

Actividades de práctica

1. Observa las descripciones en lenguaje natural de algunas funciones y determina la correspondiente descripción para la función inversa de cada una.

Descripción de f	Descripción de f^{-1}
Aumenta en 10 unidades cada número.	Disminuye en 10 unidades cada número.
Disminuye en 5 unidades cada número.	
Cuadriplica cada número.	
Aumenta al triple cada número.	
Eleva al cuadrado cada número positivo.	
Aumenta en dos unidades cada número reducido a la mitad.	
Eleva al cuadrado el doble de cada número positivo.	
Aplica la raíz cuadrada a cada número positivo aumentado en 3 unidades.	

2. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. ________ Si $f(7) = 3$, entonces siempre se cumple que $f^{-1}(-7) = -3$.

b. ________ Si la preimagen de 2 es 4 respecto de f^{-1}, entonces $f(2) = 4$.

c. ________ El punto (1, 5) pertenece a la gráfica de $f(x)$. Luego, el punto (5, 1) pertenece a la gráfica de $f^{-1}(x)$.

d. ________ Si $y \in \text{Dom}(f^{-1})$, entonces $y \in \text{Dom}(f)$.

e. ________ Si $h(x)$ es la función inversa de $g(x)$ y $g(x)$ es la función inversa de $f(x)$, entonces $h(x) = f(x)$.

3. Las siguientes tablas corresponden a valores de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$.

x	0	–1	1	–2	2	–3	3
$f(x)$	1	–1	3	–3	5	–5	7

x	0	–1	1	–2	2	–3	3
$g(x)$	$-\frac{1}{2}$	–1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	–2	1

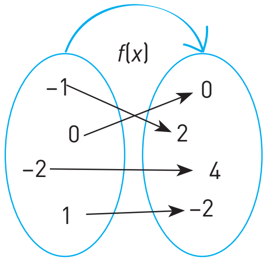
a. En un mismo plano cartesiano, bosqueja las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b. A partir de cada gráfica, define algebraicamente las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

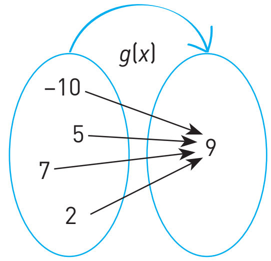
c. Respecto de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, ¿es posible que $g(x)$ sea la función inversa de $f(x)$? Justifica.

4. Las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ están representadas en los siguientes diagramas sagitales. Determina en cada caso si la función tiene función inversa. Justifica.

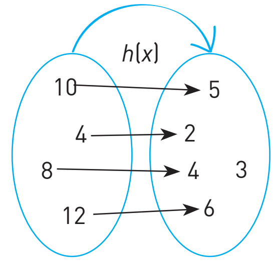
a.



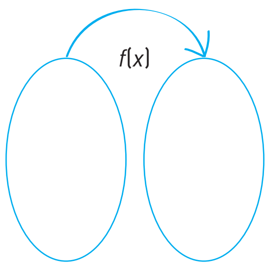
b.

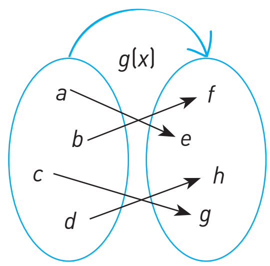


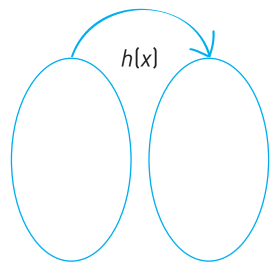
c.



5. Si $g(x)$ es la función inversa de $f(x)$ y $f(x)$ es la función inversa de $h(x)$, ¿qué relación tienen las funciones $g(x)$ y $h(x)$? Completa los diagramas sagitales para corroborar tu respuesta.







6. La siguiente tabla representa la energía potencial gravitatoria U que experimenta un cuerpo de 2 kg de masa, según la altura h en la que se encuentre respecto de la superficie terrestre.

$U(h)$	
h (metros)	U (Joules)
0	0
1	20
2	40
3	60
4	80

a. ¿Cómo se interpretaría la función inversa de la función presentada?

b. ¿A cuánto equivale $h(40)$ si $U(2) = 40$?, ¿cómo se interpreta este resultado?

c. Construye una tabla de valores para la función inversa $h(U)$.

¿Qué aprendí hoy?

La cantidad vendida de un producto se conoce como demanda del producto. La demanda se puede modelar por la función $D(x) = 26x + 300$, donde x es el precio.

a. Encuentra la función $D^{-1}(x)$.

b. Determina $D^{-1}(600)$.

c. Explica qué representa la función inversa de la demanda, es decir, $D^{-1}(x)$.

Cuaderno página 71

Tema 2: ¿Cómo se relacionan la gráfica de una función y la de su inversa?

¿Qué aprenderé?

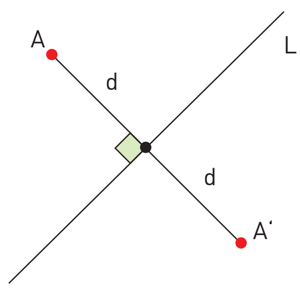
A establecer la relación entre la gráfica de una función y la de su función inversa.

¿Para qué?

Para aplicar la relación entre las gráficas de una función y su función inversa en la solución de problemas de otras asignaturas.

Ayuda

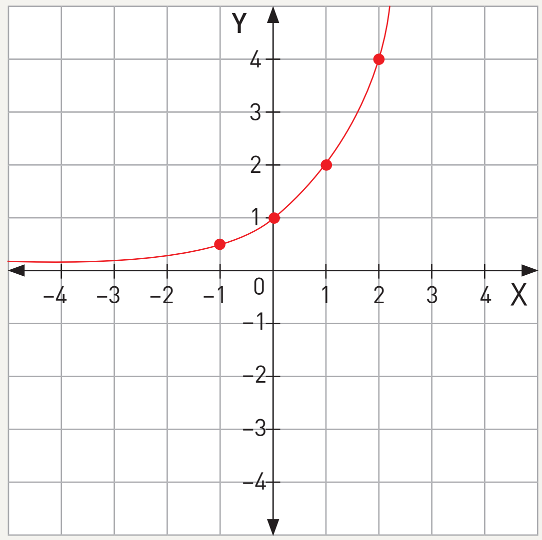
Para aplicar la reflexión de un punto A respecto de una recta L (simetría axial), traza un segmento, perpendicular a la recta L, desde el punto A hasta la recta L y mide su distancia. Luego, traza un segmento de igual longitud y con la misma dirección para determinar el punto simétrico A'.



Actividad en pareja

Taller

Observen la gráfica de una función $f(x)$ con algunos de sus puntos destacados.



1 Completen la tabla con los valores de $f(x)$.

x	$y = f(x)$
−1	0,5

2 Tracen en el plano cartesiano la recta $y = x$. Luego, apliquen una reflexión a los puntos destacados de la función $f(x)$ con respecto a la recta $y = x$ que trazaron. Unan a mano alzada los puntos obtenidos y rotulen esta curva como $g(x)$.

3 Completen la tabla con los valores de $g(x)$.

x	$y = g(x)$
0,5	−1

4 A partir de las tablas, ¿qué pueden concluir de ambas funciones?

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente

Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente

Grupalmente

Actividades de proceso

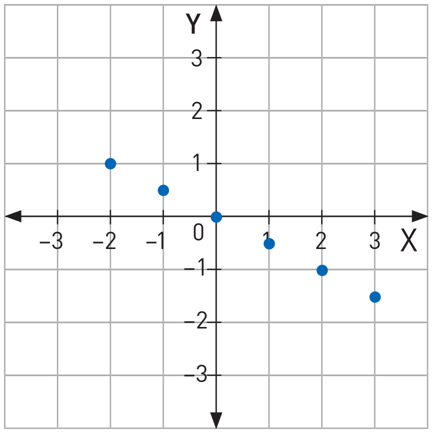
Representa gráficamente la función y su función inversa.

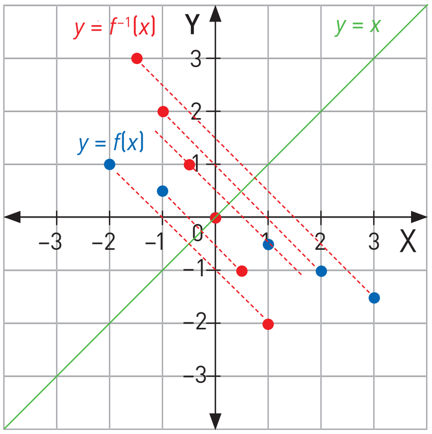
$$f:\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}, \text{ con } f(x) = -0{,}5x$$

La función se puede representar en la tabla:

x	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	1	0,5	0	–0,5	–1	–1,5

Luego, se grafica $f(x)$ y se aplica la reflexión con respecto a la recta $y = x$





Ayuda

Para indicar el conjunto de partida y de llegada en que una función $f(x)$ está definida, se utiliza la notación $f(x)$: A ⟶ B, en donde A representa el conjunto de partida o dominio y B representa el conjunto de llegada o codominio.

1. Traza la gráfica de las siguientes funciones en un mismo gráfico y determina si cada una es la función inversa de la otra.

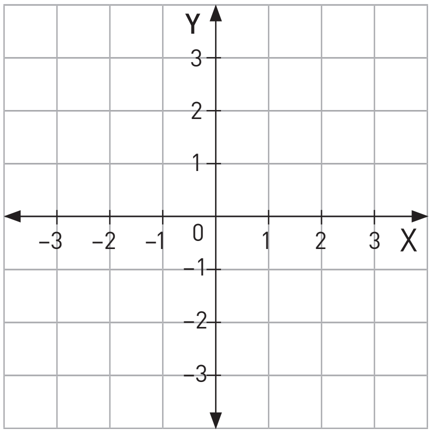
$$f(x) = 4x - 3, \; g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

a. Primero determina los valores de cada función y completa las tablas.

x	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$						

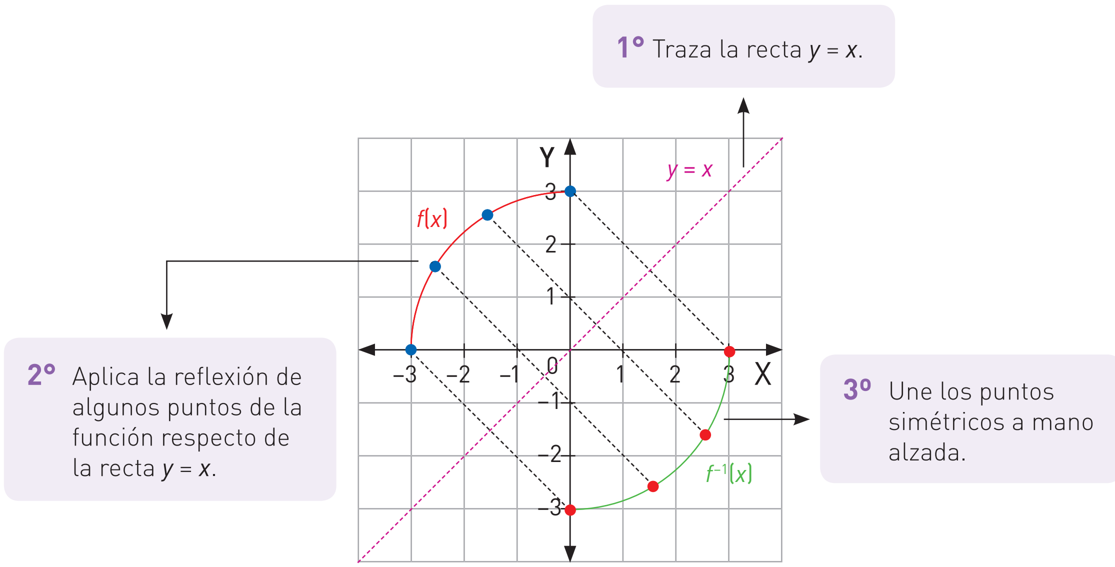
x	–2	–1	0	1	2	3
$g(x)$						

b. Para cada función, ubica todos los puntos y traza la gráfica.

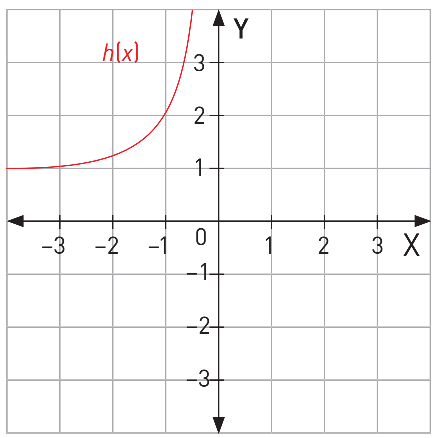


c. ¿Qué puedes concluir?

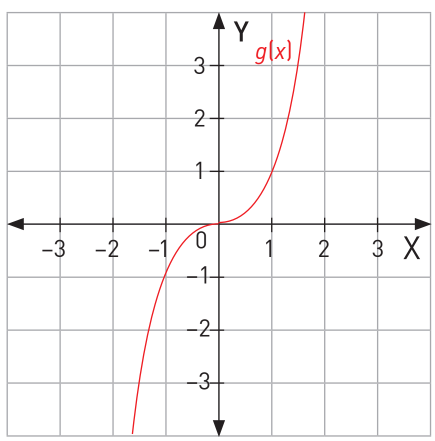
2. Cuando la gráfica de una función es una línea, sea recta o curva, el proceso es similar.



a.



b.



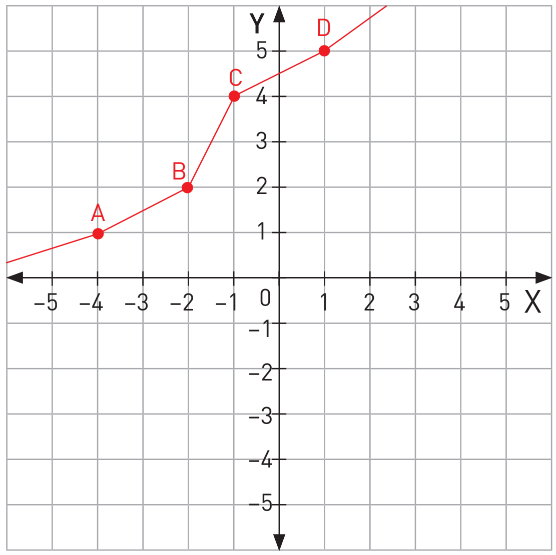
c. ¿Cómo son gráficamente una función y su función inversa?

____

____

____

3. En la siguiente gráfica se presenta la función $f(x)$ y se indican las coordenadas de algunos de sus puntos. A partir de esto, ¿cómo se relacionan las coordenadas de los puntos de esta función y las de los puntos de su función inversa? Completa.



a. Al graficar $f^{-1}(x)$, se obtienen los siguientes puntos:

A´ = ______, B´ = ______.

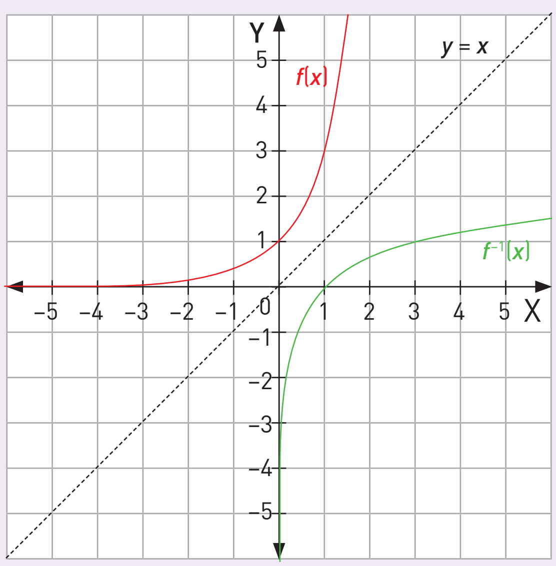
C´ = ______, D´ = ______.

b. Al comparar los puntos de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$, se puede concluir que si las coordenadas de los puntos de una función son de la forma (a, b), entonces los puntos correspondientes de su función inversa son de la forma ______.

En resumen

Gráficamente las curvas que representan una función $f(x)$ y su función inversa $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta de ecuación $y = x$.

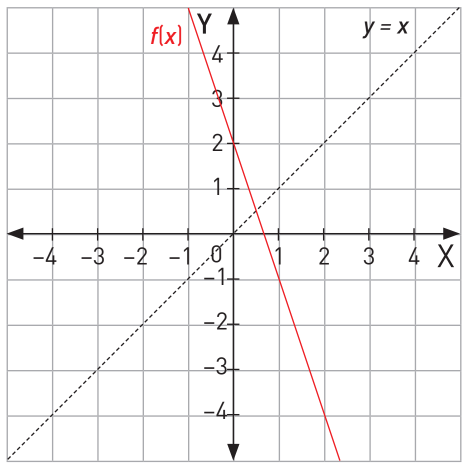
En términos de sus coordenadas, se intercambian sus valores. Es decir, si los puntos de $f(x)$ son (a, b), entonces los de su función inversa $f^{-1}(x)$ serán (b, a).



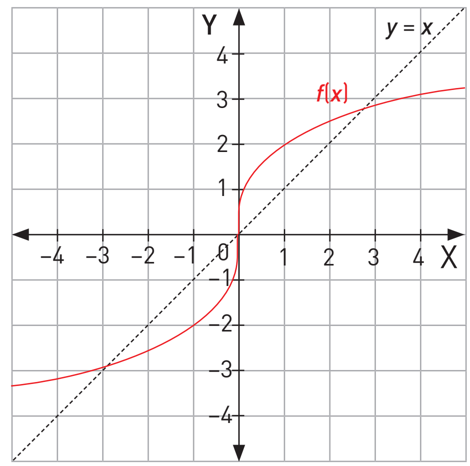
Actividades de práctica

1. Observa la gráfica de cada función y determina gráficamente su función inversa.

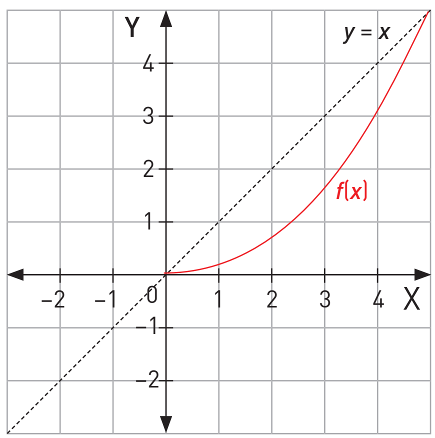
a.



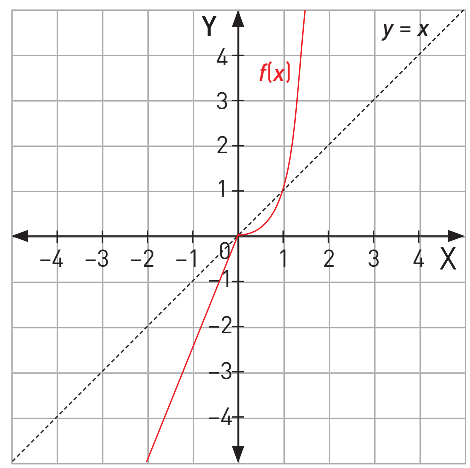
c.



b.

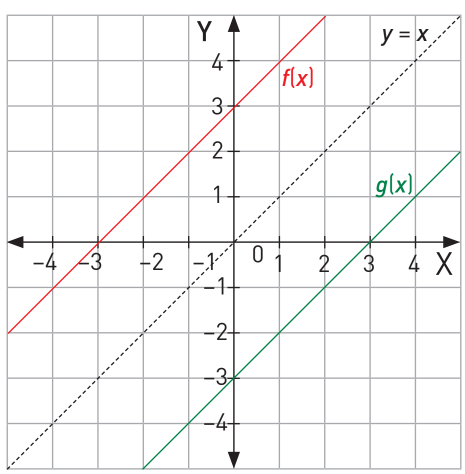


d.

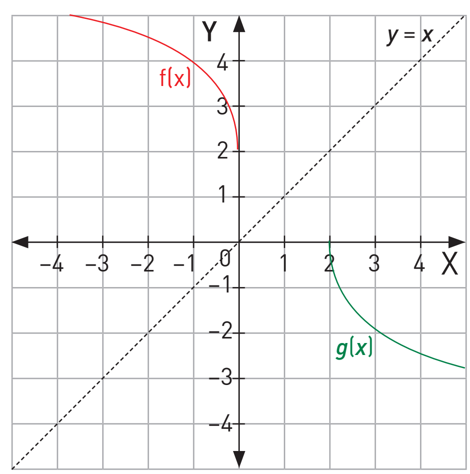


2. Observa las gráficas en cada caso y determina si la función $g(x)$ es una función inversa de la función $f(x)$. Justifica.

a.

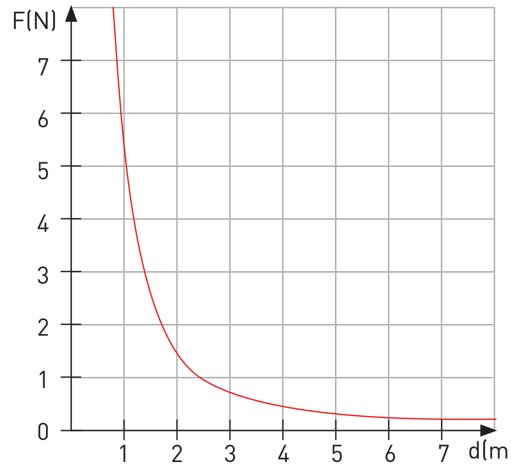


b.



●●● Actividad grupal

3. **Ciencias naturales.** En el gráfico se muestra el comportamiento de la fuerza gravitacional (F) respecto de la distancia (d) entre dos cuerpos de cierta masa cada uno. Analicen la gráfica y respondan.



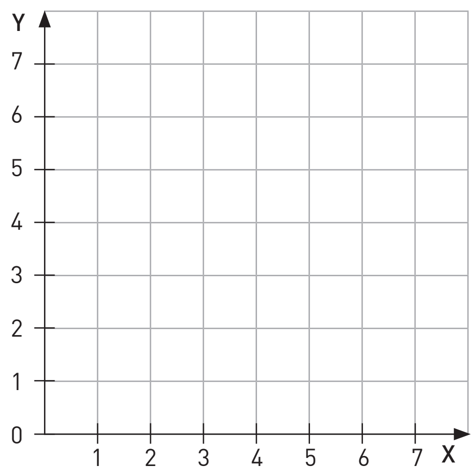
a. ¿Qué ocurre con la fuerza de gravedad a medida que aumenta o disminuye la distancia entre los cuerpos?

b. ¿De qué forma la fuerza gravitacional aumenta o disminuye?

c. La gráfica representa la función $F(d)$. Si se quisiera determinar la función inversa $d(F)$, ¿cómo interpretarían esta función?

d. ¿Qué creen que debería ocurrir con las variables F y d, presentes en los ejes coordenados del plano, para graficar su función inversa?

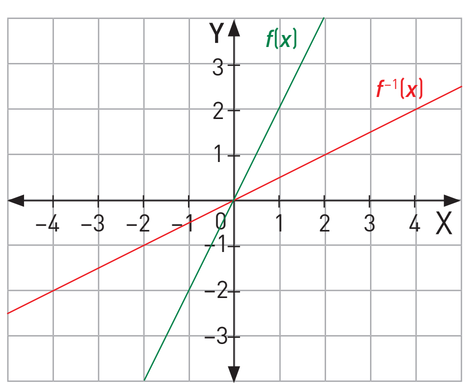
e. Bosquejen la gráfica de la función inversa $d(F)$ en el siguiente gráfico. Muestren también las variables F y d, indicando su lugar en los ejes coordenados.



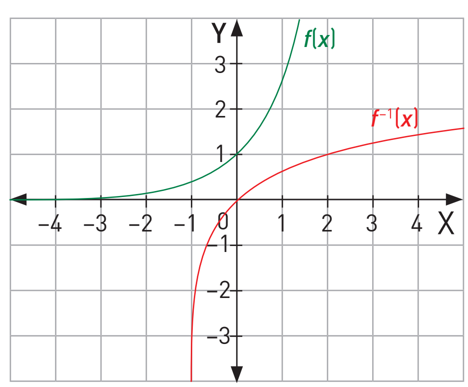
¿Qué aprendí hoy?

Determina si en cada gráfico se representa una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$. En el caso de que no lo sean, traza la gráfica de $f^{-1}(x)$.

a.



b.



Cuaderno página 74

Tema 3: ¿Cómo es la función inversa de funciones lineales y afines?

¿Qué aprenderé?

A determinar de forma gráfica y analítica la función inversa de una función lineal y una función afín.

¿Para qué?

Para resolver problemas que involucren funciones lineales y/o afines y sus funciones inversas.

Ayuda

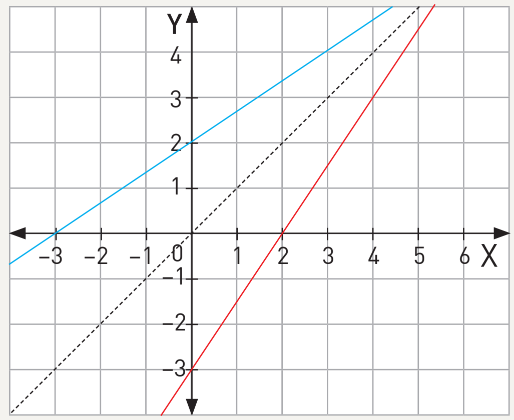
Aunque tanto la función lineal como la función afín se representan gráficamente como rectas en el plano, se diferencian en que la función lineal $f(x) = ax$ pasa por el origen del plano cartesiano, mientras que la función afín $f(x) = ax + b$ no pasa por el origen del plano e interseca el eje Y en el punto $(0, b)$.

Usa calculadora
Para explorar

Actividad en pareja

Taller

Observen el siguiente gráfico, en el que se representan las funciones $f(x)$ y $g(x)$.



a. Observando la gráfica, ¿podrían decidir si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas o no? Comenten su estrategia para asegurarlo.

b. Completen algunos valores para $f(x)$ y $g(x)$ en las siguientes tablas y luego determinen la representación algebraica de cada una.

x	$f(x)$

x	$g(x)$

$f(x) =$ ______ $g(x) =$ ______

c. Observando la representación algebraica de las funciones, ¿se puede afirmar que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas?, ¿por qué?

d. ¿Cómo se puede determinar la función $g(x)$, de forma algebraica, a partir de la función $f(x)$? Expliquen.

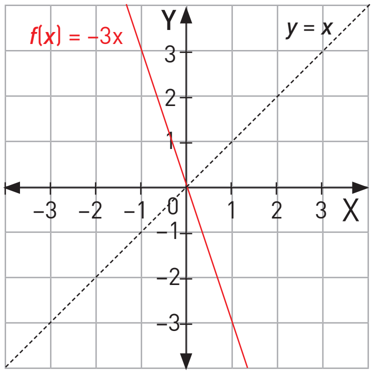
¿Cómo trabajé el taller?	Individualmente / Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	Individualmente / Grupalmente

Actividades de proceso

1. Determina algebraicamente la función inversa de cada función.

a. Función lineal: $f(x) = -3x$



$y = -3x$ → Escribe la función como ecuación

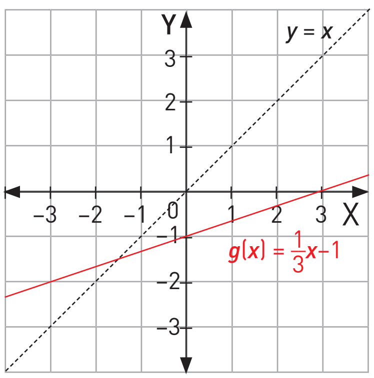
$x = -3y$ → Intercambia las variables

$y = -\frac{1}{3}x$ → Despeja la variable ***y***

Expresa la función inversa $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x$

Comprueba el resultado graficando en el plano la función obtenida.

b. Función afín: $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$



[ ] → Escribe la función como ecuación

[ ] → Intercambia las variables

[ ] → Despeja la variable ***y***

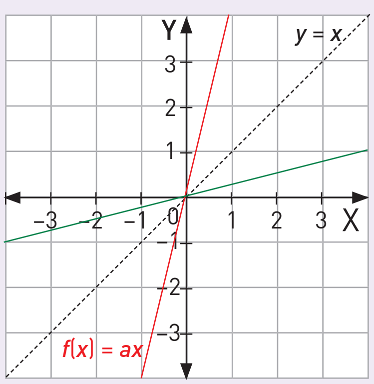
Expresa la función inversa $g^{-1}(x) =$ [ ]

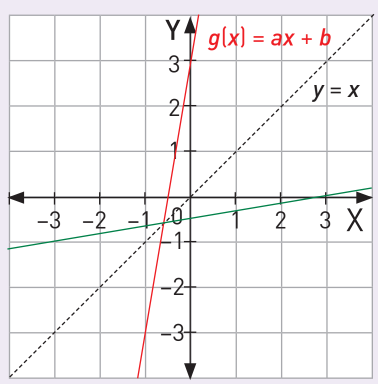
Comprueba el resultado graficando en el plano la función obtenida.

En resumen

En general, para la función lineal $f(x) = ax$, su función inversa es otra función lineal.

En general, para la función afín $g(x) = ax + b$, su función inversa es la función afín.





Actividades de práctica

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. ________ Si una función lineal o afín es creciente, entonces su función inversa será decreciente.

b. ________ Si la pendiente de una función lineal es 4, entonces la pendiente de su función inversa será $\frac{1}{4}$.

c. ________ El punto de intersección con el eje Y de una función afín es el mismo para su función inversa.

d. ________ La función $f(x) = 5x + 10$ y la función $g(x) = \frac{2}{10}x + 2$ son funciones inversas.

e. ________ Una función lineal siempre se intersecará con su función inversa en el origen del plano cartesiano.

2. Determina la función inversa de las siguientes funciones. Luego, comprueba tu resultado trazando las gráficas de ambas funciones en un mismo gráfico.

a. $f(x) = 7x$

b. $g(x) = \frac{5}{2}x$

c. $h(x) = -0,75x$

d. $p(x) = 4x + 2$

e. $q(x) = \frac{7}{3}x - 7$

f. $r(x) = -4,5x - \frac{2}{9}$

3. A partir de las funciones y sus funciones inversas, determina el valor de p y q en cada caso.

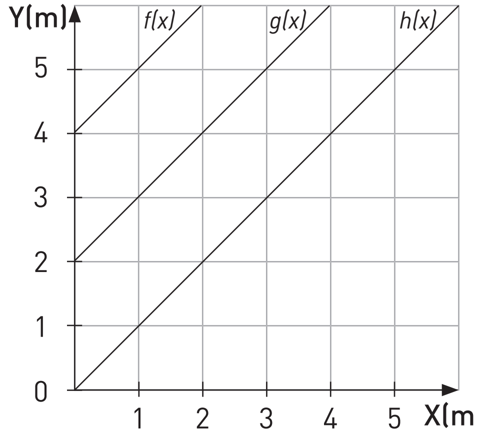
a. $f(x) = \frac{p}{q}x \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{4}{5}x$ $p = \boxed{}$ $q = \boxed{}$

b. $g(x) = \frac{7}{p}x \longrightarrow g^{-1}(x) = \frac{5}{q}x$ $p = \boxed{}$ $q = \boxed{}$

c. $h(x) = \frac{1}{2}x + p \longrightarrow h^{-1}(x) = qx - \frac{5}{2}$ $p = \boxed{}$ $q = \boxed{}$

d. $r(x) = \frac{p}{3}x + q \longrightarrow r^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{10}$ $p = \boxed{}$ $q = \boxed{}$

4. Como la luz viaja de forma rectilínea, un rayo de luz puede ser representado por una recta. Así, la luz proveniente de sol puede ser representada por un conjunto de rectas paralelas que inciden en la superficie terrestre. En la imagen, se observan tres rayos de luz que llegan desde el sol a una pared, representadas en el plano por las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.



a. Escribe las funciones que representan los rayos de luz.

$f(x) =$ ☐ $g(x) =$ ☐ $h(x) =$ ☐

b. Si las funciones inversas de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ también representan rayos de luz, ¿estos incidirán en el suelo o en la pared?

c. Determina las funciones inversas de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ y trázalas en la imagen.

$f^{-1}(x) =$ ☐ $g^{-1}(x) =$ ☐ $h^{-1}(x) =$ ☐

d. ¿A qué distancia del suelo (o altura de la pared) incidirá cada uno de los rayos representados por las funciones inversas? Explica.

5. **Ciencias naturales.** Kelvin, Celsius y Fahrenheit son las escalas que se usan para medir la temperatura. Para obtener la temperatura en grados Celsius (C) a partir de la temperatura en Kelvin (K), se establece la función $C(K) = K - 273$.

a. ¿Con qué función se puede obtener la temperatura en Kelvin a partir de la temperatura medida en grados Celsius?

b. ¿Con qué función se puede obtener la temperatura en grados Fahrenheit a partir de la temperatura en medida en grados Celsius?

c. Si la temperatura corporal del ser humano es de 37°C, ¿a qué temperatura equivaldría en la escala Kelvin?, ¿y en la Fahrenheit?

d. Un día la temperatura ambiental es de 86°F. ¿A qué temperatura equivale en la escala Kelvin?, ¿qué procedimiento utilizaste para calcularlo?

¿Qué aprendí hoy?

Determina la función inversa de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 4x$

b. $g(x) = \frac{5}{8}x - 3$

c. Traza las gráficas de las funciones $g(x)$ y $g^{-1}(x)$ en un mismo gráfico.

Cuaderno página 76

Tema 4: ¿Cuál es la función inversa de la función cuadrática?

¿Qué aprenderé?

A determinar de forma gráfica y analítica la función inversa de una función cuadrática.

¿Para qué?

Para resolver problemas que involucren funciones cuadráticas y su función inversa.

Actividad grupal

Taller

Mientras más largas sean las cadenas o las cuerdas de un columpio, mayor es su período, esto es, el tiempo que dura su vaivén.

En física, un columpio corresponde a un péndulo simple. La función que describe la relación entre el largo del péndulo l (en metros) y el período T (en segundos) es:

$$l(T) = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T^2$$

Donde g corresponde a la aceleración de gravedad terrestre.

1. Calculen el coeficiente a de la función cuadrática y expresen la función a partir de este valor.

   $a = \frac{g}{4\pi^2} = \boxed{}$

   $l(T) = \boxed{}$ Usa $g \approx 10$ m/s^2 y $\pi \approx 3$

2. Analicen cuáles valores (y cuáles no) podría tomar el largo l y el período T del péndulo y grafiquen la función $l(T)$. A partir de esta gráfica, tracen el bosquejo de su función inversa $T(l)$.

3. Si la función $l(T)$ representa la longitud que debe tener el péndulo según el período de oscilación que presenta, ¿cómo se interpreta la función inversa $T(l)$?

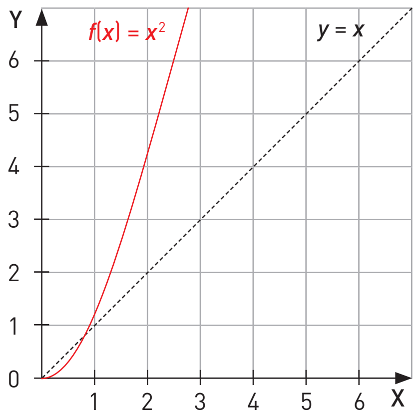
4. ¿Pueden determinar la función inversa $T(l)$ de forma algebraica?, ¿cómo lo harían?

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Determina algebraicamente la función inversa de una función cuadrática.

a. $f(x)$: $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = x^2$



$y = x^2$ ⟶ Escribe la función como ecuación

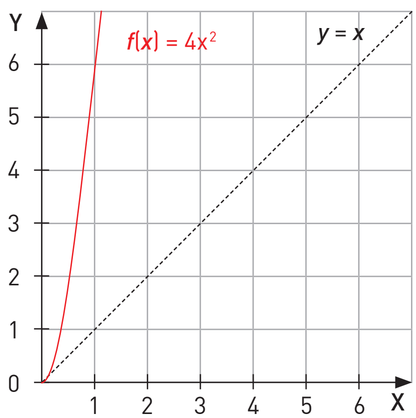
$x = y^2$ ⟶ Intercambia las variables

$y = \sqrt{x}$ ⟶ Despeja la variable ***y***

Exprésalo como función inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Comprueba el resultado graficando en el plano la función obtenida.

b. $g(x)$: $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $g(x) = 4x^2$



$\boxed{}$ ⟶ Escribe la función como ecuación

$\boxed{}$ ⟶ Intercambia las variables

$\boxed{}$ ⟶ Despeja la variable ***y***

Expresa la función inversa

$g^{-1}(x) = \boxed{}$

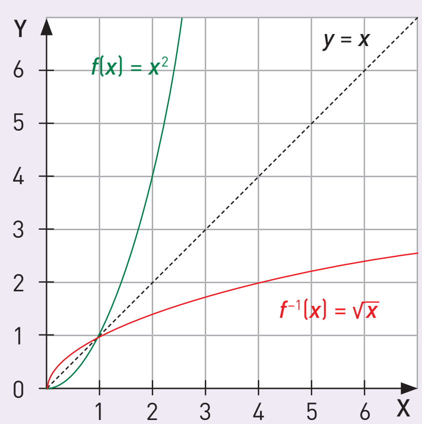
Comprueba el resultado graficando en el plano la función obtenida.

En resumen

La función cuadrática $f(x) = x^2$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, no tiene función inversa ya que existen dos elementos del dominio que tienen la misma imagen (por ejemplo: $f(-1) = 1$ y $f(1) = 1$); luego, no puede definirse la inversa porque para $f^{-1}(1)$ existen dos valores posibles y en ese caso, la inversa no es una función.

Cuando se acota su dominio a los números reales positivos y el cero, se define como la función $f(x)$: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = x^2$.

De esta manera, su función inversa se puede definir como la función $f^{-1}(x)$: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, la que se conoce como **función raíz cuadrada**.



Actividades de práctica

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. ________ La gráfica de la función $f(x) = x^2$ y la de su función inversa se intersecan en el punto (1, 1).

b. ________ Al aumentar el valor de a en la función $f(x) = ax^2$, la gráfica de su función inversa estará más próxima al eje X.

c. ________ Tanto la gráfica de $f(x) = x^2$ como la de su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ se encuentran en el primer cuadrante del plano cartesiano.

d. ________ Si los puntos de una función raíz cuadrada son (a, b), entonces los puntos de su función inversa son (b^2, a^2).

e. ________ La función inversa de $f(x) = 3x^2$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{3x}$.

2. Encuentra la función inversa de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 6x^2$

b. $g(x) = \frac{5}{4}x^2$

c. $h(x) = \left(\frac{3}{5}x\right)^2$

d. $p(x) = 0{,}16x^2$

e. $q(x) = \sqrt{10x}$

f. $r(x) = 5\sqrt{x}$

g. $s(x) = 3\sqrt{2x}$

h. $r(x) = 2\sqrt{\frac{2}{5}x}$

Las funciones presentes en estas actividades se definen con dominio y codominio en el conjunto de los números reales positivos, incluido el cero, es decir, son funciones $f(x): \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

3. Determina el valor de k para que $g(x)$ sea una función inversa de $f(x)$.

a. $f(x) = 5x^2$ $\quad g(x) = \sqrt{kx}$ $\quad k = \square$

b. $f(x) = \frac{1}{7}x^2$ $\quad g(x) = \sqrt{(k+1)\,x}$ $\quad k = \square$

c. $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ $\quad g(x) = k\sqrt{\frac{1}{2}x}$ $\quad k = \square$

d. $f(x) = 25x^2$ $\quad g(x) = \frac{k}{2}\sqrt{x}$ $\quad k = \square$

e. $f(x) = 0{,}75x^2$ $\quad g(x) = \frac{1}{4k}\sqrt{3x}$ $\quad k = \square$

4. Analiza las siguientes funciones y determina, en cada caso, cuál de las funciones del gráfico corresponde a su función inversa.

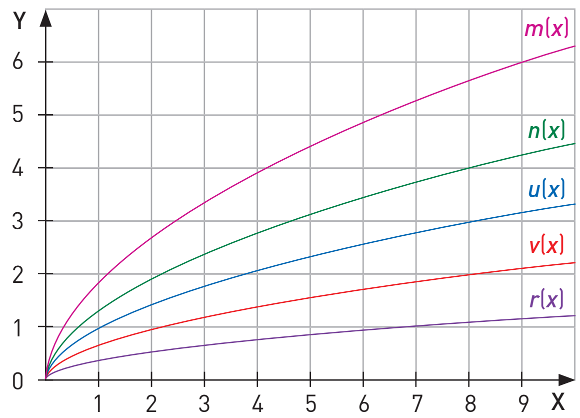
a. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

b. $g(x) = \frac{8}{9}x^2$

c. $h(x) = 2x^2$

d. $p(x) = 7x^2$

e. $q(x) = \frac{1}{2}x^2$



5. La distancia recorrida por Natalia está dada por la función $d(t) = 0{,}7\,t^2$, donde d es la distancia recorrida (en metros) y t es el tiempo transcurrido (en segundos). Si debe participar en la competencia de 100 metros planos:

a. Determina la función que permite conocer el tiempo que tarda Natalia en recorrer cierta distancia.

b. Usando esta función, ¿cuánto tardará Natalia en recorrer la cuarta parte de la competencia?, ¿y en terminar la carrera?

6. Un camionero consulta el GPS instalado en su vehículo, en el que se informa que el tiempo estimado para llegar a su destino es de 40 minutos. La relación entre el tiempo transcurrido (en horas) y la distancia recorrida (en kilómetros) está dada por la función $t(d) = \sqrt{\frac{1}{80}d}$.

a. En este caso, ¿cuál es la función $d(t)$?, ¿cómo se interpreta?

b. ¿Cuánto ha recorrido el camionero si ya ha transcurrido la mitad del tiempo estimado?

c. ¿A qué distancia se encuentra el lugar al que debe llegar el camionero si demora exactamente el tiempo estimado en el GPS?

¿Qué aprendí hoy?

El área A de un círculo respecto de su radio r está dada por la función $A(r) = \pi r^2$. ¿Cuál es la función que permitiría conocer el radio r de un círculo respecto de su área?

___

___

___

Cuaderno página 78

¿Cómo voy?

Evaluación de proceso

1 Encuentra el valor de las incógnitas en las siguientes tablas de las funciones y sus respectivas funciones inversas.

a.

x	$y = f(x)$
a	b
7	c
9	19
10	g

x	$y = f^{-1}(x)$
13	6
15	d
e	f
21	h

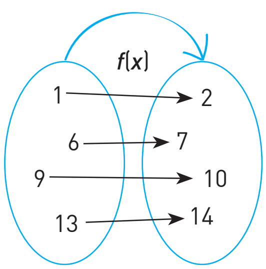
b.

x	$y = g(x)$
4	$a + 1$
5	2,5
10	$2c - 5$
$\frac{m}{4} - 5$	10

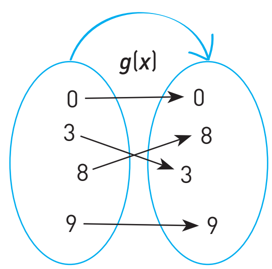
x	$y = g^{-1}(x)$
2	4
2,5	$b - 3$
5	$4d - 6$
$\frac{3}{2}n + 1$	20

2 Determina si las siguientes funciones, representadas en los diagramas sagitales, pueden tener una función inversa. De ser así, realiza un diagrama sagital representando sus funciones inversas.

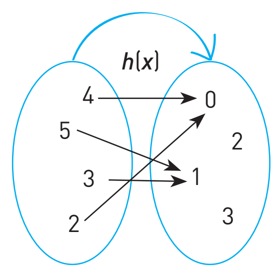
a.



b.



c.



3 Determina si las siguientes funciones son inversas una de la otra. Explica cómo lo decidiste.

a. $f(x) = 5x + 2$ $\qquad g(x) = \frac{1}{5}x - 2$

b. $h(x) = \frac{8}{9}x - 1$ $\qquad t(x) = \frac{9}{8}x - 1$

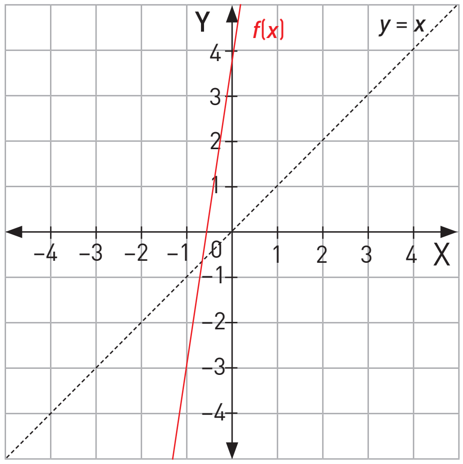
c. $p(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad q(x) = 2x^2$

d. $m(x) = 25x^2$ $\qquad n(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x}$

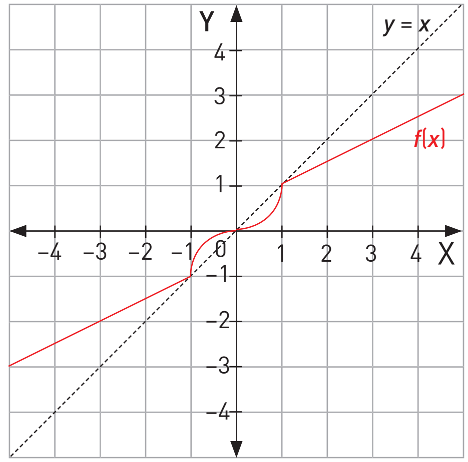
Usa calculadora
Para explorar

4 Analiza las funciones graficadas en el plano y traza la gráfica de sus funciones inversas.

a.

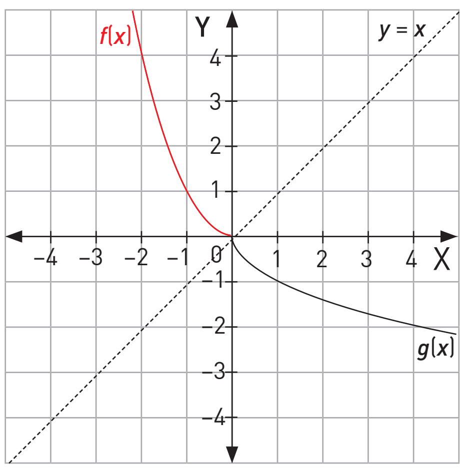


b.

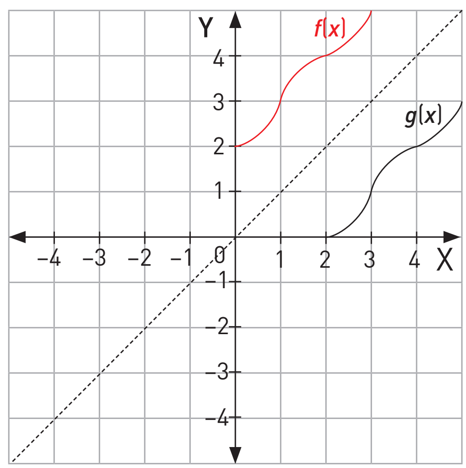


5 Indica, a partir de las gráficas, si las siguientes funciones son inversas una de la otra. Justifica cuando no lo sean.

a.



b.



6 Determina algebraicamente la función inversa de cada función. Restringe el dominio cuando sea necesario.

a. $f(x) = 7x + 3$

b. $g(x) = \frac{8}{3}x$

c. $h(x) = 9x + 1$

d. $p(x) = \frac{5}{8}x - \frac{1}{3}$

e. $q(x) = 7x^2$

f. $r(x) = 196x^2$

g. $t(x) = \frac{4}{11}x^2$

h. $r(x) = \sqrt{6x}$

i. $s(x) = \frac{1}{7}\sqrt{2x}$

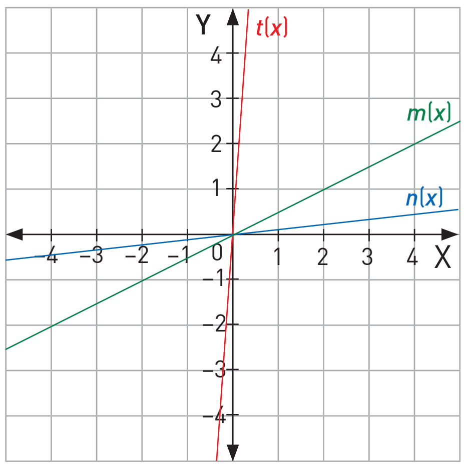
7 Determina el valor de k en cada caso para que la función $g(x)$ sea una función inversa de la función $f(x)$.

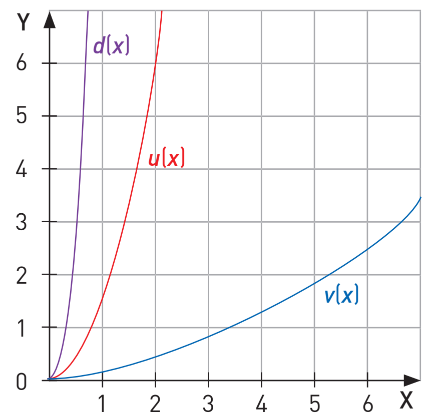
a. $f(x) = \frac{8}{11}x$ $g(x) = 4kx$ $k =$ ______

b. $f(x) = \frac{4}{15}x + 3$ $g(x) = \frac{k}{4}(x - 3)$ $k =$ ______

c. $f(x) = \frac{5}{9}x^2$ $g(x) = 3k\sqrt{\frac{x}{5}}$ $k =$ ______

8 Analiza las gráficas presentadas y determina cuál de ellas representa la función inversa de la función.





a. $f(x) = 8x$

b. $g(x) = 2x$

c. $h(x) = \frac{1}{20}x$

d. $p(x) = \sqrt{14x}$

e. $q(x) = \sqrt{\frac{x}{10}}$

f. $r(x) = \sqrt{0{,}7x}$

9 Si la **energía potencial elástica** de cierto resorte está dada por la función $U(x) = 200x^2$, donde U es la energía, medida en joule, y x el estiramiento del resorte, medido en metros:

a. Determina la función inversa $x(U)$. ¿Cómo se interpreta?

b. Si la energía potencial elástica del resorte es de 8 Joule, ¿cuánto se habrá estirado?

Glosario

Energía potencial elástica: de un resorte se define como la energía acumulada por un resorte cuando este es estirado o comprimido.

10 Carlos sale a trotar todas las mañanas por un camino de 4000 metros de longitud. Si trota con rapidez constante, la distancia recorrida d, en metros, está dada por la función $d(t) = 2t$, donde t corresponde al tiempo transcurrido, medido en segundos.

a. ¿Cuál es la función inversa de $d(t)$?, ¿cómo se interpreta?

b. ¿Cuánto debe demorar Carlos en recorrer todo el camino?

11 **Ciencias naturales.** En la tabla se muestra la aceleración de un cuerpo de 5 kg si se le aplica cierta cantidad de fuerza. Si estos datos corresponden a la función $a(F)$, donde a es la aceleración experimentada por el cuerpo y F la fuerza que se le aplicó:

Fuerza (N)	Aceleración (m/s^2)
10	2
20	4
30	6
40	8
50	10

a. Construye la tabla de la función inversa $F(a)$. ¿Qué interpretación recibe esta función?

b. Si $a(30) = 6$, ¿cuánto equivale $F(6)$?

c. Si $a(F) = \frac{1}{5}F$, ¿cuál es la función inversa $F(a)$?

d. Comprueba que la función inversa determinada algebraicamente es correcta a partir de la tabla construida.

e. Si dicho cuerpo experimenta una aceleración de 20 m/s^2, ¿cuánta fuerza se le ha aplicado?

Me evalúo

Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Elaboré tablas de valores de una función f(x) y de su inversa $f^{-1}(x)$.	○	○	○
Reconocí la función inversa de una función dada en diagramas sagitales y de forma algebraica.	○	○	○
Determiné las ecuaciones de las funciones inversas de funciones lineales y cuadráticas.	○	○	○
Resolví problemas de la vida cotidiana y de otras ciencias, que involucren la función inversa.	○	○	○
Representé y ejemplifiqué utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.	○	○	○
Comprendí y valoré la perseverancia y el rigor, por un lado, y la flexibilidad y la originalidad, por el otro, como aspectos fundamentales en el desarrollo de tareas y trabajos.	○	○	○

Cuaderno página 80

Reviso mis metas y estrategias

1 Considera las estrategias que escribiste en la página 79: ¿las cumpliste?, ¿por qué?

____

____

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

____

____

CAÍDA LIBRE

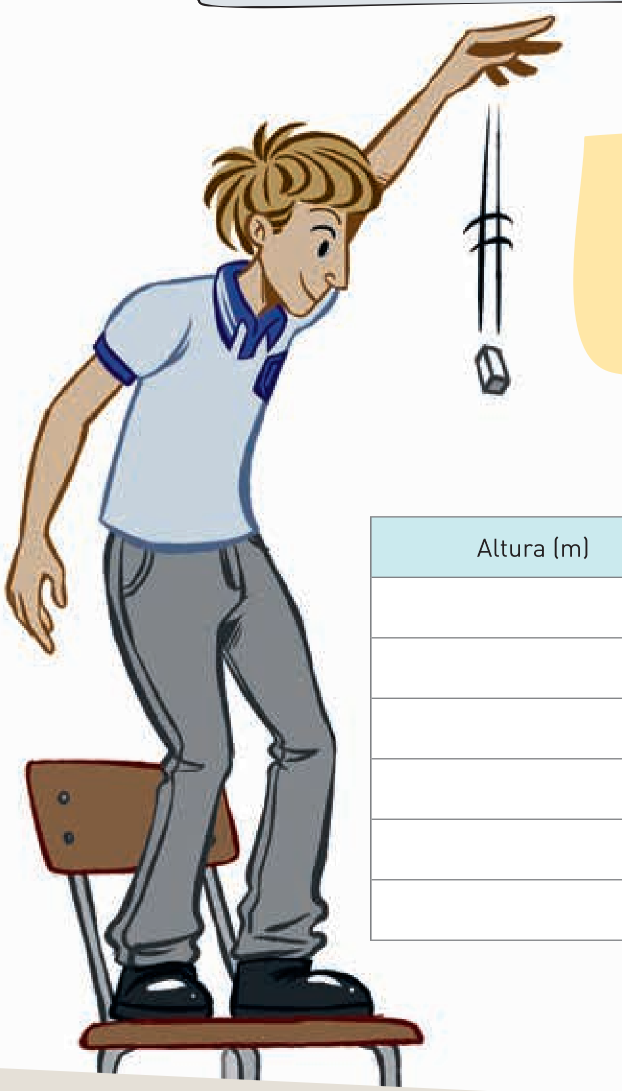
Materiales

- Objeto macizo y pequeño (por ejemplo, una goma de borrar).
- Huincha de medir.
- Cronómetro.
- Calculadora.

(Quienes tengan, pueden usar el cronómetro y la calculadora de su celular).

¿CÓMO LO HAGO?

- Formen grupos de al menos 3 personas, ya que existen roles que cumplir en la fase inicial de la actividad:
  - Una persona dejará caer el objeto desde distintas alturas.
  - Otra persona debe medir el tiempo de caída del objeto.
  - Otra debe anotar los datos obtenidos.
- Determinen 6 alturas distintas desde las cuales dejarán caer el objeto y midan cada una con la huincha de medir. Por ejemplo, desde la propia altura de la persona, parado sobre una silla o una mesa, desde los demás pisos del colegio.
- Dejen caer el objeto desde cada altura y midan el tiempo que demora la caída. Para esto, se debe iniciar el cronómetro en el momento en que se suelta el objeto y detenerlo cuando el objeto llegue al suelo. Registren en la tabla los datos obtenidos.

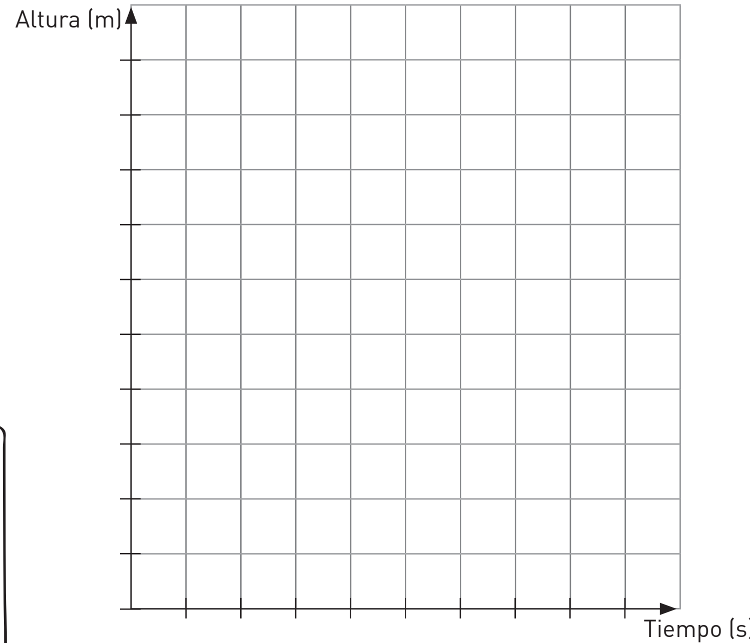


Mantengan especial precaución al momento de dejar caer el objeto. Escojan solamente lugares donde se resguarde su seguridad y la de los demás y bajo la adecuada supervisión de su profesor o profesora.

Altura (m)	Tiempo de caída (s)

INSTRUCCIONES

1 Representen los datos de la tabla en el siguiente gráfico. Observen que el tiempo se ubica en el eje X y la altura en el eje Y. Según los valores que hayan obtenido, escojan la escala más conveniente para el eje X y el eje Y. Luego, unan todos los puntos a mano alzada.



2 ¿Qué características tiene la curva que han graficado? Expliquen.

3 La ecuación de la caída libre es $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2$, donde h corresponde a la altura desde que el cuerpo fue lanzado, t al tiempo que demoró en llegar al suelo y g a la aceleración de gravedad, con $g \approx 9{,}8$ m/s^2
Para cada una de las alturas utilizadas para dejar caer el objeto, calculen los tiempos de caída según la ecuación y regístrenlos.

Altura (m)	Tiempo de caída (s)

4 Comparen los valores para el tiempo de caída de ambas tablas. ¿Qué pueden concluir?

Y él ¿quién es?

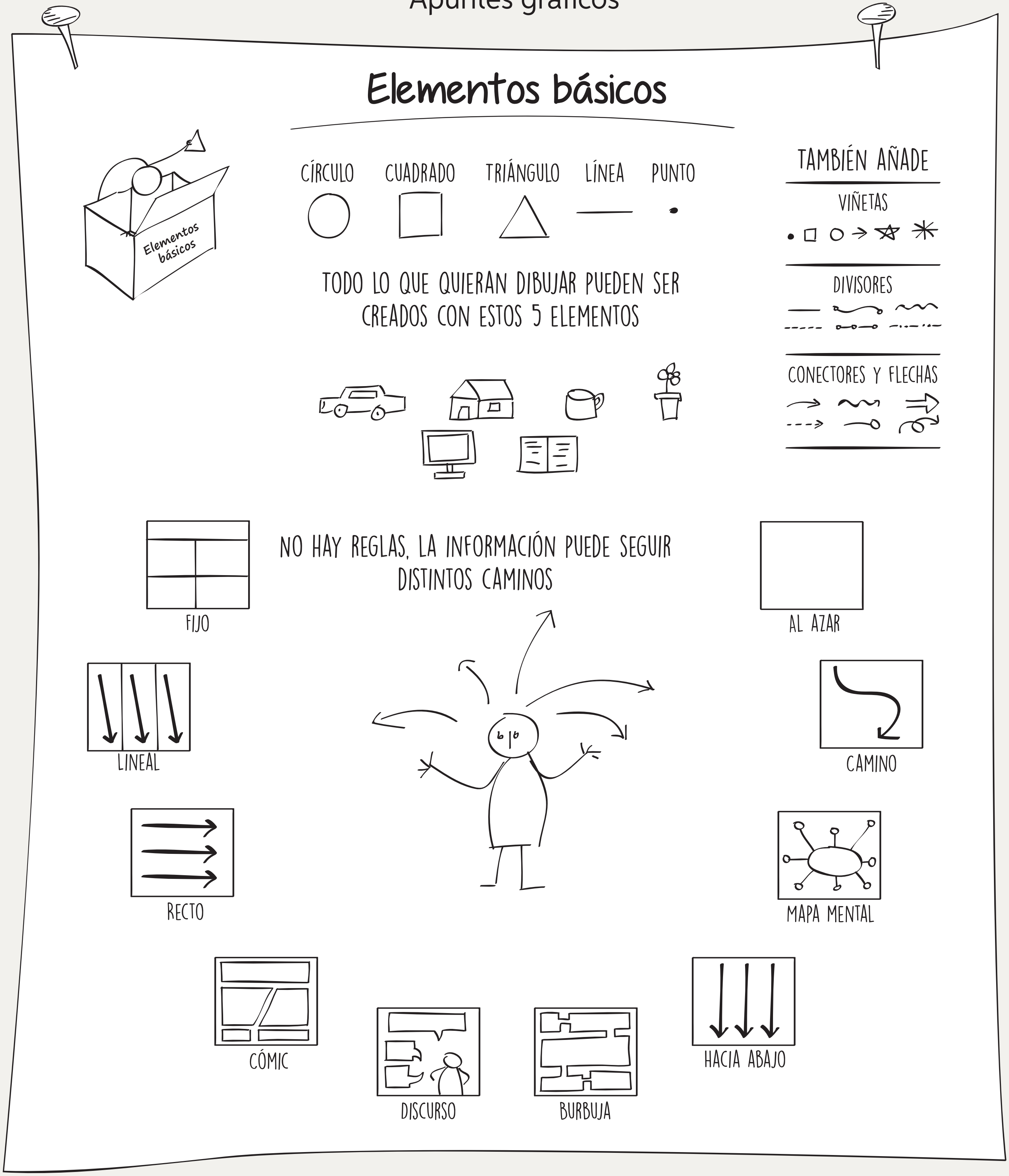
Galileo Galilei (1564 - 1642)

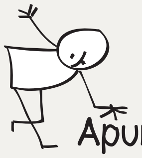
Astrónomo, filósofo, ingeniero, matemático y físico italiano. Como eminente hombre del Renacimiento que fue, mostró interés por diversas ciencias y artes.
Sus logros incluyen la mejora del telescopio, una gran variedad de observaciones astronómicas, la primera ley del movimiento y el apoyo a la "revolución de Copérnico".
Su enfrentamiento con la Iglesia Católica, el que se recuerda con la frase «Y sin embargo se mueve», es una muestra del conflicto entre religión y ciencia en la sociedad occidental.

Cuaderno página 82

APRENDER CON MONOS

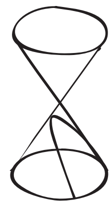
Apuntes gráficos



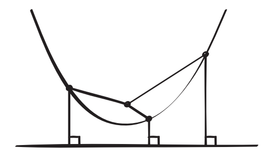


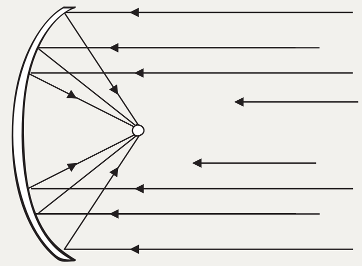
Apuntes gráficos con la parábola

ES UNA SECCIÓN CÓNICA: LA INTERSECCIÓN ENTRE UN CONO RECTO Y UN PLANO CUYO ÁNGULO CON EL EJE DE REVOLUCIÓN DEL CONO SEA IGUAL AL DE LA GENERATRIZ.

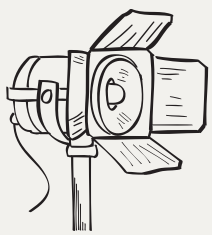


ES EL LUGAR GEOMÉTRICO DE TODOS LOS PUNTOS QUE SON EQUIDISTANTES A LA DIRECTRIZ L, Y A UN PUNTO F EXTERIOR A ELLA, LLAMADO FOCO.





EN UN REFLECTOR PARABÓLICO SE UBICA LA LUZ PARA QUE SE REFLEJE DESDE EL FOCO.

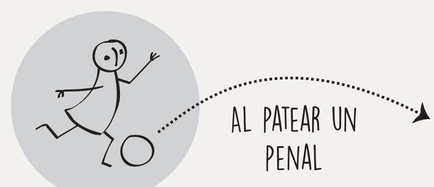


EN UNA ANTENA PARABÓLICA TODAS LAS SEÑALES RECIBIDAS SE CONCENTRAN EN UN PUNTO.

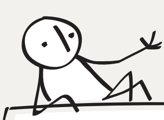
EN CINEMÁTICA, LA PARÁBOLA ES UN MODELO PARA EL LANZAMIENTO DE PROYECTIL.

AL TRATAR DE ENCESTAR

AL LANZAR LA JABALINA



AL PATEAR UN PENAL



Ahora es mi turno de dibujar

Temas para practicar los apuntes gráficos:

- Alguna noticia, una leyenda o un mito urbano.
- ¿Cómo presentarías tu localidad o tu región a alguien que no la conozca?

Muestro lo que aprendí usando apuntes gráficos:

- El concepto de álgebra en general.
- Las lecciones de la unidad de Álgebra.

Cuaderno página 83

- Cuando trabajé en equipo, ¿lo hice en forma responsable y proactiva, respetando a mis compañeros?
- Al enferentar la resolución de problemas, ¿demostré interés, esfuerzo, perseverancia y rigor?

¿Qué aprendí?

Evaluación final

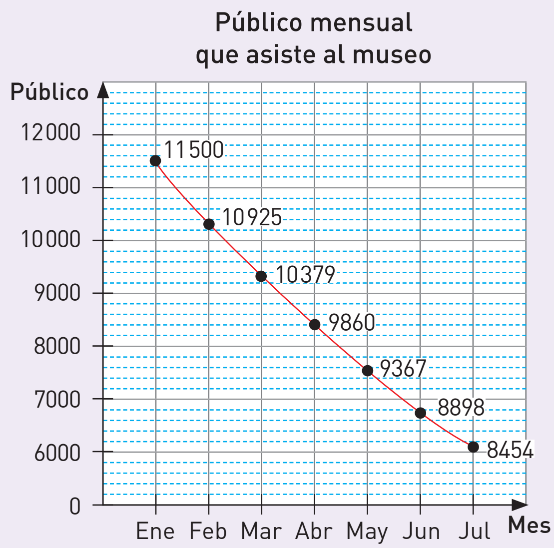
1 La superficie de un bosque es de 10 000 hectáreas. Si cada mes se tala el 10 % de ella, ¿cuánta superficie de bosque queda luego de cuatro meses?

2 El cambio porcentual constante del precio de un producto se puede modelar como $P(t + 1) = 1{,}05 \cdot P(t)$, donde t es el mes y P el precio.

a. ¿Cuál es el índice de variación del precio?

b. Si $P(0) = 1200$, ¿cuál será el precio dentro de 5 meses?

3 El gráfico representa el público asistente a un museo:



a. ¿Cuál es la ecuación de cambio porcentual asociada al gráfico?

b. Bajo las mismas condiciones, ¿qué cantidad de público se espera que asista en octubre?

4 Si se deposita $ 1 000 000 pesos con un interés compuesto del 3 % semestral, ¿cuál es el monto que se obtiene luego de 4 años?

5 Antonio y Laura depositaron cada uno $ 120 000 en sus cuentas a una tasa de interés compuesto anual, durante 6 años. Si Laura realizó el depósito con una tasa del 4 % anual y Antonio lo realizó con una tasa del 8 % anual:

a. ¿Es correcto que las ganancias de Antonio fueron el doble de las de Laura? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuánto dinero retiró cada uno al cabo de 6 años?

6 Manuel depositó $ 72 000 con una tasa de interés anual del 7 %, durante 5 años.

a. ¿Cuánto dinero obtuvo de ganancia?

b. Si hubiese realizado el depósito a un 14 % anual, ¿su ganancia habría sido el doble? Argumenta tu respuesta.

c. ¿Cuánto más habría ganado si hubiese realizado la inversión con una tasa de interés del 21 %?

7 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $x^2 - 2x + 2 = 0$
c. $x^2 - 6x + 11 = 0$
e. $-x^2 + 10x - 23 = 0$
b. $x^2 - 2x = 0$
d. $x^2 + 6x + 3 = 0$
f. $12x - 39 - x^2 = 0$

8 Reduce los términos semejantes. Luego, resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $(x + 4)^2 = 8(x + 4)$
c. $5x^2 + 4x + 3 = 4(x - 3)$
b. $(x + 2)(x + 8) = 10x$
d. $3(x - 3)^2 = (x - 9)^2$

9 Usa el discriminante para determinar cuántas soluciones en los números reales existen para cada ecuación cuadrática y determina las soluciones.

a. $5x^2 - 2x + 10 = 0$
c. $x^2 + 11x + 19 = 0$
b. $-x^2 + 2x - 7 = 0$
d. $4x^2 - 5x + 1 = 0$

10 ¿Cuáles son los tres números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 30 002?

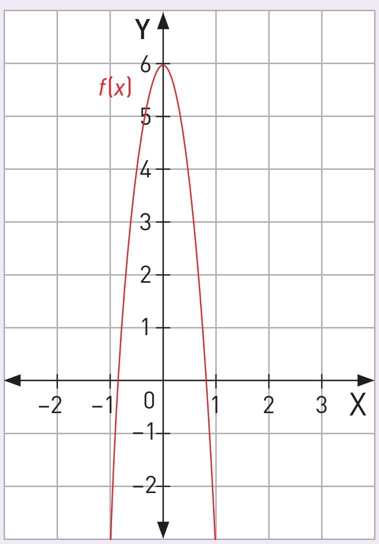
Puedes utilizar la siguiente expresión para resolver la pregunta:
$s = (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2$.

11 La suma de los cuadrados de tres números pares consecutivos es 596. ¿Cuál es el número par mayor de este trío?

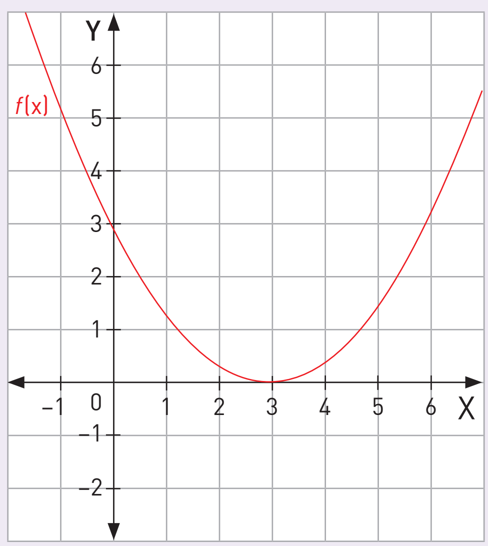
12 **Ciencias naturales.** Desde una terraza ubicada a 4 metros de altura, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de tenis tal que su altura en función del tiempo es $a(t) = -5t^2 + 18t + 4$, donde a está en metros y t en segundos. ¿Cuántos segundos demora la pelota en caer al suelo?

13 **Geometría.** El número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono depende de la cantidad n de lados del polígono, y se relacionan según la expresión $2d = n^2 - 3n$. ¿De cuántos lados es un polígono en el que se pueden trazar 54 diagonales en total?

14 Analiza las siguientes gráficas y decide si corresponden a las funciones cuadráticas indicadas. Si es así, determina gráficamente cuáles son las soluciones de la ecuación cuadrática asociada a la función, esto es, la ecuación $f(x) = 0$.

a.


$f(x) = 9x^2 + 6$

b.


$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

15 Grafica las siguientes funciones cuadráticas a partir de sus puntos principales (intersección con los ejes y vértice de la parábola).

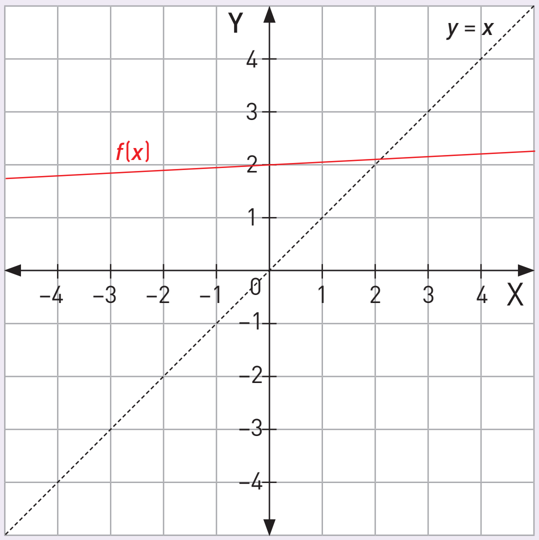
a. $f(x) = 8x^2 - 16x$

b. $g(x) = -3x^2 - 18x - 24$

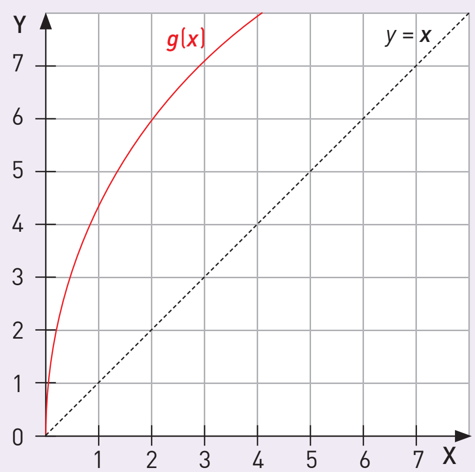
c. $h(x) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{25}{4}$

16 En cada gráfico, traza la gráfica de las funciones inversas para la función graficada.

a.



b.



17 Considerando que cada función está definida de manera que posee una función inversa, determina la representación algebraica de sus funciones inversas.

a. $f(x) = 6x$

b. $g(x) = -\frac{5}{9}x$

c. $h(x) = 15x + 4$

d. $p(x) = \frac{11}{6}x + 6$

e. $q(x) = 0{,}8x + \frac{1}{5}$

f. $r(x) = 18x^2$

g. $s(x) = 12{,}5x^2$

h. $t(x) = \sqrt{\frac{13}{10}x}$

i. $m(x) = 8\sqrt{\frac{1}{5}x}$

18 El contorno de la parte frontal de un túnel puede ser modelado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{9}{20}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{61}{4}$ (graduado en metros).

a. Traza un bosquejo de la gráfica en el plano cartesiano.

b. ¿Cuál es la altura máxima del túnel?, ¿a qué punto de la función corresponde?

c. ¿Cuál es el ancho del túnel?, ¿qué puntos de la función utilizaste para calcularlo?

d. Si a través del túnel pasa una carretera de doble vía y la posición de la línea divisoria entre ambas vías se asocia a la coordenada horizontal del vértice de la parábola de la función, ¿qué punto del plano cartesiano le corresponde a la división de las vías de la carretera?

e. ¿El conjunto de puntos que cumplen con la inecuación $y > \frac{9}{20}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{61}{4}$ pertenecen al interior o al exterior del túnel? Justifica.

19 **Geometría.** La función $p(x) = 2{,}4(x - 10)^2 + 4$ es el resultado de tres traslaciones aplicadas a la función $f(x)$. Con la primera, se aplica el vector de traslación $T_1(0, 5)$ y se obtiene $g(x) = 2{,}4(x + 3)^2 + 1$. Luego, se aplica el vector T_2 y se obtiene $h(x) = 2{,}4(x - 2)^2$. Finalmente, se aplica el vector T_3, y se obtiene la función $p(x)$.

a. ¿Cuál es el valor del vector de traslación T_2?, ¿y el de T_3?

b. ¿Cuál es la función $f(x)$?

c. Si se necesita trasladar la función $p(x)$ para obtener la función $f(x)$ bajo un solo vector de traslación, ¿qué valor debe tener este vector?

20 **Ciencias naturales.** En la tabla se muestra el comportamiento de la presión P que recibe un objeto bajo el agua en una profundidad h. Es decir, la tabla representa la función $P(h)$, que corresponde a la presión experimentada por el cuerpo en distintas profundidades.

Profundidad (m)	Presión (Pa)
5	5000
10	10 000
15	15 000
20	20 000
25	25 000

a. ¿Es posible que la función $P(h)$ tenga una función inversa $h(P)$? Si es así, ¿cómo se interpretaría?

b. Representa la función inversa $h(P)$ en una tabla de valores.

c. ¿Cómo se interpreta que $h(15\,000) = 15$? Justifica.

21 La rapidez con que se mueve el agua por una tubería depende del área de su sección transversal. En cierta tubería, dicha rapidez está dada por la función $v(A) = 5A$ donde v corresponde a la rapidez del agua, medida en m/s, y A al área de la sección transversal de la tubería, medida en metros cuadrados.

a. ¿Cuál es la función inversa de la función $v(A)$?, ¿qué representa en esta situación?

b. Si la rapidez del agua en la tubería es de 40 m/s, ¿qué área debe tener su sección transversal?

22 Un automóvil a control remoto es manejado recorriendo caminos rectilíneos. Si la distancia d, medida en metros, que ha recorrido el automóvil en un instante t, medido en segundos, está determinada por la función $d(t) = 0{,}1\,t^2$:

a. ¿Cómo se puede determinar una función que permita encontrar el tiempo que ha transcurrido dado que el automóvil ha recorrido cierta distancia?, ¿cuál es esta función?

b. ¿Cuánto tiempo debió haber transcurrido si el automóvil ha alcanzado una distancia de 40 cm?

c. ¿Cómo es la gráfica que representa la función inversa de la función $d(t)$? Traza la gráfica y explica tu procedimiento.

23 La ganancia que obtiene un heladero por la venta de un tipo de helado depende del precio al que venda cada uno bajo la función $G(v) = -0{,}5\,v^2 + 400v - 10\,000$, donde G corresponde a la ganancia en pesos obtenida de la venta y v al precio de venta, en pesos, de cada helado. ¿A cuánto debe vender el heladero cada helado para obtener la máxima ganancia posible?, ¿cuál es la máxima ganancia?

24 La altura y, en metros, en cada instante t, en segundos, en la que se encuentra un objeto lanzado verticalmente hacia abajo, está dada por la función $y(t) = 100 - 10t - 5\,t^2$.

a. Realiza una gráfica representando la altura del objeto en cada instante. ¿Qué características tiene esta curva?

b. ¿A qué altura se encuentra el objeto luego de transcurridos 3 segundos?

c. ¿Cuánto tiempo demora el objeto en llegar al suelo?

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😒	😮
Calculé y resolví problemas de cambio porcentual.	○	○	○
Identifiqué y resolví una ecuación cuadrática utilizando diversas estrategias.	○	○	○
Calculé el discriminante de una ecuación cuadrática y decidí cuántas soluciones tiene en los números reales.	○	○	○
Resolví situaciones asociadas a las ecuaciones cuadráticas y determiné si sus soluciones numéricas son pertinentes al problema.	○	○	○
Reconocí la función cuadrática, escrita en su forma general o canónica, y la apliqué para resolver problemas de las ciencias o la vida cotidiana.	○	○	○
Grafiqué una función cuadrática y analicé las variaciones que se producen al modificar los parámetros.	○	○	○
Analicé y calculé la función inversa de una función.	○	○	○
Usé modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.	○	○	○
Demostré interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales	○	○	○

Cuaderno página 86

Reviso mis metas y estrategias

1 Lee nuevamente las preguntas de la página 77, ¿cómo las responderías ahora?

____

____

2 Considera las metas personales que escribiste en la página 79: ¿las cumpliste?, ¿por qué?

____

____

3 Ahora que terminaste la Unidad, ¿qué habilidades consideras relevantes para estudiar álgebra?

____

____

4 ¿Qué actitudes consideras necesarias para estudiar álgebra?, ¿por qué?

____

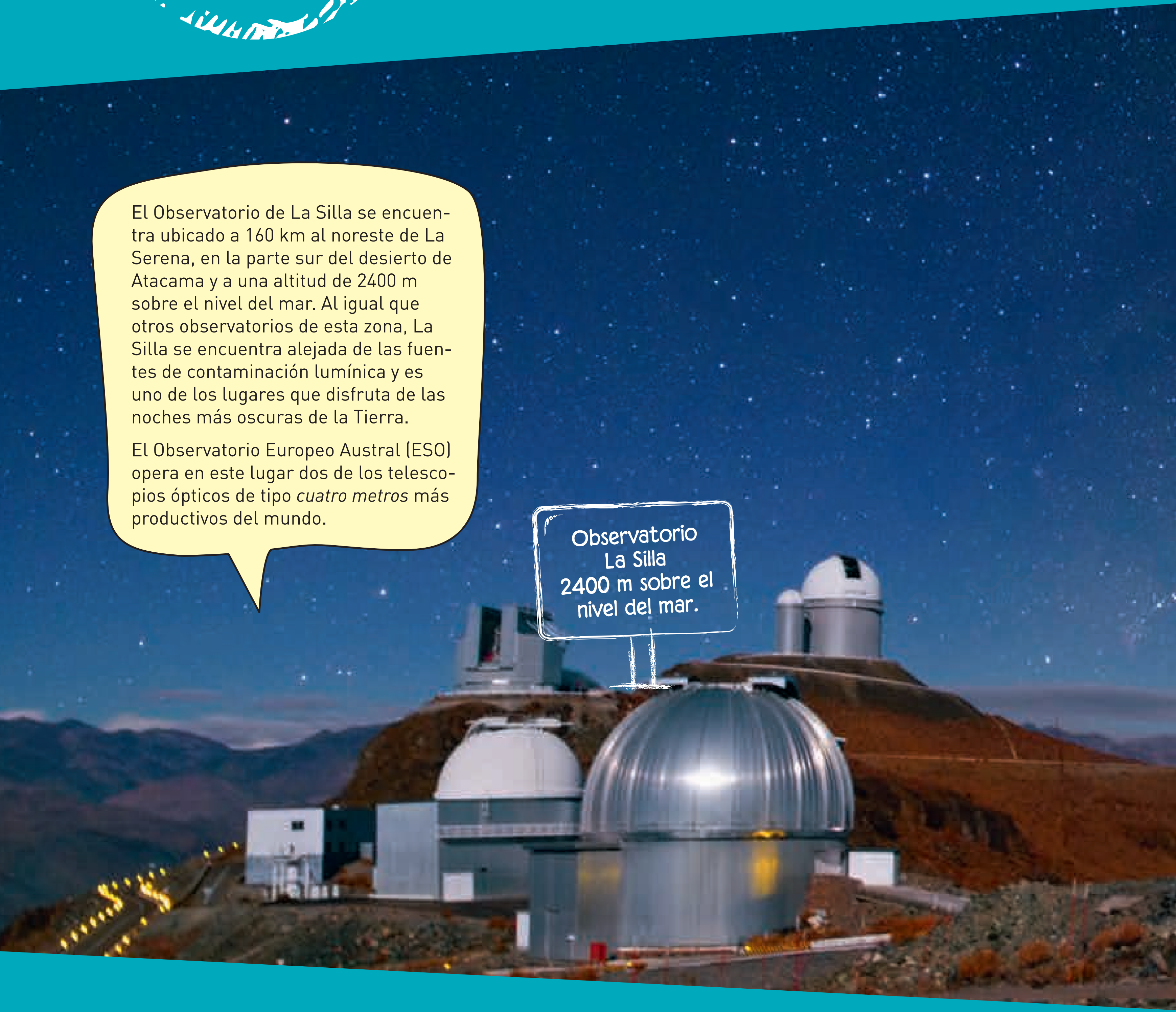
____

UNIDAD 3

GEOMETRÍA

El Observatorio de La Silla se encuentra ubicado a 160 km al noreste de La Serena, en la parte sur del desierto de Atacama y a una altitud de 2400 m sobre el nivel del mar. Al igual que otros observatorios de esta zona, La Silla se encuentra alejada de las fuentes de contaminación lumínica y es uno de los lugares que disfruta de las noches más oscuras de la Tierra.

El Observatorio Europeo Austral (ESO) opera en este lugar dos de los telescopios ópticos de tipo *cuatro metros* más productivos del mundo.



Activo mis ideas

1. ¿Por qué los observatorios tienen una semiesfera en su parte superior?
2. Si hubiera que pintar el exterior de un observatorio, ¿cómo se puede estimar cuánta pintura se necesita?
3. ¿Qué medidas es necesario conocer para construir una maqueta del observatorio?
4. Ya que el observatorio se encuentra a 2400 m sobre el nivel del mar y a 70 km de la costa, ¿cómo se podría determinar el ángulo con que se ve el sol en el horizonte desde el observatorio?

¿Qué sabes sobre la esfera?, ¿cómo la definirías? Coméntalo con un compañero o una compañera.

¿En qué objetos de la vida diaria es posible utilizar esferas? Nombra tres ejemplos de distintos contextos.

¿Qué opinas sobre la utilización de la semejanza en la vida cotidiana?, ¿en qué ámbitos es necesaria?, ¿por qué?

Mis metas y estrategias

¿Qué aprenderé?

Sobre la esfera, qué es y cómo calcular su área y su volumen.

Sobre las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.

¿Para qué me servirá?

Para representar diversos objetos cotidianos redondos y resolver problemas sobre su área, volumen y cómo envasarlos usando el menor material posible, por ejemplo.

Para resolver problemas de la vida cotidiana, como calcular distancias inaccesibles, usar vectores asociados a fuerza y velocidad, por ejemplo, y calcular proyecciones de vectores.

¿Cómo lo voy a aprender?

Las actividades de esta unidad se situarán en contextos relacionados con la astronomía y los observatorios astronómicos del norte de Chile, pues por una parte, muchos de los cuerpos celestes son esféricos y, por otra, las características físicas de estos observatorios y los lugares donde se ubican presentan situaciones en las que se hace necesario aplicar la trigonometría.

¿Qué actitudes crees que son necesarias para aprender geometría?

- Demostrar interés por resolver desafíos matemáticos, con perseverancia y confianza en las propias capacidades.
- Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, respetando los aportes de todos y con disposición a entender sus argumentos.
-

¿Qué habilidades consideras relevantes para estudiar geometría?

Argumentar y comunicar

- Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.
- Explicar demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.

Representar

- Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y su validez.
-

¿Qué te gustaría aprender?

Mis motivaciones

¿Qué te interesa aprender en esta unidad?

Mis estrategias

¿Qué estrategias o procedimientos consideras adecuados para lograr tus metas?

¿Cómo las cumpliré?

¿Cuáles son tus metas personales para esta unidad?

Mis recursos

¿Qué fortalezas y debilidades consideras que tienes para aplicar tales estrategias?

Lección 7

La esfera

Exploro

¿Qué sabes sobre la esfera? Escribe tres ideas.

___

___

¿Qué conoces sobre el círculo?, ¿cómo se relaciona con la esfera? Explica.

___

___

Aprenderé a:

Desarrollar las fórmulas del área y del volumen de la esfera:

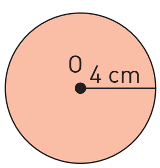
- Conjeturando las fórmulas.
- Representando de manera concreta y simbólica.
- Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.

Necesito recordar...

- Perímetro y área del círculo.
- Área y volumen del cilindro y del cono.
- Número π.

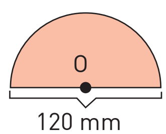
¿Qué debo saber?

1. Calcula el área (A) y el perímetro (P) de las figuras geométricas.

a. 

$A =$

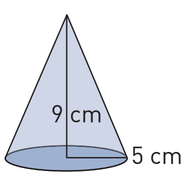
$P =$

b. 

$A =$

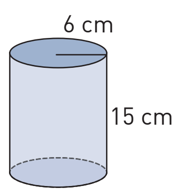
$P =$

2. Calcula el área (A) y el volumen (V) de los cuerpos geométricos.

a. 

$A =$

$V =$

b. 

$A =$

$V =$

3. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de área 180π m^2 y altura $h = 9$ m?

___

4. ¿Cuál es el área de un cilindro de volumen 120π m^3 y radio $r = 4$ m?

___

5. Un cono de helado tiene 10 cm de diámetro superior y 12 cm de profundidad.

a. ¿Cuál es el área del barquillo que lo forma?

b. ¿Cuánto helado puede contener en el espacio limitado por el barquillo?

6. Ignacio decidió abrir una pequeña empresa que envasa productos en conserva. Su primera entrega consiste en $120\,000\pi$ cm^3 de duraznos en mitades. Por ello, debe decidir qué latas utilizará, de las tres ofrecidas por su proveedor, ya que tienen distintos tamaños y diferentes valores según el material utilizado, todo lo cual se detalla a continuación.

	Medidas del envase		Costo del material (por cm^2)
Modelo	Altura	Diámetro	
A	20 cm	8 cm	$0,21
B	15 cm	10 cm	$0,2
C	12 cm	13 cm	$0,17

Ignacio necesita saber con cuál modelo el costo total por los envases es menor.

a. Observando la tabla anterior, ¿con cuál modelo crees que le convendría envasar los duraznos? Justifica tu respuesta.

b. Determina cuál modelo de lata resulta más económico por unidad.

c. ¿Coincide el cálculo anterior con lo que inferiste en un inicio? ¿Por qué?

d. Para envasar el total de duraznos de la primera entrega, ¿cuántas latas ocuparía en cada caso?

Usa $\pi \approx 3,14$

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😒	😮
Calculé el área y el perímetro de figuras geométricas.	◯	◯	◯
Calculé el área y el volumen de cuerpos geométricos.	◯	◯	◯
Resolví problemas de área y volumen en cilindros y conos.	◯	◯	◯
Usé modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.	◯	◯	◯
Demostré curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en mis capacidades, incluso cuando no conseguí un resultado inmediato.	◯	◯	◯

Cuaderno página 91

Tema 1: ¿Qué es una esfera?

¿Qué aprenderé?
A relacionar la esfera con objetos cotidianos.

¿Para qué?
Para resolver problemas en los que estén involucradas esferas, sean geométricos, científicos o de la vida diaria.

Y ella ¿quién es?

Hipatia (c.370 - 415)

Filósofa y maestra griega, que destacó en la matemática y la astronomía. Cultivó los estudios lógicos y las ciencias exactas. Hija y discípula del astrónomo Teón, Hipatia es la primera matemática de la que se tiene conocimiento. Escribió sobre geometría, álgebra y astronomía, mejoró el diseño de los primitivos astrolabios (instrumentos para determinar las posiciones de las estrellas sobre la bóveda celeste) e inventó un densímetro.

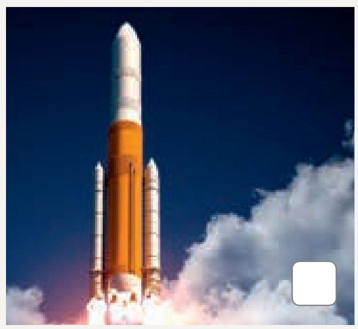
Actividad en pareja

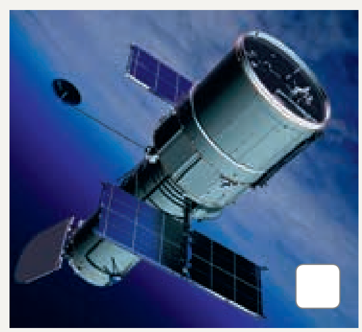
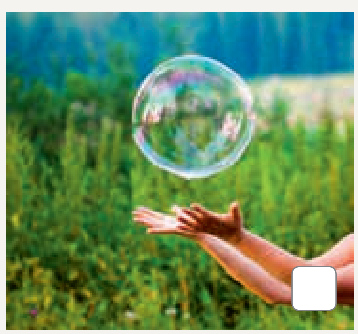
Taller

Observen y realicen las siguientes actividades.

1. Determinen cuáles de los siguientes objetos se asemejan a una esfera y cuáles no. Justifiquen su respuesta.






2 ¿Qué características tienen en común los objetos que marcaron?

3 Sin hacer referencias a algún objeto, ¿cómo pueden definir una esfera?

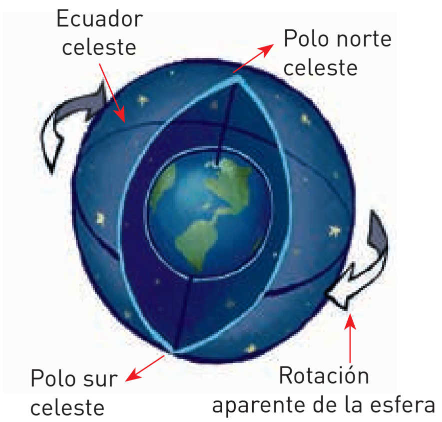
4 Respecto de sus características geométricas, ¿qué elementos permiten distinguir una esfera de otra? Expliquen.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Matemática y ciencia

La **esfera celeste** es una esfera imaginaria sobre cuya superficie se proyectan los astros visibles a simple vista. Este concepto se usaba en la astronomía antigua y puede comprenderse al observar, durante una noche serena, el cielo en un lugar con el horizonte libre. En este contexto, pareciera que los astros se encuentran todos sobre una superficie esférica de radio infinito que, con el paso de las horas, gira de este a oeste.

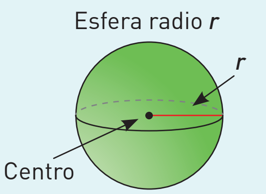
Se trata obviamente de una mera apariencia: en realidad los cuerpos celestes están a distancias diferentes con respecto al observador; mientras que el movimiento de la esfera celeste no es otro que el de la Tierra, que gira alrededor de su propio eje de oeste a este.



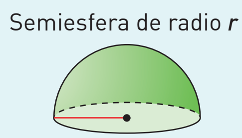
¿Por qué la esfera celeste gira en un sentido si la Tierra gira en el otro?

En resumen

La **esfera** es un cuerpo geométrico limitado por una superficie curva, llamada casquete esférico, cuyos puntos equidistan de un punto central llamado **centro** de la esfera. Esta distancia corresponde al **radio** de la esfera.

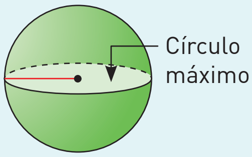


Una **semiesfera** es cada uno de los dos cuerpos que se obtienen al dividir una esfera en dos partes iguales.



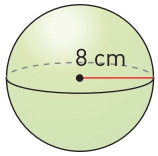
El **círculo máximo** de una esfera corresponde a la base de cada semiesfera que se puede obtener de ella.

Es decir, el círculo máximo y la esfera tienen el mismo radio.



Actividades de práctica

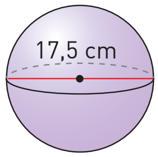
1. Calcula el área (A) del círculo máximo de cada esfera, completando cada desarrollo.

a. 

Para el círculo máximo:

r = 8 cm

$A = \pi r^2 =$

b. 

Para el círculo máximo:

r =

A =

2. Completa la siguiente tabla, clasificando los siguientes objetos según su forma.

	Forma			
Objeto	Cilíndrica	Cónica	Esférica	Otra
Barquillo de helado				
Extintor de incendios				
Pelota de rugby				
Pompón				
Embudo				
Almohada				
Perla				
Sombrero chino				
Planeta				
Moneda				

●● Actividad en pareja

3. Realicen la siguiente actividad.

PASO 1 Corten una tira de papel o cartulina e inserten los extremos en un lápiz, como se ve en la fotografía, de modo que se forme un semicírculo.

PASO 2 Den un golpe en el papel usando los dedos, de modo que la tira gire en torno al lápiz como eje de rotación.

PASO 3 Luego, doblen la tira, de modo que se forme un triángulo y repitan el paso 2. Pueden doblarla en otro lugar, para que se forme un rectángulo y repetir el paso 2.

Comenten y respondan:

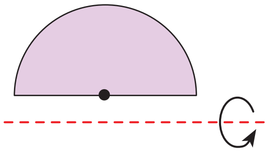
¿Qué cuerpos geométricos o figuras 3D se generan al rotar las banderas?

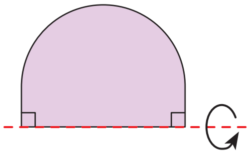
____

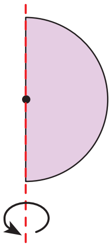
____

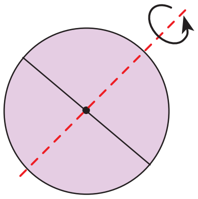
____

4. Analiza cuál de las rotaciones se puede asociar a una esfera. Justifica los casos en que no sea posible.

a. 

c. 

b. 

d. 

Matemática y ciencia

¿Por qué los observatorios astronómicos tienen esa forma?
Para poder acceder a cualquier ubicación en el cielo y así observar los distintos elementos de la bóveda celeste, el telescopio puede girar y también cambiar su inclinación. La cúpula de cada observatorio astronómico debe abrirse en el sector frente al telescopio para permitir la observación. Naturalmente, también debe girar en 360°.
La semiesfera, entonces, es la forma que mejor se adapta a las necesidades del movimiento de cada telescopio.

¿Qué aprendí hoy?

1 ¿Con qué objetos cotidianos se puede relacionar una esfera?

____

____

2 ¿Cuál es la definición de esfera?

____

____

Cuaderno página 92

Tema 2: ¿Cómo se calcula el volumen de una esfera?

¿Qué aprenderé?

A calcular el volumen de la esfera.

¿Para qué?

Para resolver problemas geométricos, científicos o de la vida diaria que involucren esferas.

●● Actividad en pareja

Taller

Resuelvan los siguientes problemas sobre volumen.

1 El colegio recibió estos libros sobre física y astronomía para la biblioteca. Ahora, es necesario estimar el tamaño de la estantería donde se ubicarán.

a. ¿Qué harían para calcular el volumen total de todos estos libros?

b. Si pudieran ordenar esta torre, ¿cambia el volumen total de los libros?, ¿por qué?

c. Dado que la torre alcanza los 64 cm, si el largo del libro mayor es de 25 cm y su ancho 15 cm, ¿cuál creen que es el volumen que podrían ocupar todos estos libros? Expliquen su estrategia para calcularlo.

2 Para estos libros y otros de la biblioteca se requieren estanterías. Se diseñan dos modelos de estantería, ambos con la misma cantidad de repisas, pero en un modelo cada repisa es rectangular, mientras que en el otro, cada una es cuadrada.

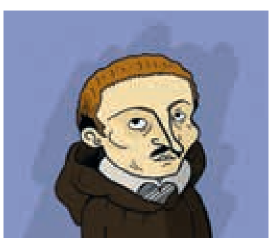
a. Dibujen un boceto para cada modelo de estantería: ¿en qué se parecen?, ¿en qué se diferencian?

b. Si la condición es que ambas repisas tengan igual superficie, ¿se puede asegurar que, al considerar la estantería completa, ambas tienen igual volumen?, ¿por qué?

3 Presenten estos resultados oralmente al curso.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Y él ¿quién es?

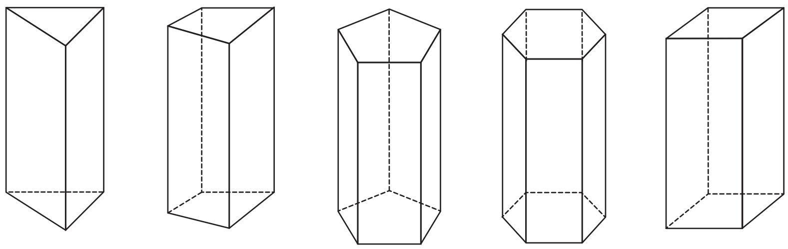


Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647)

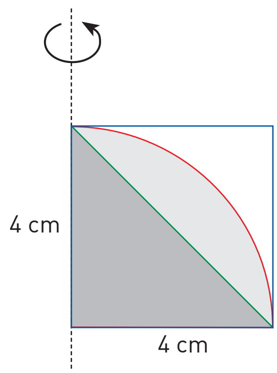
Matemático italiano. Jesuita y discípulo de Galileo, fue desde 1629 catedrático de Astronomía en Bolonia. En su obra *Seis ejercicios de geometría* (1649), establece y perfecciona su teoría de los indivisibles, precursora del cálculo integral. También realizó la primera demostración del teorema de Pappus relativo al volumen de un sólido de revolución.

Actividades de proceso

1. Usando un argumento similar, si sabemos que los siguientes cuerpos geométricos tienen la misma altura y área basal, ¿se puede asegurar que tengan igual volumen? Justifica tu respuesta.



2. En el siguiente dibujo se muestra la cuarta parte de un círculo y un triángulo rectángulo isósceles, ambos **inscritos** en un cuadrado. Imagina que las tres figuras giran alrededor del eje indicado.



a. ¿Qué cuerpos geométricos se forman por la rotación de las figuras?

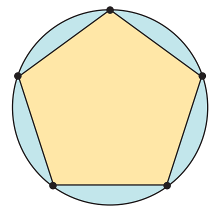
b. ¿Cuál de estos cuerpos tiene el mayor volumen?, ¿y cuál el menor? Justifica.

c. Calcula el volumen de los cuerpos generados por la rotación del cuadrado y del triángulo.

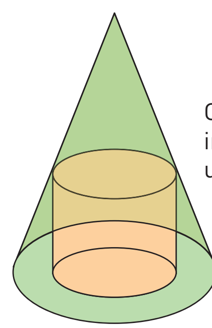
d. Basándote en el resultado anterior, ¿cuál crees que sea el volumen del cuerpo generado por la rotación del cuarto de círculo? Fundamenta tu respuesta.

Glosario

Inscrito: se dice de una figura o un cuerpo geométrico trazado al interior de otro, de modo que tengan puntos comunes sin cortarse.



Polígono inscrito en el circulo



Cilindro inscrito en un cono

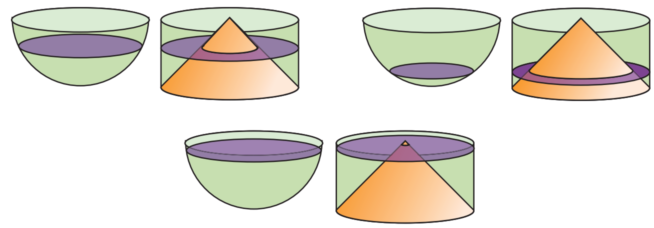
¿Puedes discutir tu respuesta con tus compañeros?, ¿llegaron a la misma conclusión?

Glosario

Sección: figura que resulta de la intersección de una superficie con un sólido.

<< Una de las formas de determinar el volumen de la esfera se basa en la comparación entre la semiesfera, el cilindro y el cono, todos del mismo tamaño.

Arquímedes pudo demostrar que, al realizar secciones en cualquier altura intermedia, se cumple que el área de la **sección** en la semiesfera es igual a la diferencia entre las áreas de las secciones en el cilindro y el cono.



Ayuda

Recuerda que π es un número irracional, cuyo valor truncado con 15 decimales es: $\pi \approx 3{,}141592653589793$. Por lo general, se aproxima a 3,14.

Luego, como la semiesfera, el cilindro y el cono tienen igual altura, que además es igual al radio, determinó la expresión para calcular el volumen de la esfera.

3. Observa y completa los pasos siguientes.

PASO 1 Obtén la expresión del volumen del cilindro y del cono. Considera que en este caso $h = r$ para ambos cuerpos.

$V_{cilindro}$ = ____________ V_{cono} = ____________

PASO 2 Completa la tabla para algunos valores de r considerando las fórmulas del paso 1.

Radio (cm)	$V_{cilindro}$ (cm³)	V_{cono} (cm³)	$V_{cilindro}$ (cm³) - V_{cono} (cm³)
1	π	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \cdot 1^3$
2	8π	$\frac{8}{3}\pi$	$\frac{16}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \cdot 2^3$
5	125π		
10		$\frac{1000}{3}\pi$	

¿Qué fórmula aparece en la última columna?

____

____

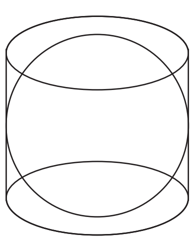
¿Se obtendrá para cualquier valor de r?

____

____

Matemática e historia

La demostración original de Arquímedes concluyó que **el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circunscrito a ella**. Él estimaba mucho este descubrimiento. Tanto, que pidió que en su tumba se grabase esta figura en recuerdo de la mejor de todas sus ideas.



De esta forma, el volumen de una semiesfera de radio r corresponde a la diferencia entre el volumen de un cilindro y un cono, ambos de radios r y alturas r:

$V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}} =$ ____________________

Finalmente, como la esfera es el doble de la semiesfera, el volumen de la esfera es:

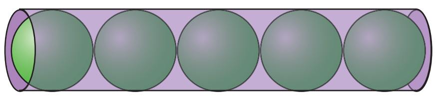
$V_{\text{esfera}} =$ ________________

4. Una industria de repuestos fabrica bolitas metálicas de 200 g de masa y de densidad 8 g/cm^3. Las bolitas serán envasadas de a cinco unidades en cajas cilíndricas del menor tamaño posible. ¿Cuál será el radio y la longitud de cada caja, aproximadamente?

Ayuda

En física y química, la **densidad** es una magnitud escalar que relaciona la cantidad de masa en un determinado volumen de alguna sustancia.

El siguiente dibujo representa la situación:



Para determinar las dimensiones de cada caja, se debe calcular el radio de cada bolita. Como se conoce la densidad (ρ) y la masa (m), se puede calcular el volumen (V) y con ello obtener el radio (r):

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{\rho} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Entonces:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi \cdot V} \quad \Rightarrow r = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

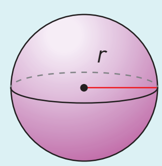
Luego, el radio de la caja debe ser ____________, ya que el radio de cada bolita y de la caja son iguales; y la longitud debe ser ____________, ya que corresponde a 10 veces el radio.

En resumen

Volumen de una esfera

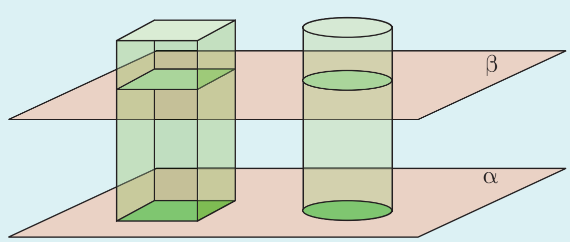
El volumen (V) de una esfera de radio r está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Principio de Cavalieri

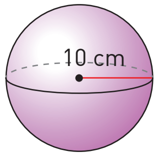
Si dos cuerpos tienen la misma altura y si tienen igual área las secciones transversales de cada cuerpo, obtenidas por el corte de los cuerpos, a una misma altura, por un plano β paralelo a otro plano α sobre el que están sus bases, entonces ambos cuerpos tienen igual volumen.

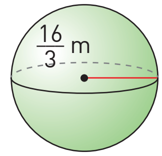


Actividades de práctica

1. Calcula el volumen de cada esfera.

Usa $\pi \approx 3{,}14$

a. 

b. 

2. Calcula el volumen (V) de cada esfera considerando el radio r y el diametro d.

a. $r = 9$ cm

$V =$

b. $r = \frac{25}{4}$ mm

$V =$

c. $d = 3{,}5$ m

$V =$

3. Calcula el radio (r) de cada esfera considerando la información dada.

a. $V = 36\,\pi$ cm^3

$r =$

b. $V = \frac{500}{3}\,\pi$ m^3

$r =$

4. Analiza y responde.

Usa calculadora Para explorar

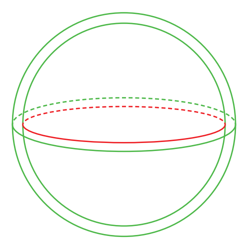
a. Si el radio de una esfera aumenta al doble, ¿en cuánto aumenta su volumen?

b. Para que el volumen de una esfera disminuya a su octava parte, ¿de qué forma debe variar su radio?

c. ¿Cuál es el volumen de una esfera cuyo círculo máximo tiene un área de 121π cm^2?

5. Algunas investigaciones científicas han estimado que el radio de un protón equivale a $8{,}4 \cdot 10^{-16}$ m. Según este dato, ¿cuál debería ser su volumen?

6. Un contenedor está formado por dos casquetes esféricos concéntricos de radios 122 cm y 124 cm. Calcula el volumen del sólido encerrado por ambos.



Usa $\pi \approx 3{,}14$

7. Tamara está moldeando cuatro objetos cilíndricos de arcilla, cuyo radio y altura miden ambos 9 cm. Luego, se arrepiente y decide, con la misma arcilla, construir tres esferas de radio 9 cm.

a. ¿Alcanzará la arcilla disponible para que Tamara construya las tres esferas? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuántas esferas de diámetro 6 cm podría fabricar Tamara con el material disponible?

8. Hace unos días, Francisca visitó un observatorio astronómico. Hoy, en clases, les comentó a sus compañeros y compañeras lo sorprendida que quedó con respecto al tamaño del telescopio y de la cúpula semiesférica que lo contiene. Aunque no anotó la medida del diámetro de esta cúpula, sí registró su volumen: 523,43172 m^3 . De acuerdo a los datos, ¿cuál es el diámetro de la cúpula del observatorio que visitó Francisca?

9. Gabriel intenta construir una maqueta que represente, en forma proporcional, la Tierra y Júpiter. Se sabe que el diámetro del gigante gaseoso es de 142 984 km y el de la Tierra es de 12 742 km.

a. ¿Cuántas veces más grande debiera ser la maqueta de Júpiter?

b. Si para representar la Tierra Gabriel usara una bolita pequeña como una canica, ¿qué podría usar para representar Júpiter?

10. Ciencias naturales. La célula más grande del cuerpo humano es el óvulo y la más pequeña, el espermatozoide. La función principal de ambos es aportar material genético, femenino y masculino respectivamente. La forma del óvulo es esférica, posee un diámetro aproximado de 0,01 cm y es 500 veces más grande que un espermatozoide. Según la información anterior, ¿cuál es el volumen aproximado de un óvulo?

11. La fábrica de artículos para mascotas de Josefina recibió un pedido de 1000 pelotas esféricas macizas con el siguiente detalle: 250 de diámetro 5,4 cm, 360 de diámetro 4,8 cm y 390 de diámetro 4,2 cm.

a. ¿En cuál de los tres tipos de pelotas invertirá una mayor cantidad de material para su fabricación?

b. Además, Josefina recuerda que dispone de 11 445,3 cm^2 de material con el que debe confeccionar 30 pelotas de igual tamaño, pero no recuerda sus medidas. ¿Qué radio deben tener estas pelotas para utilizar todo el material disponible?

Usa $\pi \approx 3{,}14$

Actividad grupal

12. Andrea necesita empacar cuatro esferas de plumavit de 5 cm de diámetro en una caja de cartón y quiere utilizar la menor cantidad de material para la caja. Discutan:

a. ¿Qué forma debe tener la caja? Expliquen su decisión.

b. Calculen el espacio que ocupan las cuatro esferas en la caja.

c. Determinen el porcentaje del espacio de la caja que ocupan las cuatro esferas.

d. Si el radio de las esferas aumenta al doble, ¿el tamaño de la caja también aumenta al doble? Justifiquen su respuesta.

13. Laura trabaja en una fábrica de pelotas para distintos deportes. El día de hoy se deben entregar dos pedidos:

a. El primero consiste en 24 pelotas de golf de 42,9 mm de diámetro. ¿Cuál es el volumen total de este pedido?

b. El segundo de ellos consiste en 30 pelotas de béisbol, que en total tienen un volumen de $62{,}208\,\pi$ cm^3. ¿Cuál es el radio de cada pelota?

¿Qué aprendí hoy?

Se proyecta la construcción de un observatorio astronómico con fines educativos. Si el diámetro de la cúpula semiesférica que formará parte del observatorio es de 9 metros, ¿cuál será su volumen en metros cúbicos?

Cuaderno página 94

Tema 3: ¿Cómo se calcula el área de la esfera?

¿Qué aprenderé?

A calcular el área de la esfera.

¿Para qué?

Para resolver problemas en los que estén involucradas esferas, ya sea en situaciones geométricas, científicas o de la vida diaria.

Actividad en pareja

Taller

A diferencia de un cono y un cilindro, la esfera no tiene una red de construcción que permita observar la superficie para calcular el área. El siguiente experimento permite obtener una aproximación de ese valor.

Materiales

- Una naranja, un pomelo, una mandarina o una clementina (que sea lo más regular posible).
- Dos hojas de papel.
- Lápiz.

PASO 1 Cada uno deberá colocar la naranja encima de una de las hojas y dibujar con el lápiz su círculo máximo. Repitan esto para disponer de varios círculos congruentes (repartidos en las dos hojas).

PASO 2 Pelen la naranja. No importa el tamaño de los trozos de cáscara que queden.

PASO 3 Una vez que esté toda la piel separada de la naranja, ubiquen los trozos de cáscara al interior de los círculos. Como si de un rompecabezas se tratara, encajen unas piezas con otras para que no quede ni un solo espacio. Si es necesario, córtenlos en trozos más pequeños.

Observen y respondan.

1. ¿Cuántos círculos pudo llenar cada uno con las cáscaras de naranja?
2. Si sus naranjas hubieran sido de distinto tamaño ¿hubiesen completado más o menos círculos? Expliquen.
3. Comparen sus resultados con el de sus compañeros y compañeras. ¿Qué pueden concluir?

Si repitieras este taller, ¿qué harías distinto para obtener un mejor resultado?

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

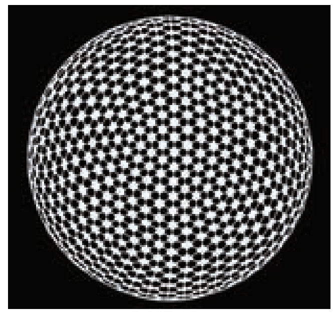
Comprendo la demostración

Considera que una esfera pudiera formarse con muchos conos, de modo que las cúspides de todos los conos se junten en un solo punto, que está en el centro de la esfera, tal como puede verse en las dalias, los crisantemos o los pompones de lana.



Entonces, podemos considerar que el volumen de una esfera se compone de la suma de los volúmenes de cada uno de los conos que la forman.

Además, el área de la esfera se puede aproximar a la suma de las áreas basales de los correspondientes conos. Usaremos estas relaciones para determinar la expresión que nos permita calcular el área de la esfera. Observa.



Representa el número de conos que forman la esfera.

$$n \cdot V_{cono} = V_{esfera}$$

Área basal de cada cono

Radio de la esfera

$$n \cdot \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Altura de cada cono

Al multiplicar por 3 ambos lados de la ecuación.

$$n \cdot A_B \cdot h = 4\pi r^3$$

Pero si la esfera se compone de conos, la altura de cada cono es prácticamente igual al radio de la esfera, es decir, podemos remplazar ***h*** por ***r***.

Al remplazar **h** por **r**

$$n \cdot A_B \cdot r = 4\pi r^3$$

Al dividir por **r** ambos lados de la ecuación

$$n \cdot A_B = 4\pi r^2$$

Todos los conos

Área basal de un cono

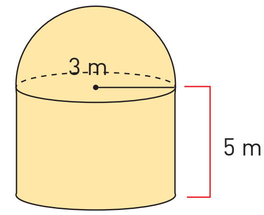
Entonces, $n \cdot A_B$ representa el área basal de todos los conos que están formando la esfera, esto es, juntos forman el total de la superficie de la esfera, que es igual a $4\pi r^2$.

María Teresa Ruiz
(1946-)

Astrónoma, astrofísica y docente chilena. Fue la primera mujer en la historia del país que obtuvo el Premio Nacional de Ciencias Exactas, en 1997. Fruto de sus investigaciones fue el descubrimiento de una enana café, una especie de planeta, adelantándose a los investigadores norteamericanos y europeos. Bautizó a la enana café descubierta por ella con el nombre de Kelu, que en mapudungún significa rojo.

Actividades de proceso

1. Un observatorio tiene la forma de un cilindro con una semiesfera en su parte superior. Calcula su volumen y su área superficial según la figura.



Como el radio y la altura son conocidos, el área (A_c) del manto del cilindro es ____________ y el área (A_S) de la superficie de la semiesfera es ____________, entonces el área de la superficie total (A_T) del observatorio es:

____

2. Una industria tiene tres depósitos, cada uno de los cuales tiene forma de semiesfera. Sus radios son 8 m, 12 m y 15 m. Para protegerlos exteriormente de la corrosión, se les aplicará un líquido especial cuyo rendimiento es 18 m^2 por litro. ¿Cuántos litros necesita comprar la industria para realizar esa tarea?

Como los radios son conocidos y el área (A_S) de la superficie de una semiesfera es ____________, el área de la superficie total (A_T) se obtiene de:

____

Para calcular la cantidad de litros, se resuelve la siguiente división:

____

De esta forma, la industria necesita ________________ litros del líquido especial.

3. En la discoteca Mar Abierto, debido al éxito de la esfera de espejos que instalaron en la pista de baile, decidieron construir otra esfera idéntica. ¿Cuál es el radio que deben considerar al momento de su construcción si su área es de 5 024 cm^2 aproximadamente?

Para determinar el radio, se resuelve la siguiente ecuación:

Para una segunda pista de baile, deciden construir una esfera más grande, con un radio igual a 1,5 veces la anterior. ¿Cuál es la diferencia de las superficies entre ambas esferas?

____

4. En cada foto aparecen objetos que tienen la forma de una esfera o una semiesfera.

a. Observa atentamente los detalles de cada foto. ¿Qué diámetro puede tener la esfera (o semiesfera) en la realidad? Comenta con un compañero o compañera cómo llegaste a ese valor en cada caso.

Foto A: Diámetro: ________ Foto B: Diámetro: ________

Foto C: Diámetro: ________ Foto D: Diámetro: ________

b. Con las medidas estimadas, calcula el área y el volumen de cada uno de los objetos y exprésalo en una unidad adecuada.

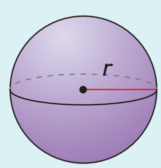
Objeto	Área	Volumen
Pelota		
Burbuja		
Iglú		
Estanque		

En resumen

Área de una esfera

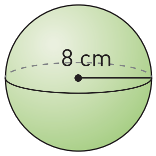
El área (A) de una esfera de radio r está dada por:

$$A = 4\pi r^2$$

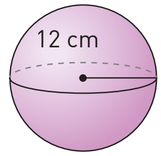


Actividades de práctica

1. Calcula el área de la superficie de cada esfera.

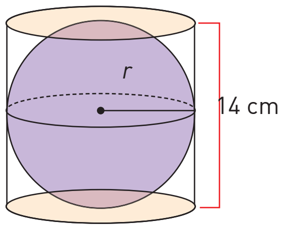
a. 

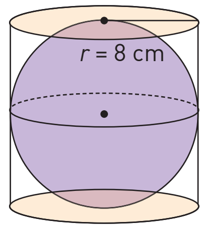
$A =$

b. 

$A =$

2. Analiza cada figura. Luego, calcula el área de la superficie de cada esfera. Ambas esferas están inscritas en el cilindro.

a. 

b. 

3. Calcula el radio y el volumen de cada esfera considerando el área de su círculo máximo.

a. $A_{cm} = 25\pi$ cm^2

$r =$

$V =$

c. $A_{cm} = 8100\pi$ mm^2

$r =$

$V =$

e. $A_{cm} = 3600\pi$ m^2

$r =$

$V =$

b. $A_{cm} = 0{,}01\pi$ m^2

$r =$

$V =$

d. $A_{cm} = 0{,}64\pi$ cm^2

$r =$

$V =$

f. $A_{cm} = 144\pi$ mm^2

$r =$

$V =$

4. Dominga, la administradora de una fábrica de balones, recibió hoy un pedido de una escuela de básquetbol consistente en 12 balones esféricos de radio 12 cm y 24 balones de radio 8 cm. Ella sabe que dispone de un total de 42 000 cm^2 del material necesario para confeccionar balones y quiere asegurarse de que con esto le bastará para completar el pedido.

Usa $\pi \approx 3{,}14$

a. ¿Cuánto material se requiere para confeccionar un balón grande?, ¿y uno pequeño? Para los cálculos, redondea al entero en cada caso.

b. ¿Cuánto material se requiere para cumplir con el pedido?, ¿le alcanza con el material del que dispone?, ¿por qué?

c. ¿Consideras que son exactos los resultados obtenidos en a y b? Justifica tu respuesta.

d. ¿Cuántos balones de radio 8 cm podría fabricar con la misma cantidad de material que se requiere para cumplir con el pedido?

5. Historia, geografía y ciencias sociales. Martín y su equipo de trabajo deben construir, para la próxima feria científica de su ciudad, un globo terráqueo que muestre en su superficie la distribución de los continentes de forma proporcional a la realidad.

a. Los miembros del equipo saben que la superficie aproximada de la Tierra es de 510,1 millones de km^2. ¿Cuál es el radio de la Tierra en kilómetros? Trunca el valor final al entero.

b. Martín calcula que el radio de la Tierra es 3 456 000 veces el radio del globo terráqueo que quieren construir. Si ambos valores están en metros, ¿cuál es el radio del globo terráqueo?

c. Conociendo su radio, ¿cuál es el área de la superficie del globo terráqueo?

d. Aproximadamente el 71 % de la superficie de la Tierra está cubierta por agua. Si consideras que la Tierra tiene forma esférica, ¿a cuántos kilómetros cuadrados corresponde ese porcentaje?

6. Andrés fabrica pantallas esféricas y cilíndricas para las lámparas del hogar. Estas pantallas están formadas por una base metálica forrada con telas de diversos colores. Al inicio del día se da cuenta de que se verá enfrentado a distintos problemas.

a. Durante la mañana debe confeccionar tres pantallas esféricas y tres pantallas cilíndricas, cada una de las cuales tiene un radio de 12 cm. Si, además, el cilindro tiene una altura igual a su radio, ¿para la confección de cuál de las pantallas necesitará una mayor cantidad de tela?, ¿por qué?

b. Luego, debe entregar un pedido consistente en dos pantallas esféricas de radio 9 cm y dos pantallas cilíndricas de radio 9 cm y con altura 10 cm. ¿En cuál de las pantallas utilizará mayor cantidad de género: en las esféricas o en las cilíndricas?

c. Finalmente, recuerda que su amiga Paula solicitó 7 pantallas esféricas: 3 de color café y 4 de color naranja. Andrés no recuerda los datos específicos de las pantallas, pero tiene anotado en su agenda que la superficie total que debe utilizar es 4154,22 cm^2 de género café y 3629,84 cm^2 de género naranja. Calcula el valor de los radios de cada pantalla para que Andrés pueda cumplir con el pedido de Paula.

Usa $\pi \approx 3,14$

¿Qué aprendí hoy?

Ante la proximidad de las Fiestas Patrias, Héctor ha decidido que los tres adornos esféricos que hay en su oficina se pinten con los colores de la bandera chilena: la esfera pequeña, de diámetro 75 cm, se pintará de blanco; la mediana, de diámetro 125 cm, se pintará de color rojo; y la grande, de 150 cm de diámetro, se pintará de azul.

1 ¿Cuál es el área de cada uno de los tres adornos esféricos?

2 Si decide adquirir tarros de pintura que tienen un rendimiento de 12 m^2 y aplicar dos capas, ¿cuántos tarros de cada color deberá comprar para pintar los tres adornos esféricos?

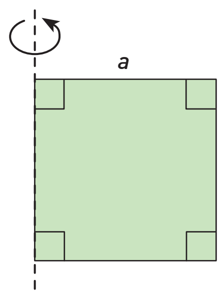
Cuaderno página 96

1 Completa la siguiente tabla, clasificando cada objeto según su forma.

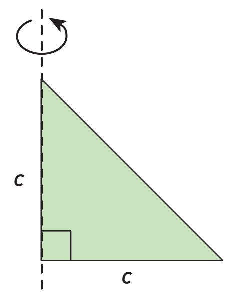
	Forma			
Objeto	Cilíndrica	Cónica	Esférica	Otra
Albóndigas				
Picarones				
Telescopio				
Burbujas				
Lentejas				

2 Esboza el cuerpo generado por cada rotación. Luego, escribe su nombre e identifica sus medidas.

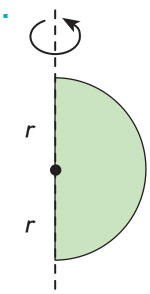
a.



b.

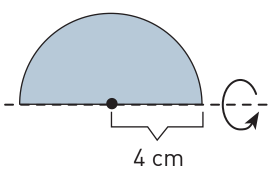


c.



3 Calcula el volumen y el área de la esfera relacionada con cada rotación.

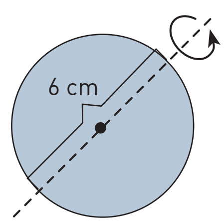
a. Semicírculo.



$V =$

$A =$

b. Círculo.



$V =$

$A =$

4 Calcula el volumen (V) de cada esfera considerando la información dada.

a. $r = 12$ cm

$V =$

b. $r = 8$ mm

$V =$

c. $d = 14$ m

$V =$

5 **Ciencias naturales.** El Sol, la estrella cuya energía sustenta a casi todas las formas de vida en la Tierra, es una bola prácticamente esférica cuyo volumen es $1{,}4123 \cdot 10^{18}$ km^3. ¿Cuál es su radio?

6 Analiza cada situación. Luego, responde.

a. Si el radio de una esfera se reduce a la mitad, ¿a cuánto se reduce su área?

b. Una esfera varía su tamaño de modo que su diámetro aumenta al triple. ¿Cuál es la razón entre el área inicial y el área final de la esfera?

c. Si el área de una esfera disminuye un 75 %, ¿cuánto disminuye su radio?

d. Al variar el tamaño de una esfera, esta cuadruplica su área. ¿Cuánto aumentó su radio?

7 Francisca fabrica bombones de chocolate, todos ellos esféricos, de diferentes tamaños y sabores. Esta semana debe entregar tres pedidos.

a. El primer pedido consiste en 900 bombones de 25 mm de diámetro: 210 unidades de chocolate amargo, 150 de chocolate blanco, 180 de chocolate de leche y los restantes de chocolate con almendras. ¿Qué volumen de cada tipo de chocolate necesitará Francisca para cumplir con este pedido?

b. Para el segundo, requiere envolver con papel metalizado 1500 bombones (de 16 mm de diámetro): 240 con color verde, 360 con color morado, 420 con color rojo y los restantes con color amarillo. ¿Cuánto papel metalizado de cada color (en cm^2) utilizará para envolver todos los bombones?

c. Finalmente, el tercer pedido consiste en 600 unidades de chocolate con almendras, para cuya elaboración destinará 8 478 000 mm^3 de sus ingredientes. Si todos los bombones serán de igual tamaño, ¿cuál es la cantidad mínima de papel metalizado que requiere para envolverlos?

Me evalúo

Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Relacionar la esfera con objetos cotidianos y reconocerla como la rotación de una figura plana.	○	○	○
Aplicar las fórmulas del área y el volumen de una esfera para resolver problemas geométricos, científicos y de la vida diaria.	○	○	○
Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.	○	○	○
Explicar demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.	○	○	○

Cuaderno página 98

Reviso mis metas y estrategias

1 Considera las estrategias que escribiste en la página 189: ¿han sido eficaces?, ¿por qué?

____

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

____

Lección 8

Razones trigonométricas

Exploro

¿Qué sabes sobre la trigonometría? Escribe tres ideas.

____

____

¿Todos los triángulos rectángulos son semejantes? Justifica.

____

____

Aprenderé a:

Utilizar las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

- mostrando la relación con las propiedades de la semejanza y los ángulos;
- explicándolas pictórica y simbólicamente;
- aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados;
- resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

Aplicar las razones trigonométricas para componer y descomponer vectores en diversos contextos, así como para determinar sus proyecciones.

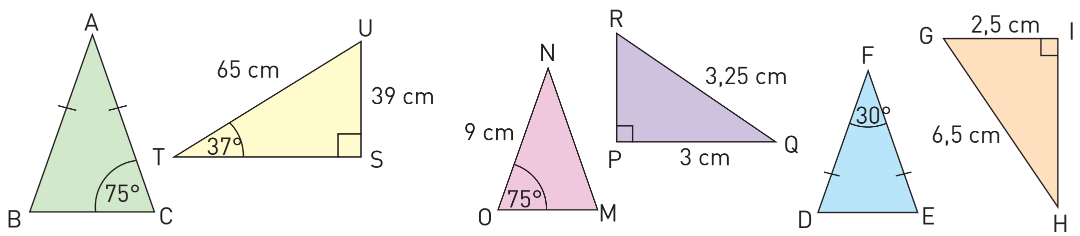
Necesito recordar...

- Semejanza de triángulos
- Teorema de Pitágoras
- Plano cartesiano
- Vectores

¿Qué debo saber?

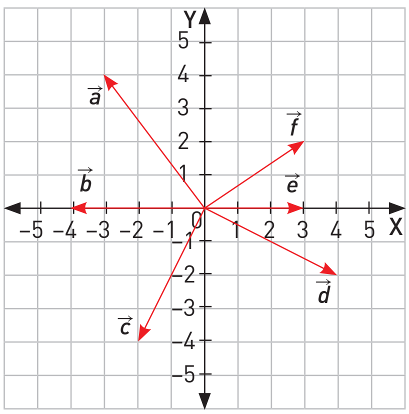
1. Verifica si los siguientes tríos de números representan tríos pitagóricos, es decir, si pueden corresponder a medidas de los lados de un triángulo rectángulo.
   a. 7, 24 y 25.
   b. 12, 35 y 37.
   c. 10, 15 y 20.
2. Si una escalera de 2 m es apoyada en la pared a una distancia de 50 cm de esta, ¿qué altura alcanzará?

3. ¿Qué triángulos son semejantes? Escríbelos en la tabla, junto con el criterio empleado en cada caso.



Triángulos semejantes		Criterio de semejanza

4. Calcula, en relación con los vectores representados.



a. $|\vec{a}|$ = ____________

b. $|\vec{d}|$ = ____________

c. $\vec{b} + \vec{e}$ = ____________

d. $\vec{a} + \vec{f}$ = ____________

5. Construye un plano cartesiano y representa gráficamente cada vector.

a. $\vec{u} = (-5, 1)$

b. $\vec{v} = (1, 4)$

c. $\vec{t} = (2, -3)$

d. $\vec{w} = (-5, -3)$

6. Resuelve, considerando que $\vec{p} = (4, -1)$ y $\vec{q} = (-8, 2)$.

a. $3\vec{p} + 5\vec{q}$ = ____________

b. $4\vec{p} + \vec{q}$ = ____________

c. $7\vec{q} - \vec{p}$ = ____________

d. $\vec{p} + 3\vec{q}$ = ____________

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😏	😮
Apliqué el teorema de Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana.	○	○	○
Apliqué las propiedades de semejanza para reconocer triángulos semejantes.	○	○	○
Representé e interpreté vectores en el plano cartesiano.	○	○	○
Elegí o elaboré representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez.	○	○	○
Participé en la búsqueda de una posible solución a un problema.	○	○	○

Cuaderno página 100

Tema 1: ¿Qué son las razones trigonométricas?

¿Qué aprenderé?

A comprender las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.

¿Para qué?

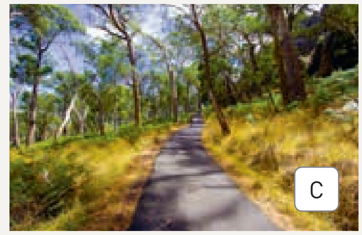
Para resolver triángulos, es decir, determinar las medidas de los ángulos o de los lados que no se conozcan a partir de los datos disponibles.

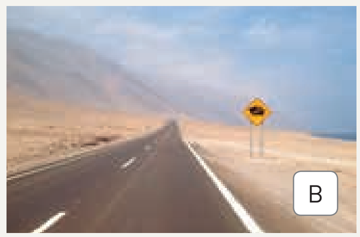
Actividad en pareja

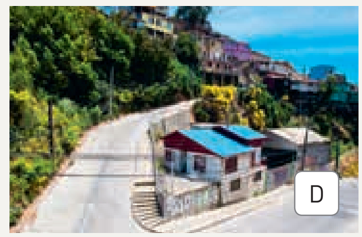
Taller

Observen las imágenes y realicen las actividades.


A


C


B


D

La pendiente de un camino, una carretera o una calle se refiere a la razón entre la altura (vertical) a la cual sube (o baja) el camino y la distancia por la que avanza en dirección horizontal. También puede expresarse usando porcentajes.

1 Lee atentamente e identifica a qué foto pertenece cada comentario.

- "Debo tener cuidado en esta parte para no tener problemas con la carga; avanzando 10 km por la cuesta, ya estaré 1500 m más arriba".
- "En este tramo se avanza más lento, porque en 500 m del sendero la altitud cambia de 2400 m sobre el nivel del mar a 2475 m sobre el nivel del mar".
- "Solo en esta curva, al caminar 40 m, se sube 6 m altiro".

2 Con los datos anteriores, dibujen un triángulo rectángulo que represente la pendiente del camino en cada caso.

a. ¿Qué relación existe entre los triángulos? Expliquen su respuesta.

b. ¿Cuánto mide el ángulo asociado?

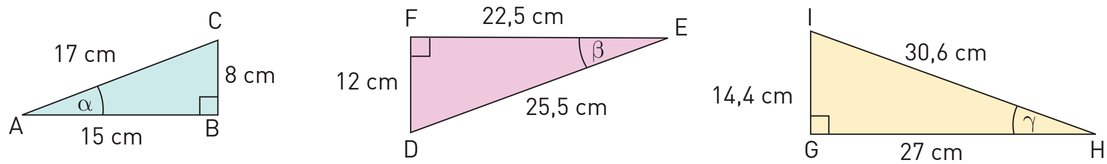
c. Determinen la pendiente de cada camino. ¿Qué pueden concluir?

d. Si quisieran expresar la pendiente como porcentaje, ¿a qué valor corresponde?

¿Cómo trabajé el taller?	Individualmente	○	○	○
	Gripalmente	○	○	○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	Individualmente	○	○	○
	Grupalmente	○	○	○

Actividades de proceso

1. Observa los triángulos. Luego, responde.



a. ¿Son semejantes los triángulos ABC, EFD y HGI?

▸ Sí, ya que los lados homólogos son proporcionales:

$\frac{EF}{AB} = \frac{FD}{BC} = \frac{DE}{CA} = 1{,}5$ $\qquad \frac{GH}{AB} = \frac{GI}{BC} = \frac{HI}{CA} =$ ______ $\qquad \frac{GH}{EF} =$ ______

¿Se puede concluir a partir de esto que $\alpha = \beta = \gamma$? ¿Por qué?

____

b. Calcula la tangente de los ángulos α, β y γ. ¿Qué puedes concluir?

$tg(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{15} = 0{,}5\overline{3}$ $\qquad tg(\gamma) = \frac{GI}{HG} =$ ______

$tg(\beta) = \frac{FD}{EF} = \frac{12}{22{,}5} =$ ______

▸ El valor de la tangente de los ángulos α, β y γ es ______________________

Usa calculadora
Para explorar

c. Calcula las otras **razones trigonométricas**. ¿Se cumple lo mismo?

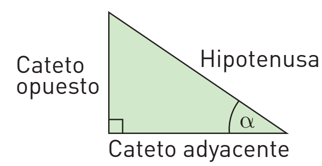
$sen(\alpha) = \frac{BC}{CA} =$ ______ $\qquad cos(\beta) = \frac{EF}{ED} =$ ______

$cos(\alpha) = \frac{AB}{CA} =$ ______ $\qquad sen(\gamma) = \frac{GI}{HI} =$ ______

$sen(\beta) = \frac{DF}{ED} =$ ______ $\qquad cos(\gamma) = \frac{HG}{HI} =$ ______

d. Si se dibuja un triángulo semejante a los triángulos ABC, EFD y HGI, y se calcula las razones trigonométricas para el ángulo correspondiente con α, β y γ, ¿qué valores se obtendrían?, ¿por qué?

Glosario



Algunas **razones trigonométricas** para el ángulo α son:

$$sen(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$tg(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

2. Completa calculando aproximadamente seno, coseno y tangente de cada ángulo agudo del triángulo ABC.

$sen(\alpha) =$ __________

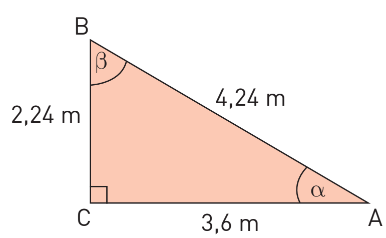
$sen(\beta) =$ __________

$cos(\alpha) =$ __________

$cos(\beta) =$ __________

$tg(\alpha) =$ __________

$tg(\beta) =$ __________

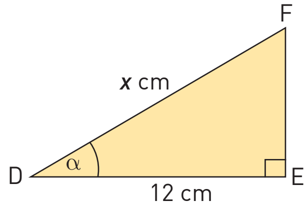


Redondea a la décima

▸ ¿Es cierto que $sen(\alpha) = cos(\beta)$? ¿Existen otras igualdades? Justifica.

3. Analiza cada triángulo. Luego, determina el valor de x completando cada desarrollo.

a. $\cos(\alpha) = 0,6$

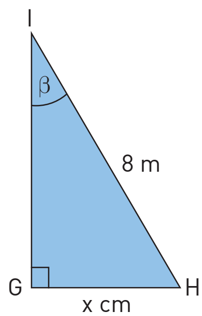


Como $\cos(\alpha) = \dfrac{DE}{x} = 0,6$,

entonces $DE = 0,6x$.

Por lo tanto, x = ____________________

b. $\text{sen}(\beta) = 0,6$

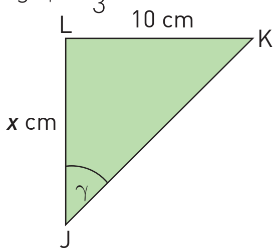


Como $\text{sen}(\beta) = \dfrac{x}{HI} = 0,6$,

entonces $\dfrac{x}{0,6} = HI$.

Por lo tanto, x = ____________________

c. $\text{tg}(\gamma) = \dfrac{4}{3}$



Como $\text{tg}(\gamma)$ =

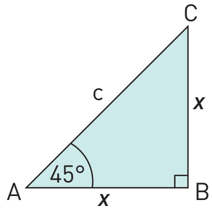
Por lo tanto, x = ____________________

4. Completa la siguiente tabla con la razón trigonométrica correspondiente, las expresiones algebraicas y el resultado para cada caso. Redondea los ángulos al grado y las longitudes (en cm) a la décima.

Ángulo / lado dado	Lado dado	Lado / ángulo a determinar	Razón trigonométrica	Expresión algebraica	Resultado
$\alpha = 20°$	$c = 5$ cm	cateto opuesto a	$\text{sen}(\alpha) = \dfrac{a}{c}$	$a = c \cdot \text{sen}(\alpha)$	$a = 1,7$ cm
$\beta = 75°$	$b = 3,5$ cm	hipotenusa c			
$\alpha = 70°$	$b = 6$ cm	hipotenusa c			
$\beta = 30°$	$c = 6,5$ cm	cateto adyacente			
$\beta = 55°$	$c = 7,5$ cm	cateto opuesto			
$\alpha = 4$ cm	$b = 5$ cm	ángulo α			
$\alpha = 4$ cm	$c = 8$ cm	ángulo β			

5. Analiza los siguientes desarrollos para deducir las razones trigonométricas de un ángulo de 45°, de 30° y de 60°.

a. En el triángulo isósceles rectángulo ABC:



Aplicando el teorema de Pitágoras en ΔABC.

$$c^2 = x^2 + x^2$$
$$c^2 = 2x^2$$
$$c = \sqrt{2}\,x$$

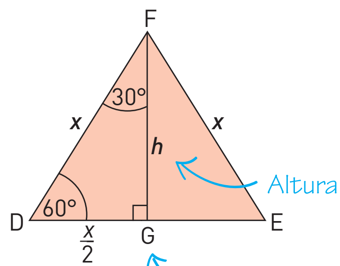
Por definición de las razones trigonométricas y racionalizando.

$\text{sen}(45°) = \dfrac{x}{\sqrt{2}\,x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(45°) = \dfrac{x}{\sqrt{2}\,x} =$ __________

$\text{tg}(45°) =$ __________

b. En el triángulo equilátero DEF, el triángulo DGF es rectángulo.



Punto medio de la base DE

$$x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3}{4}x^2$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Aplicando el teorema de Pitágoras

Por definición de las razones trigonométricas.

$\text{sen}(30°) = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} =$ __________

$\cos(30°) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} =$ __________

$\text{tg}(30°) = \dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} =$ __________

$\text{sen}(60°) =$ __________

$\cos(60°) =$ __________

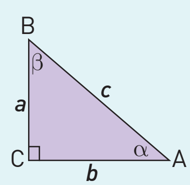
$\text{tg}(60°) =$ __________

Y ella ¿quién es?

Sofía Kovalevskaya
(1850-1891)

Esta matemática y escritora rusa, profesora además en la Universidad de Estocolmo, realizó sus mayores aportes sobre las ecuaciones diferenciales. También incursionó en la física, con la teoría general del movimiento para un cuerpo rígido que gira en torno a un punto; y en la astronomía, con un trabajo sobre los anillos de Saturno y en la divulgación científica. Defendió los derechos de las mujeres para obtener la mejor educación posible en universidades, donde prácticamente no se las recibía.

En resumen



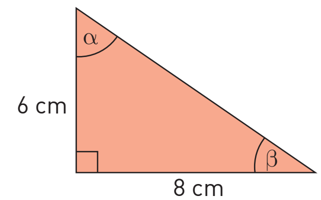
En un triángulo rectángulo, las **razones trigonométricas** son relaciones entre las longitudes de sus lados que se establecen con respecto a sus ángulos agudos.

En el triángulo ABC se definen las siguientes razones con respecto al ángulo α:

- **Seno de α:** denotada por sen(α), es la razón entre el cateto opuesto *a* y la hipotenusa *c*: $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{a}{c}$
- **Coseno de α**: denotada por cos(α), es la razón entre el cateto adyacente *b* y la hipotenusa *c*: $\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c}$
- **Tangente de α**: denotada por tg(α), es la razón entre el cateto opuesto *a* y el cateto adyacente *b*: $\text{tg}(\alpha) = \dfrac{a}{b}$

Actividades de práctica

1. Calcula las razones trigonométricas de cada ángulo agudo del triángulo.



a. $\operatorname{sen}(\alpha) =$ ______

b. $\cos(\alpha) =$ ______

c. $\operatorname{tg}(\alpha) =$ ______

d. $\operatorname{sen}(\beta) =$ ______

e. $\cos(\beta) =$ ______

f. $\operatorname{tg}(\beta) =$ ______

2. Sin utilizar calculadora, determina el valor de las siguientes expresiones.

a. $3\operatorname{sen}(30°) + 2\cos(60°)$ ______

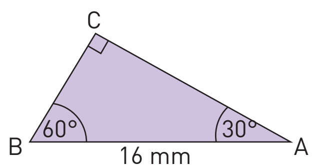
b. $\sqrt{3}\operatorname{tg}(60°) - 3\operatorname{tg}(45°)$ ______

c. $\operatorname{sen}(30°) - \cos(30°)$ ______

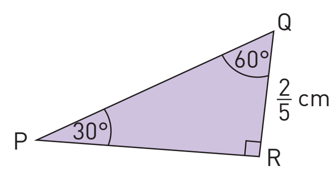
d. $\operatorname{sen}(60°) + \cos(45°) - \operatorname{tg}(60°) \cdot \operatorname{tg}(30°)$ ______

3. Calcula las medidas de los lados faltantes en los siguientes triángulos rectángulos:

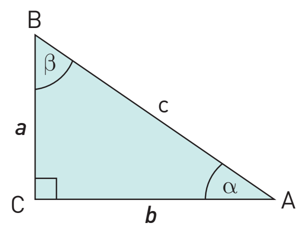
a.



b.



4. Observa el triángulo ABC.

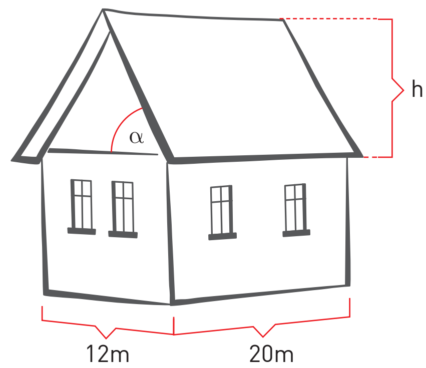


a. Identifica las razones trigonométricas para α y β. ¿Cómo se relacionan?

b. Como $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$ y $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, entonces se cumple que $a = c \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$ y $b = c \cdot \cos(\alpha)$. Además, por definición se tiene que $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b}$; luego, al remplazar se tiene que:

$\operatorname{Tg}(\alpha) =$

5. En la imagen a la derecha se muestra el modelo de una casa. El ángulo α de la pendiente del techo se mide en relación con la horizontal. Si el ancho de la casa es de b = 12 m, su largo c mide 20 m y el ángulo que forma el techo con la horizontal es $\alpha = 20°$, ¿cuál es la altura h que tiene la punta del techo sobre el segundo piso?



●● Actividad en pareja

6. Tracen un bosquejo que les permita representar cada situación.

a. La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 18 m y el ángulo que forma este respecto al suelo es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?

b. Violeta sube un resbalín que tiene una inclinación de 30° y 3 m de longitud. ¿Cuál es la mayor altura que Violeta puede alcanzar?

c. Un edificio tiene una altura de 72 m. Cuando el sol tiene un **ángulo de elevación** de 30°, ¿qué medida tiene la sombra que proyecta el edificio?

d. Un avión se encuentra a 2100 m de altura cuando comienza su descenso para aterrizar. ¿A qué distancia se encuentra de la pista, si para bajar aplica un **ángulo de depresión** de 20°?

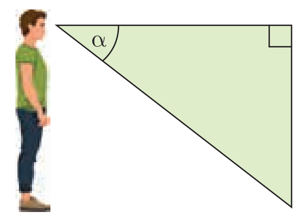
e. Alejandro está recostado en una plaza y observa desde el piso un edificio de 110 m de alto. Si el edificio está a una distancia de $110\sqrt{3}$ m, ¿cuál es el ángulo de elevación con el que Alejandro lo observa?

f. Una palmera proyecta una sombra de 12 m en el suelo. Si el ángulo de elevación respecto de la parte más alta del árbol es tal que su tangente es 0,7, ¿cuál es la altura de la palmera?

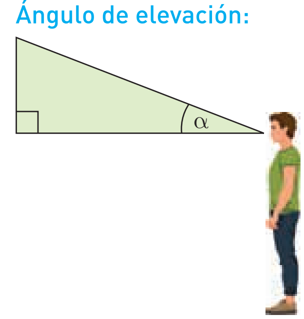
g. Desde un faro que se encuentra a 28 m sobre el nivel del mar, se observa un bote con un ángulo de depresión de 60°. ¿Cuál es la distancia entre el punto de observación y el bote?

Glosario

Ángulo de depresión:



Ángulo de elevación:



¿Qué aprendí hoy?

1 Las medidas de los catetos del triángulo ABC son a = 5 cm y b = 12 cm.

a. ¿Cuál es la medida de la hipotenusa c?

____

b. Determina el valor de las razones trigonométricas sen(α), cos(α) y tg(α).

____

2 ¿Cómo se relacionan tg(α) y tg(β)? Explica.

____

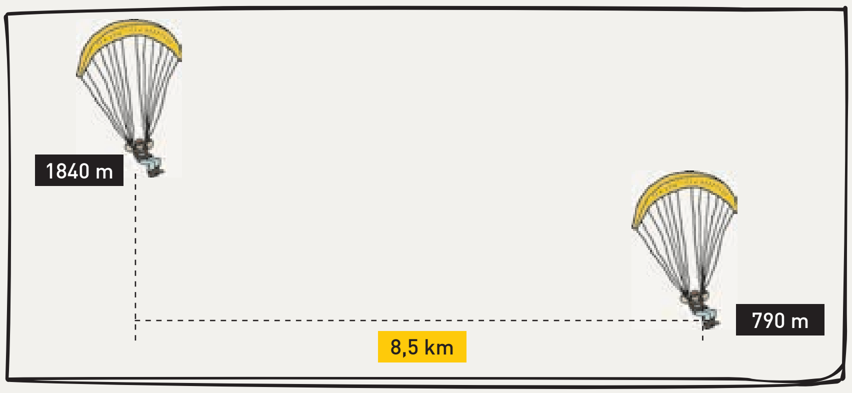
Cuaderno página 101

Taller de habilidades

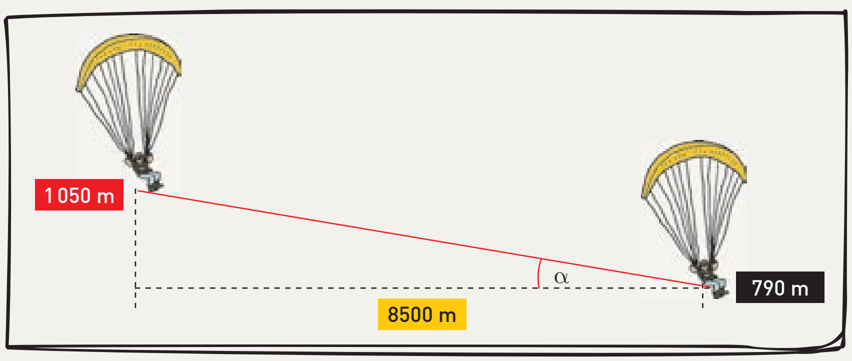
Representar

Un parapente parte en la cima de un cerro de una altura de 1840 m. El destino en la altura de 790 m está a una distancia horizontal de 8,5 km. Si suponemos que el vuelo del parapente es en una línea recta, ¿cuál es el ángulo entre el trazado del vuelo y la horizontal?

PASO 1 Realizar un bosquejo que represente la situación, incluyendo los datos mencionados en el problema.



PASO 2 Completar el bosquejo con el fin de incorporar datos que puedan deducirse de los datos originales, así como la medida que se busca determinar. Homologar las unidades de medida si es necesario.



PASO 3 Identificar cuál de las razones trigonométricas permite relacionar los datos existentes con la incógnita.

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{1050}{8500} \approx 0{,}1235$$

PASO 4 Usar la calculadora para obtener la medida del ángulo.

$$\text{tg}^{-1}(0{,}1235) \approx 7$$

PASO 5 Luego, el ángulo entre el trazado del vuelo y la horizontal es 7°.

Gustavo se encuentra en un cerro desde donde puede ver dos observatorios astronómicos. Uno hacia el este y otro hacia el oeste. Tamara le comenta que la distancia que existe entre él y el extremo superior de cada observatorio es 6,5 km para el primero y $\frac{11}{3}\sqrt{3}$ km para el segundo. Además, Gustavo estima que los ángulos de elevación con los que puede verlos son de 30° y 60°, respectivamente.

1 ¿Cuál es la altura de cada observatorio?

2 ¿A qué distancia se encuentra Gustavo de la base de cada uno de ellos?

Cuaderno página 104

Tema 2: ¿En qué se aplican las razones trigonométricas?

¿Qué aprenderé?

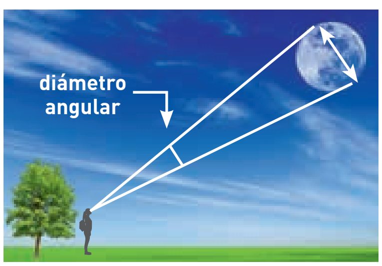
A aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos para determinar ángulos o medidas de lados.

¿Para qué?

Para calcular el tamaño de elementos lejanos y distancias inaccesibles, tanto por las complejidades del terreno, como por las distancias astronómicas.

Glosario

Diámetro angular: diámetro de un objeto, tal como lo ve en el cielo un observador, en medida angular. El diámetro angular de un cuerpo depende de su tamaño y también de la distancia a la que se encuentra, pues si está lejos, su diámetro angular disminuirá.



Ayuda

Aunque este taller podría realizarse tanto con la Luna como con el Sol, ya que sus tamaños aparentes en el cielo son similares, se recomienda esperar la Luna llena, por el grave peligro para los ojos que existe al mirar directamente al Sol.

Actividad grupal

Taller

Materiales

- ✓ Una moneda.
- ✓ Una regla.
- ✓ Una huincha métrica.

1. Con la moneda, pueden calcular el **diámetro angular** de la Luna siguiendo estos pasos:
   - En un lugar abierto, busquen la Luna e intenten taparla exactamente usando la moneda, como si fuera un eclipse. Si es necesario, mientras uno de ustedes sujeta la moneda, el otro se acerca o se aleja hasta conseguir que la moneda tape justo el disco lunar.
   - Cuando el que está mirando considere que los tamaños aparentes de la moneda y la Luna coincidan, otro compañero debe medir la distancia del ojo a la moneda. Midan también el diámetro de la moneda.
2. Tracen un esquema de la situación y, con los datos que se han conseguido, determinen cuál es el diámetro angular de la Luna en el cielo.
3. Si el diámetro real de la Luna es de 3474 km, ¿cuál es la distancia de la Tierra a la Luna?
4. Comparen el valor obtenido con el que obtuvieron los demás grupos: ¿son similares?, ¿por qué?

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Herramientas tecnológicas

Calculadora científica

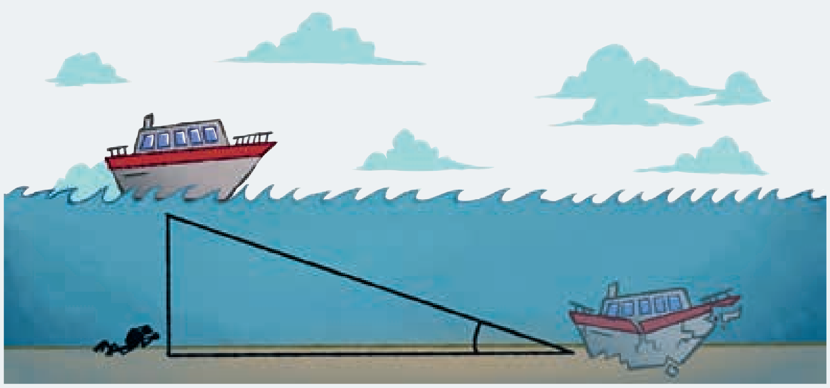
En una calculadora científica, usa las teclas sin , cos y tan para calcular las razones trigonométricas.

- Si conoces el ángulo y quieres calcular sen(20°), por ejemplo, presiona las teclas: sin 2 0 = 0,342020143
- O bien en este orden 2 0 sin = 0,342020143.
- En otros casos es necesario aplicar la relación inversa, es decir, dado el valor de una razón trigonométrica, se necesita saber cuál es el ángulo asociado.
- Para esta operación, usa la tecla SHIFT (o la tecla 2nd) antes de la tecla para la razón trigonométrica.
  Por ejemplo, si sabes que sen(α) = 0,34, para calcular el valor de α presiona las teclas:
  SHIFT sin 0 . 3 4 = 19,87687407.

  O bien en este orden:
  0 . 3 4 SHIFT sin = 19,87687407.

Por ejemplo, para resolver el problema:

El sonar de un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de 12°. Si un buzo desciende 40 metros hasta el fondo del mar, ¿cuánto necesita avanzar por el fondo para encontrar los restos del naufragio?



Ya que tg(12°) = $\frac{40}{d}$ luego $d = \frac{40}{\text{tg}(12°)}$

En algunas calculadoras se usa
4 0 ÷ tan 1 2 = 188,185204...

Mientras que en otras el orden es
1 2 tan $^1/x$. 4 0 = 188,185204...

Luego, necesita avanzar más de 188 metros para encontrar los restos del naufragio.

Ayuda

Antes de empezar, comprueba que tu calculadora esté en el modo DEG, ya que esto nos indica que considera los ángulos medidos en grados sexagesimales, como los que se han usado.

Existen diversos modelos de calculadoras, no solo considerando el diseño, sino también el orden con que se digitan las teclas para cada una de las operaciones y la prioridad que estas consideran cuando no se utiliza el paréntesis. Por eso es importante que practiques para que te familiarices con su uso y obtengas los valores que necesitas y no otros.

Cuaderno página 105

Matemática y tecnología

Sextante:

El sextante es un instrumento que permite medir ángulos entre dos objetos tales como dos puntos de una costa o un astro, generalmente el Sol, y el horizonte. Conociendo la elevación del Sol y la hora del día, se puede determinar la latitud a la que se encuentra el observador.

Y él ¿quién es?

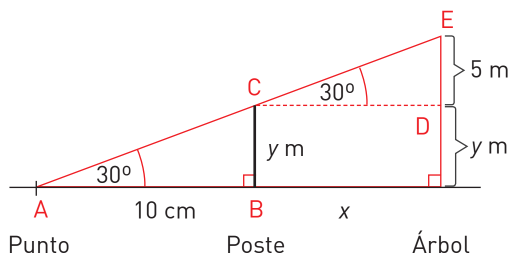
Johann Müller Regiomontano (1436 - 1476)

Fue un astrónomo y matemático alemán. Su obra escrita se basa en tratados de matemática, centrados en trigonometría (de la que se le considera un fundador) y tratados sobre astronomía. También realizó diseños sobre astrolabios y relojes de sol. Por otra parte, descubrió en la naciente imprenta una forma de divulgar información y logró múltiples copias de textos científicos, en los que editó diagramas muy precisos. Fue el primer impresor de literatura científica.

Actividades de proceso

1. Un árbol es 5 m más alto que un poste. Desde un punto en el suelo a 10 m de la base del poste, se observa la copa del árbol y el extremo superior del poste en una misma dirección con un ángulo de elevación de 30°. ¿Cuál es la altura del árbol y del poste, y la distancia entre ellos?

Considerando el siguiente esbozo de la situación, en el triángulo ABC se tiene que:



$$\text{tg}(30°) = \frac{y}{10} \rightarrow y = 10 \cdot \text{tg}(30°) \rightarrow y = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y \approx 5{,}8$$

Por lo tanto, el poste mide 5,8 m y el árbol, 10,8 m, aproximadamente, ya que:

Por otro lado, en el triángulo CDE se tiene que:

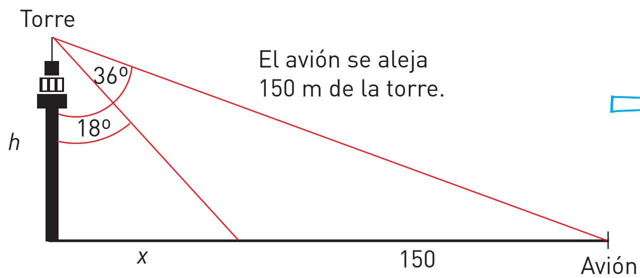
$$\text{tg}(30°) = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{5}{\text{tg}(30°)} \rightarrow x \approx$$

Entonces, la distancia entre el poste y el árbol es de ______, aproximadamente.

¿Qué dificultades encontraste?, ¿cómo las superaste?

2. Desde la torre de control de un aeropuerto, el ángulo de depresión con el que se ve un avión en la pista se aterrizaje es de 72° y si se aleja 150 metros a la torre, es de 54°. ¿Cuál es la altura de la torre?

▸ Un esbozo del problema es:



De los triángulos se tiene que:

$$\mathrm{tg}(36°) = \frac{x + 150}{h} \quad \rightarrow \quad h = \_\_\_\_\_\_\_\_ \ (1)$$

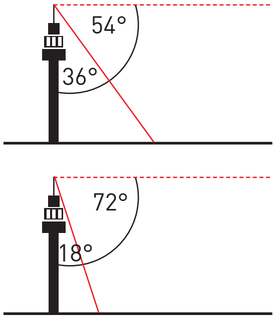
$$\mathrm{tg}(18°) = \frac{x}{h} \quad \rightarrow \quad x = \_\_\_\_\_\_\_\_ \ (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$h = \frac{h \cdot \mathrm{tg}(18°) + 150}{\mathrm{tg}(36°)} \quad \rightarrow \quad h = \frac{150}{\mathrm{tg}(36°) - \mathrm{tg}(18°)}$$

Con la calculadora, se obtiene que la altura de la torre de control es ________ m.

Ayuda



Observa la relación entre los ángulos de depresión y los ángulos usados en las razones trigonométricas.

En resumen

Muchos de los problemas de aplicación de trigonometría tienen que ver con la **resolución de un triángulo**, es decir, con determinar la longitud de sus lados y las medidas de sus ángulos, a partir de algunos datos. Para resolver estos problemas, se pueden considerar los siguientes pasos:

- Esbozar un triángulo que represente la situación.
- Aplicar el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.
- Utilizar una calculadora para determinar razones trigonométricas de otros ángulos o sus relaciones inversas.

Utilizando la definición de las razones trigonométricas, es posible obtener los valores correspondientes para ciertos ángulos, tales como 30°, 45° y 60°:

$\mathrm{sen}(30°) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\quad$ $\mathrm{sen}(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$ $\quad$ $\mathrm{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$

$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$ $\quad$ $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$ $\quad$ $\cos(60°) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

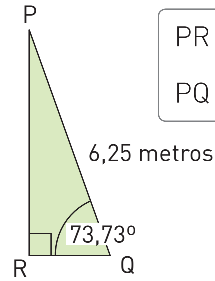
$\mathrm{tg}(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$ $\quad$ $\mathrm{tg}(45°) = 1$ $\quad$ $\mathrm{tg}(60°) = \sqrt{3} \approx 1{,}73$

Actividades de práctica

Usa la calculadora

1. Aplicando las razones trigonométricas, determina la medida de cada lado en los siguientes triángulos. Puedes utilizar la calculadora.

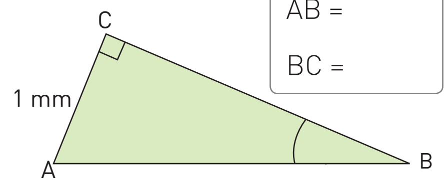
a.



PR =

PQ =

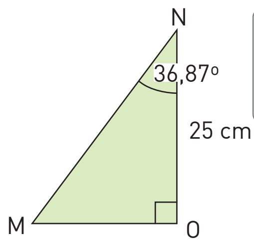
c.



AB =

BC =

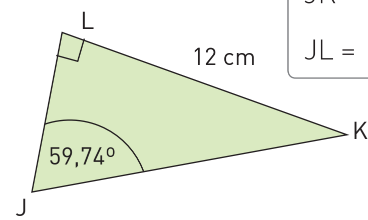
b.



MN =

MO =

d.

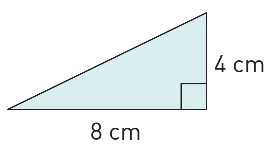


JK =

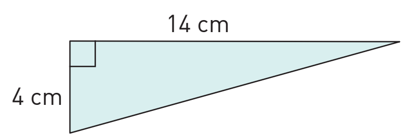
JL =

2. Calcula la medida aproximada de los ángulos interiores de cada triángulo.

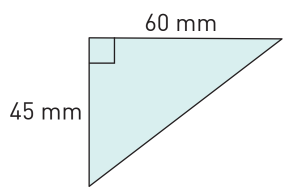
a.



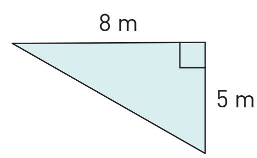
c.



b.

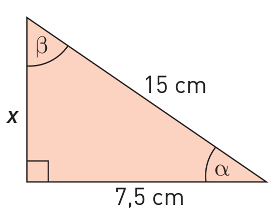


d.

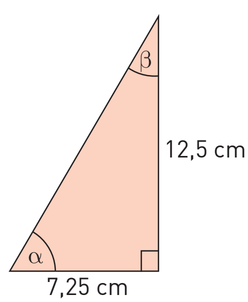


3. Estima el valor de las incógnitas de cada triángulo.

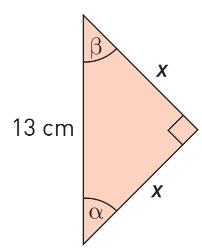
a.



b.



c.



Utiliza una calculadora para comprobar tus resultados anteriores.

4. Gabriel, de 1,62 m de altura, se encuentra a 5 m de la base de un edificio y observa el punto más alto de este con un ángulo de elevación de 30º.

a. Determina aproximadamente la altura del edificio.

b. Si Gabriel se aleja 2 metros de la base del edificio, ¿en cuánto varía el ángulo de elevación para el mismo punto?

5. En un instante dado don Pablo observa un cóndor que se encuentra a 120 m de altura. Si su telescopio está en un trípode a 120 cm del suelo, con un ángulo de elevación de 65°, ¿cuál es la distancia entre el cóndor y don Pablo?

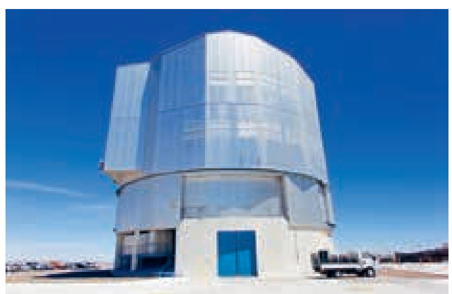
6. En un aeródromo, dos conos de seguridad, separados por 20 m, se encuentran en la misma dirección con respecto a la base de una torre. El más cercano a ella está a 17,5 m.
   a. Traza un esquema que te permita representar la situación.
   b. Si la torre mide 10 metros de altura, ¿cuáles son los ángulos de depresión desde su extremo superior?

7. Dos aviones despegan en un aeropuerto formando un ángulo de elevación de 21,8°. En un instante, en el mismo tiempo y la misma dirección, el primer avión ha recorrido 14,5 km (en diagonal); mientras que el segundo ha recorrido 5,8 km.
   a. ¿A qué altura se encuentra cada avión?
   b. ¿Cuál es la distancia aproximada, en tierra, que ha recorrido cada uno?

8. La diagonal imaginaria que une La Serena con la cima del cerro Tololo, donde se encuentra el observatorio, mide aproximadamente 87 km y forma un ángulo que se estima en 1,45° con respecto a la superficie terrestre.
   a. ¿A qué altura se encuentra dicho observatorio astronómico?
   b. Si la cima del cerro Tololo estuviera a la misma altura (sobre el nivel del mar) que La Serena, estima la distancia que existe entre ambos.

¿Qué aprendí hoy?

Valentín y Margarita se encuentran el uno al norte y la otra al sur del cerro Paranal, en la Región de Antofagasta, y decidieron visitar el observatorio astronómico Paranal, emplazado en la cumbre del cerro. Antes de encontrarse, se comunican y comentan los ángulos de elevación con los que pueden ver el observatorio en este momento. Valentín lo estima en 37° y Margarita, en 12°.



a. Traza un esquema que te permita representar la situación.

b. Si respecto de su ubicación, la altura del cerro es aproximadamente 2600 m, ¿qué distancia separa a Margarita de Valentín?

c. ¿A qué distancia se encuentra cada uno de ellos respecto de la cima del cerro Paranal? Puedes redondear a la décima los valores obtenidos.

Cuaderno página 107

Tema 3: ¿Cómo se determinan las componentes de un vector?

¿Qué aprenderé?

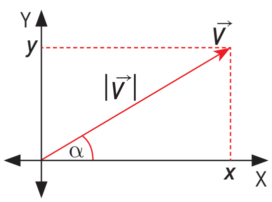
A aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.

¿Para qué?

Para aplicarlas a las operaciones de magnitudes físicas, tales como fuerza, velocidad o aceleración.

Glosario

Las coordenadas polares de un vector son su módulo o magnitud y su dirección, mientras que las **coordenadas rectangulares** corresponden a sus componentes.



Ayuda

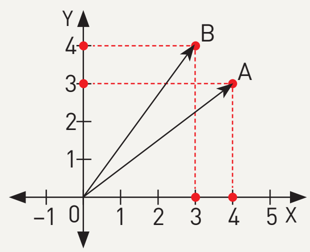
En física, se utilizan **vectores** para representar algunas magnitudes en las que un número solo no basta, pues se requiere, además, indicar la dirección en que ocurre o se aplica para describirla correctamente. Por ejemplo, la fuerza, la velocidad y la aceleración se representan utilizando vectores.

Actividad en pareja

Taller

1 Cuando conocemos las **coordenadas rectangulares** de un vector, se puede calcular su magnitud utilizando el teorema de Pitágoras. Ahora, si se conoce la magnitud de un vector, ¿se pueden determinar sus coordenadas rectangulares? Comenta con tu compañero.

2 Observen los siguientes vectores:



a. ¿Qué tienen en común?, ¿en qué se diferencian?

b. Escriban sus coordenadas rectangulares.

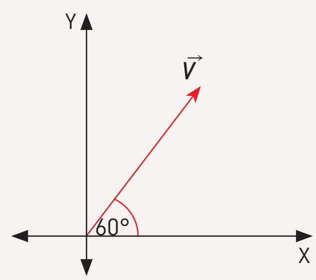
____

c. Calculen la magnitud de cada uno. ¿Qué pueden concluir?

____

d. ¿Cómo se puede determinar su dirección? Expliquen.

3 La magnitud del vector de la siguiente figura es 200.



a. ¿Cuáles son sus coordenadas rectangulares?, ¿cómo lo supieron?

____

b. ¿Existe otra forma de calcularlo? Justifiquen.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Actividades de proceso

1. En la fotografía, un esquiador baja por una pendiente cuyo ángulo de elevación es $\alpha = 38°$. El esquiador tiene una masa corporal de 75 kg, lo que equivale aproximadamente a la fuerza de $\vec{G} = 750$ N. El vector de la fuerza del peso $\vec{G}$ se muestra verticalmente hacia abajo.

a. Si los ejes coordenados se trazan en la dirección de la pendiente (X) y en la dirección **ortogonal** a ella (Y), dibuja lo componentes del vector $\vec{G}$ mediante una descomposición.

b. Usando razones trigonométricas, expresa los componentes del vector $\vec{G}$ en la dirección X y en la dirección Y.

____

c. Calcula el valor de ambos componentes.

Redondea a la décima

____

d. ¿Qué pasa con los componentes si el ángulo de elevación se acerca a 0°?

____

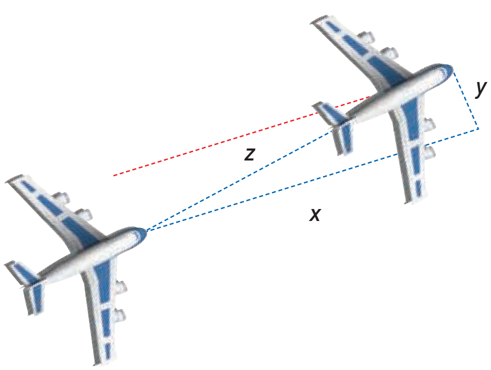
¿Y si se acerca a 90°?

____

Glosario

Ortogonal: dicho de una línea o de un plano: Que forma un ángulo recto con otra línea o con otro plano.

2. Un avión vuela a la rapidez constante $x = 150$ km/h. Por un viento cruzado que viene ortogonalmente con relación a la velocidad y, el avión se desvía por un ángulo de 6°. Observa el esquema y usa razones trigonométricas para resolver.



Ayuda

La magnitud de la fuerza peso es:

$$P = mg$$

Donde m es la masa y g es la aceleración de gravedad, cuya magnitud es 9,8 m/s². Por lo general se aproxima a 10 m/s².

a. Determina la velocidad y del viento cruzado.

____

Redondea a la décima

b. Calcula la velocidad total z.

____

c. Verifica la velocidad total z, aplicando el teorema de Pitágoras.

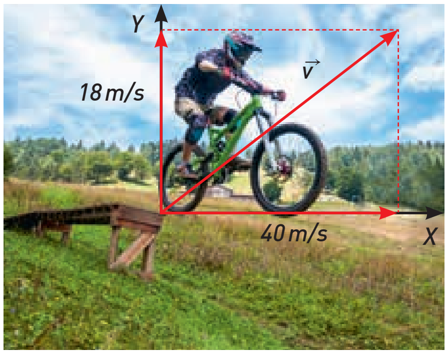
____

Glosario

Dirección: es el ángulo que forma el vector velocidad con el eje X positivo

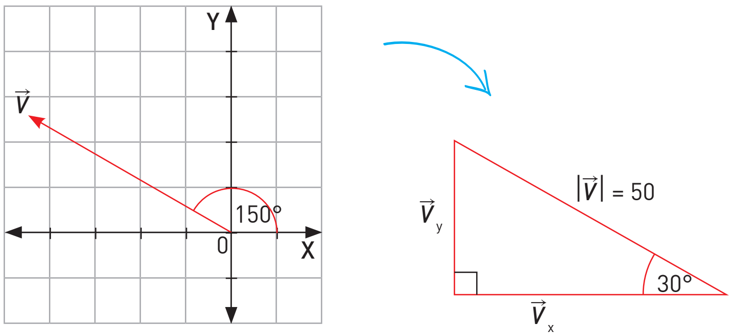
Rapidez: de un móvil es la magnitud del vector velocidad.

3. Calcula el vector velocidad y su **dirección**, y la **rapidez** del ciclista justo después de iniciar un salto. Para ello, considera las componentes según el sistema de referencia dado.



4. Aplica la descomposición a cada vector y completa.

a. $|\vec{V}| = 50$ y $\alpha = 150°$



$|\vec{V}_x| =$ ________________ $|\vec{V}_y| =$ ________________

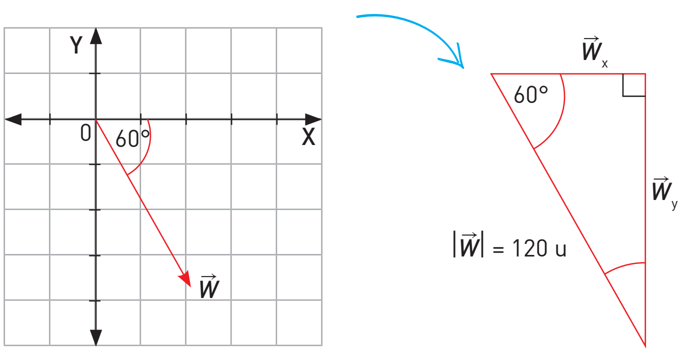
Considerando que el vector se ubica en el II cuadrante, se tiene que:

$$V = (-50\cos(30°), 50\ \text{sen}(30°))$$

$$V = \left(-50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 50 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$V = (-43{,}3;\ 25)$$

b. $|\vec{W}| = 120$ y $\alpha = 60°$

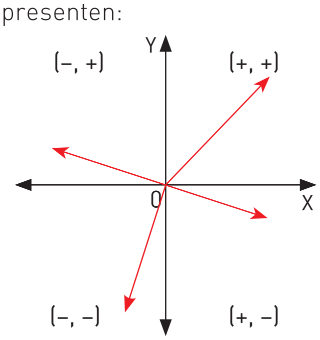


$|\vec{W}_x| =$ ________________ $|\vec{W}_y| =$ ________________

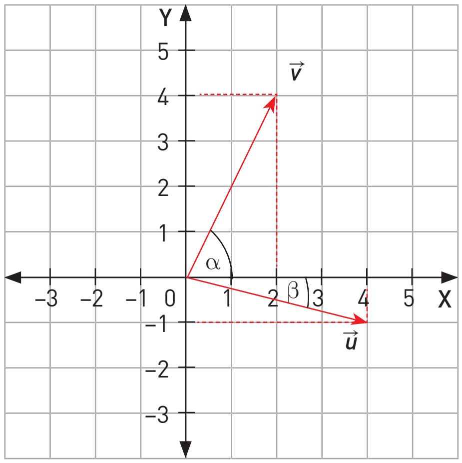
Como el vector se ubica en el IV cuadrante, $\vec{W} =$ $\boxed{}$

Ayuda

Debido a la dirección y al sentido de un vector, sus componentes (x, y) tienen el siguiente signo, según el cuadrante donde se representen:



5. Dado los componentes, determina cada vector.



a. Determina el módulo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b. Calcula la medida de α y β.

6. Un avión comercial despega con una rapidez de 260 km/h en un ángulo de 35° con respecto a la pista.

a. Traza un bosquejo para representar la situación.

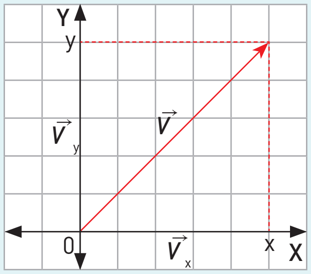
b. Calcula las componentes vertical y horizontal de la velocidad.

Ayuda

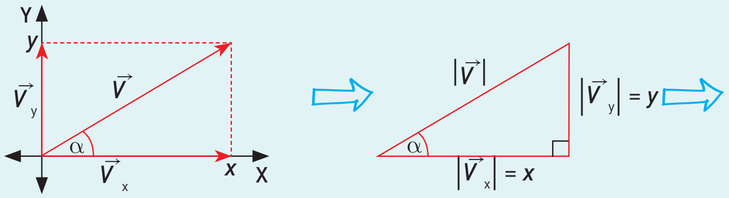
En muchas calculadoras aparecen las funciones seno, coseno y tangente. Para calcular dichas razones para un cierto ángulo, por lo general se presiona la función, seguida del ángulo y luego la tecla igual. Comprueba esto para 30°, 45° y 60°.

En resumen

Los vectores $\vec{V}_x = (x, 0)$ y $\vec{V}_y = (0, y)$ ubicados en el eje X y el eje Y, respectivamente, son las proyecciones del vector $\vec{V} = (x, y)$ sobre los ejes coordenados, donde $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$.



Luego, *x* e *y* se llaman las **componentes** del vector $\vec{V}$.
Un vector $\vec{V}$ se puede descomponer utilizando sus proyecciones sobre los ejes del sistema coordenado. Para ello, se pueden utilizar las razones trigonométricas del ángulo que forma con el eje X:

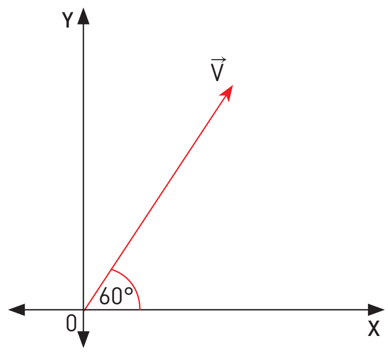


$|\vec{V}_x| = |\vec{V}| \cos(\alpha) = x$
$|\vec{V}_y| = |\vec{V}| \operatorname{sen}(\alpha) = y$

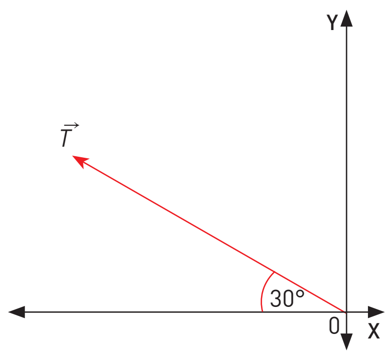
Actividades de práctica

1. Aplica la descomposición a cada vector según la magnitud dada. Explica el signo de cada componente.

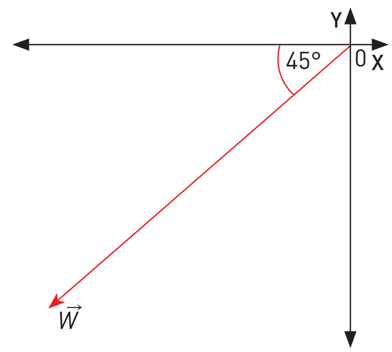
a. $|\vec{V}| = 200$



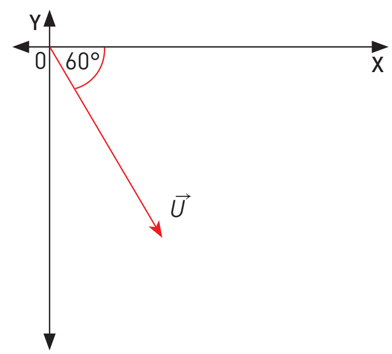
b. $|\vec{T}| = 85$



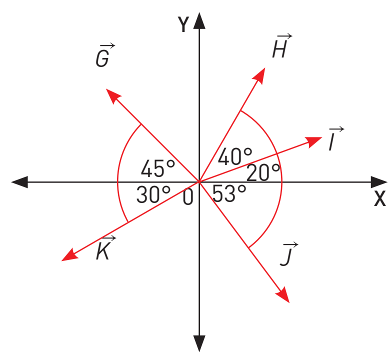
c. $|\vec{W}| = 18$



d. $|\vec{U}| = 90$



2. Utiliza una calculadora científica para completar la siguiente tabla.

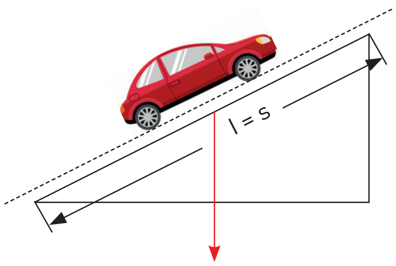


		Componentes	
Vector	Magnitud	X	Y
G	2,4 u		
H	1,6 u		
I	1,3 u		
J	2,1 u		
K	2,7 u		

3. Un avión despega a 110 km/h formando un ángulo de 50° con respecto al plano terrestre. Calcula las componentes horizontal y vertical de su velocidad.
4. Un barco navega hacia el noroeste con una rapidez de 50 km/h, formando un ángulo de 45° con la vertical que indica el norte.
   a. ¿Cuáles son las componentes de su velocidad? Es decir, ¿qué rapidez tiene en la dirección sur-norte?
   b. ¿Qué rapidez tiene en la dirección oeste-este?
5. **Ciencias naturales.** Sobre un cuerpo se ejerce una fuerza de 6,5 N, formando un ángulo de 60° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es el valor de las componentes de esta fuerza?
6. **Ciencias naturales.** Si un objeto se desplaza a una rapidez de 17 m/s de modo que forma un ángulo de 60° con respecto a la horizontal, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad?
7. **Ciencias naturales.** Un dron despega desde un punto hacia la cima de un observatorio astronómico a una rapidez de 20 m/s formando un ángulo de elevación igual a 53°.
   a. ¿Cuál es la componente vertical de su velocidad?
   b. ¿Cuál es la componente horizontal de su velocidad?

Actividad en pareja

8. **Ciencias naturales.** Un auto de masa 1000 kg sube una pendiente con un ángulo de elevación de $\alpha = 30°$. Un kilogramo de peso genera aproximadamente una fuerza de 10 N.



   a. Junto con un compañero, conjeturen acerca de la fuerza mínima que debe generar el motor del auto para compensar la fuerza que tira el auto hacia abajo en dirección de la pendiente.
   b. Apliquen una razón trigonométrica para determinar la fuerza mínima que debe generar el motor. Pueden redondear el resultado a la décima.

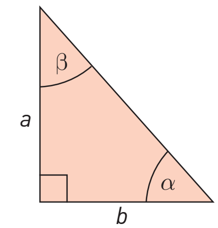
¿Qué aprendí hoy?

1 Un avión comercial despega a una rapidez inicial de 120 km/h formando un ángulo de 30° con el plano terrestre.
   a. ¿Cuál es la componente horizontal de su velocidad inicial?
   b. ¿Y la componente vertical?

2 Determina la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo y su componente horizontal, sabiendo que su componente vertical es de 10 N y que esta fuerza se aplica formando un ángulo de 64° con el plano horizontal.

Cuaderno página 109

1 Observa la figura y calcula, en cada caso, el valor de seno, coseno y tangente del ángulo α.



a. $a = 2$; $b = 3$

sen(α) = __________ cos(α) = __________ *tg*(α) = __________

b. $a = 11$; $b = 6$

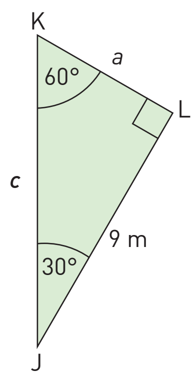
sen(α) = __________ cos(α)__________ *tg*(α) = __________

c. $a = 1$; $b = 5$

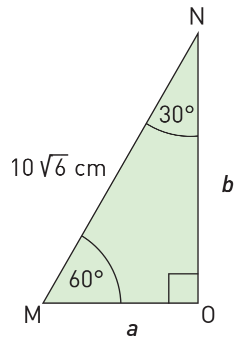
sen(α) = __________ cos(α)__________ *tg*(α) = __________

2 Utilizando el método para determinar razones trigonométricas para ángulos especiales, calcula cada una de las medidas que se desconocen en los siguientes triángulos rectángulos:

a.



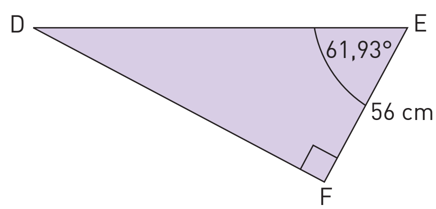
b.



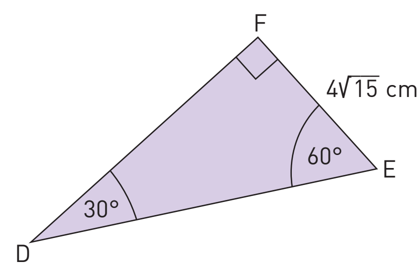
3 Aplicando las razones trigonométricas, determina la medida de cada uno de los lados que se desconocen en los siguientes triángulos. Puedes utilizar la calculadora.

Redondea a la décima

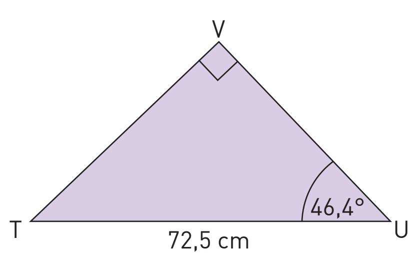
a.



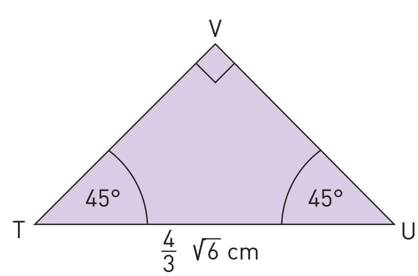
c.



b.

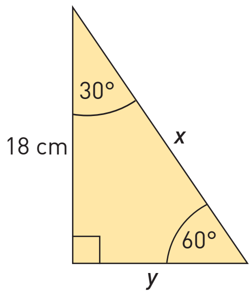


d.

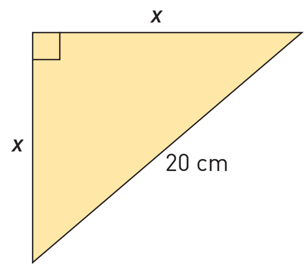


4 Calcula el valor de cada incógnita.

a.



b.



5 ¿Cuál es el valor de $\dfrac{\text{tg}(60^\circ) + 3\cos(30^\circ)}{(\text{sen}(45^\circ))^2}$?

6 La longitud de la diagonal de un rectángulo es 10 cm y forma un ángulo de 60° con su base. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

7 Álvaro y Santiago encontraron un madero de 2 metros de largo y pretenden usarlo como resbalín, con 30º de inclinación respecto del piso. ¿Cuál es altura máxima que tendría este resbalín?

8 Lucas observa un buque de carga desde el balcón de un faro costero, con un ángulo de depresión de 60°. Si el faro se encuentra a 28 m sobre el nivel del mar, ¿cuál es la distancia entre el balcón y el buque?

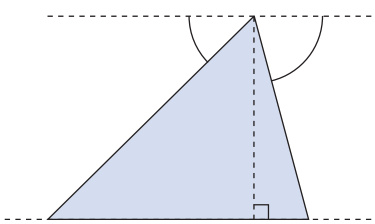
9 Rodrigo puede ver un aguilucho que vuela a 90 m de altura, con un ángulo de elevación de 35°. ¿Cuál es la distancia entre Rodrigo y el aguilucho en ese instante?

10 Desde una terraza, al mirar hacia el sur Julieta puede ver dos faroles en la playa, con ángulos de depresión de 60° el más cercano y 30° el otro.

a. Si la distancia entre los faroles es de $10\sqrt{3}$ metros, ¿a qué altura sobre el nivel de la playa está la terraza?

b. ¿Cuál es la distancia entre cada uno de los faroles y la base de la terraza?

11 Desde la azotea de un edificio se puede observar las bases de dos kioscos, ubicados hacia el norte y el sur del edificio, con ángulos de depresión de 45° y 75°, respectivamente. Si la distancia desde la azotea a la base del kiosco hacia el norte es de 96 m, ¿cuál es la distancia entre los kioscos?



12 Antonia observa el punto más alto de una araucaria con un ángulo de elevación de 60° respecto del nivel de sus ojos. Ella mide 1,60 m y la distancia entre sus pies y la base de la araucaria es de 21 m.

a. Traza un bosquejo que represente la situación.

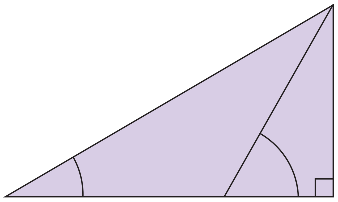
b. ¿Cuál es la altura de la araucaria?

13 Desde un mirador en la costa, Emilia observa un barco y un remolcador que están en el mar. Los ángulos de depresión son de 45° y 60°, respectivamente. Ambas naves están separadas por una distancia de 110 m.

a. Traza un bosquejo que represente la situación.

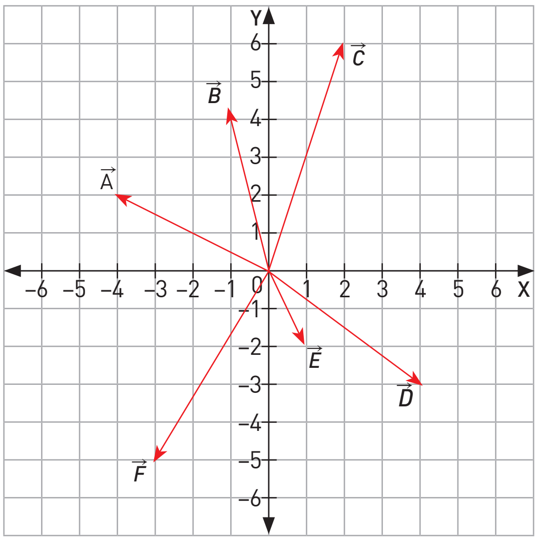
b. ¿Cuál es la altura del mirador?

14 Desde la entrada a un parque, Andrés puede observar la cima de un cerro con un ángulo de elevación de 30°. Al aproximarse 1000 m en dirección a la montaña, el nuevo ángulo de elevación es de 60°. ¿Cuál es la distancia entre la entrada al parque y la cima del cerro?



15 Una escalera de 3 m de longitud está apoyada en una pared de tal forma que su extremo inferior está a 1,5 m de ella. Si el extremo superior de la escalera se desliza 1 m hacia abajo, ¿cuántos grados disminuye el ángulo que forma la escalera con el suelo? Explica.

16 En el siguiente plano cartesiano, ¿cuáles son las componentes de cada vector?



a. $\vec{A}$ = ____________________

b. $\vec{B}$ = ____________________

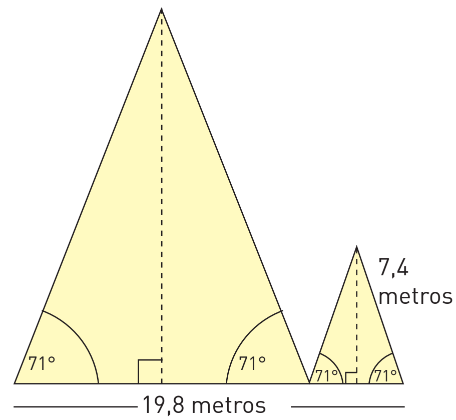
c. $\vec{C}$ = ____________________

d. $\vec{D}$ = ____________________

e. $\vec{E}$ = ____________________

f. $\vec{F}$ = ____________________

17 Karina presentó un proyecto para construir dos instalaciones similares cuya forma será de prismas de base triangular, apoyados en una de sus caras laterales. Observa el esquema que muestra el frente de estas instalaciones:



Aunque estableció algunos valores, para poder calcular la cantidad total de material a utilizar y el volumen que se ocupará, Karina requiere determinar las medidas de la altura y de los lados de cada triángulo.

a. Determina la altura de la instalación menor.

b. Calcula la medida de la base del triángulo de la instalación menor, de dos maneras. Primero, utilizando razones trigonométricas y, luego, con el teorema de Pitágoras. ¿Cómo son los valores obtenidos en cada método?, ¿por qué crees que ocurre esto?, ¿cuál dirías que es el más exacto? Justifica tu respuesta.

c. Determina la altura de la instalación mayor mediante dos procedimientos: con semejanza de triángulos y aplicando trigonometría. ¿Cómo son los valores obtenidos en cada caso?, ¿por qué ocurre esto?, ¿cuál dirías que es más preciso? Explica.

d. Si la medida del largo de cada prisma será de 200 metros, determina el área y el volumen de cada una de las instalaciones.

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Comprendí las razones trigonométricas en triángulos rectángulos y las apliqué para resolver triángulos.	○	○	○
Apliqué las razones trigonométricas para resolver problemas de la vida cotidiana, de geometría y de ciencias naturales.	○	○	○
Utilicé las razones trigonométricas para componer y descomponer vectores y las apliqué en magnitudes vectoriales.	○	○	○
Elegí o elaboré representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando tanto sus limitaciones como su validez.	○	○	○
Formulé preguntas o expuse hipótesis propias acerca de una situación o un problema.	○	○	○

Cuaderno página 113

Reviso mis metas y estrategias

1 Considera las estrategias que escribiste en la página 189: ¿han sido eficaces?, ¿por qué?

____

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

____

ALTURAS INACCESIBLES

Materiales

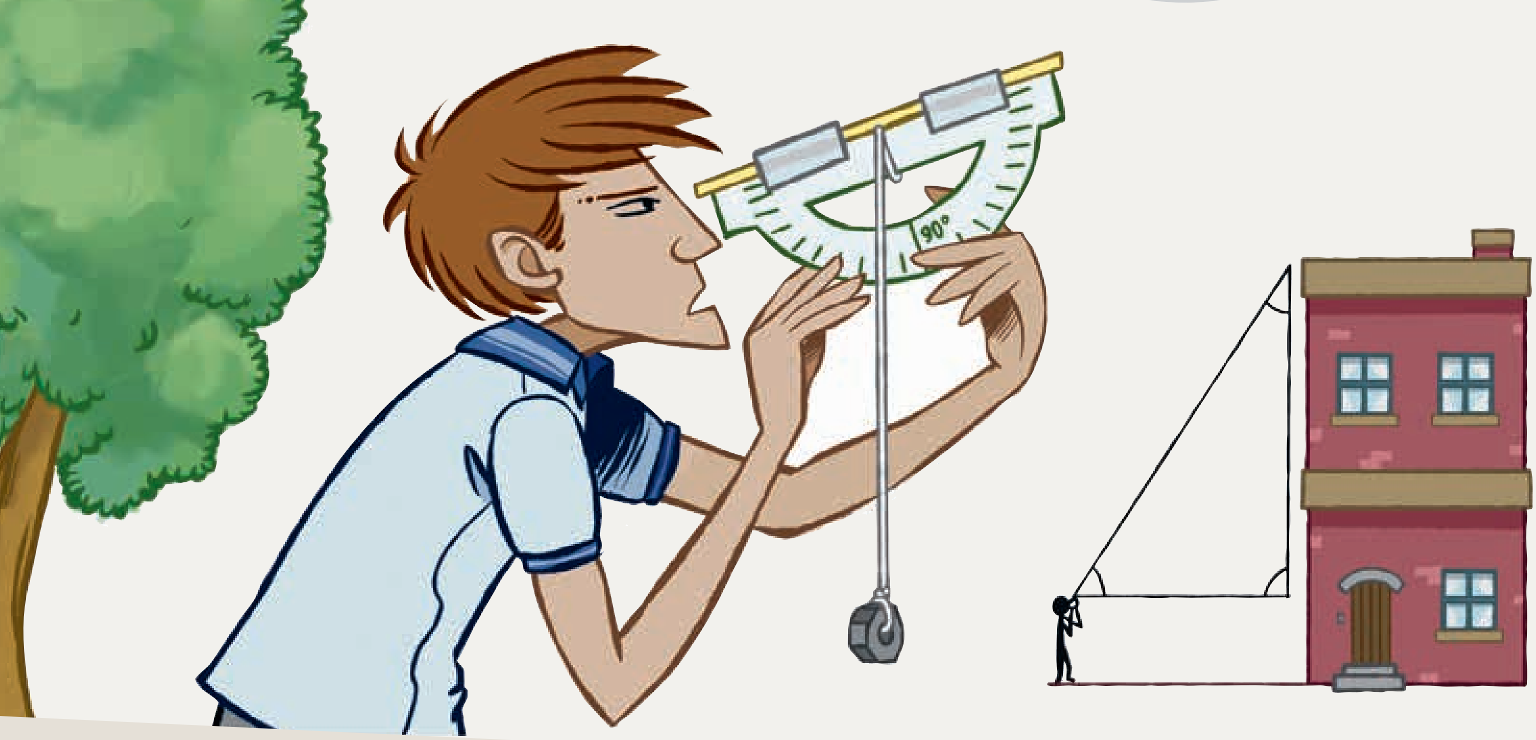
- ✓ Un transportador.
- ✓ Una cartulina o cartón delgado.
- ✓ Una tuerca o algo similar como plomada.
- ✓ Un lápiz pasta o bien una bombilla como visor.
- ✓ Hilo.
- ✓ Cinta adhesiva.

CONSTRUCCIÓN

- Pega la bombilla o el tubo del lápiz al transportador de manera que quede alineada horizontalmente, es decir, a los 0 y 180 grados.
- Ata la tuerca al hilo y luego el otro extremo al centro del transportador, dejando unos 10 cm de largo para que pueda moverse y así medir el ángulo.
- Usa la cartulina como base, pegando el instrumento en uno de los bordes largos.

¿CÓMO SE USA?

Para determinar el ángulo de elevación de una torre o algún edificio se debe mirar por la bombilla el extremo superior del edificio y observar la posición de la plomada.



INSTRUCCIONES

Usa el instrumento construido para determinar la altura de alguna construcción cercana que se destaque en los alrededores.

- Mide el ángulo de elevación al objeto elegido.

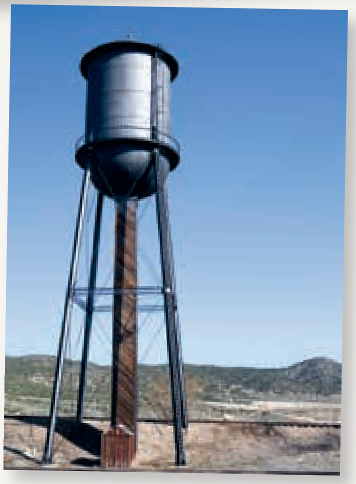
- Mide la distancia al objeto. Si es necesario, puedes contar tus pasos y luego medir la distancia que recorres en cada paso para calcular la distancia.

- Con las medidas obtenidas, calcula la altura. No olvides considerar tu propia estatura en el valor final.

- Compara la medida obtenida con la de tus compañeros. ¿Son similares?, ¿a qué crees que se deba esto?

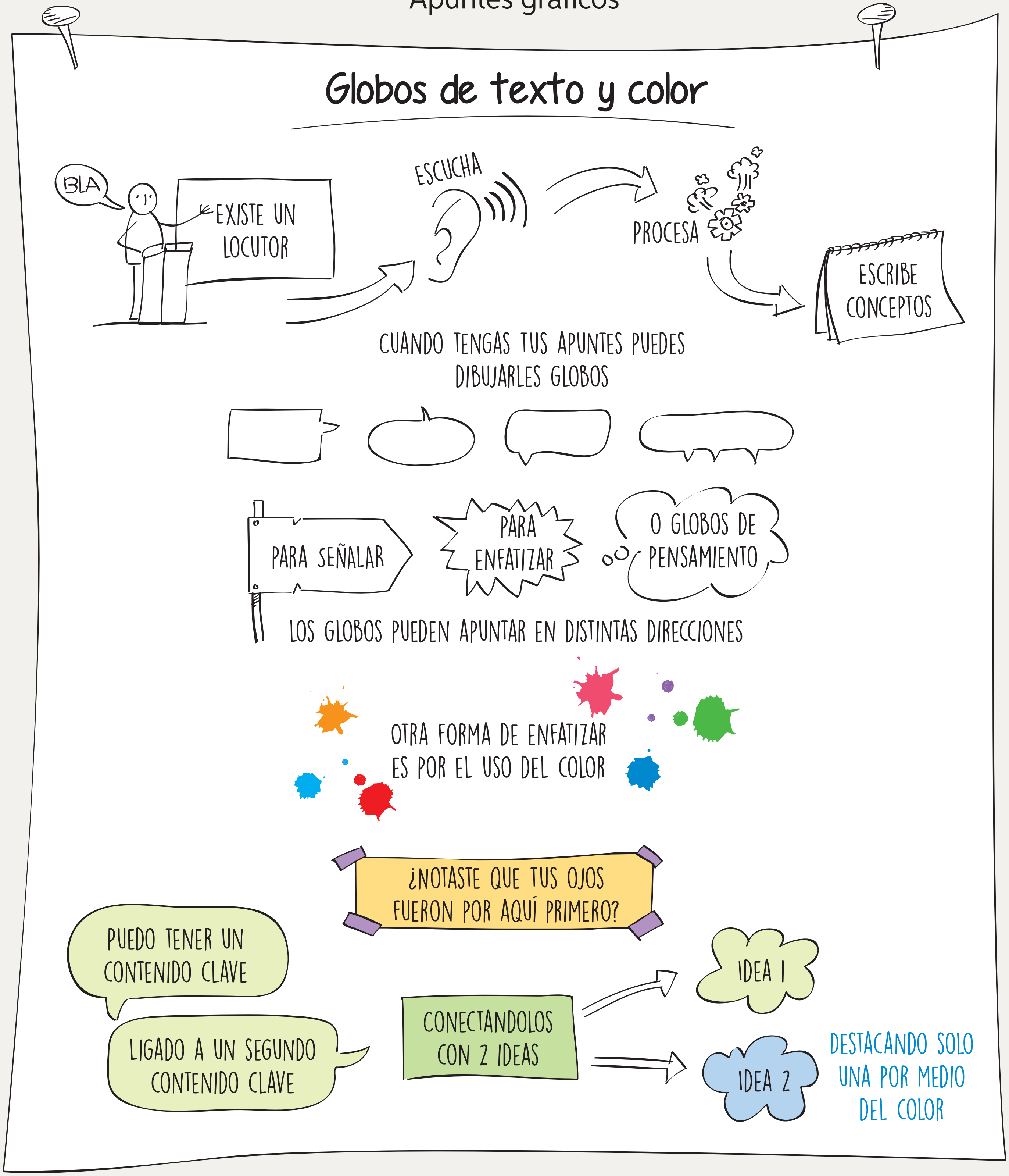
- Si es posible, averigüen la altura real del objeto y determinen el error entre los valores. ¿Quién tuvo el menor error?, ¿por qué sucedió esto?

Cuaderno página 114

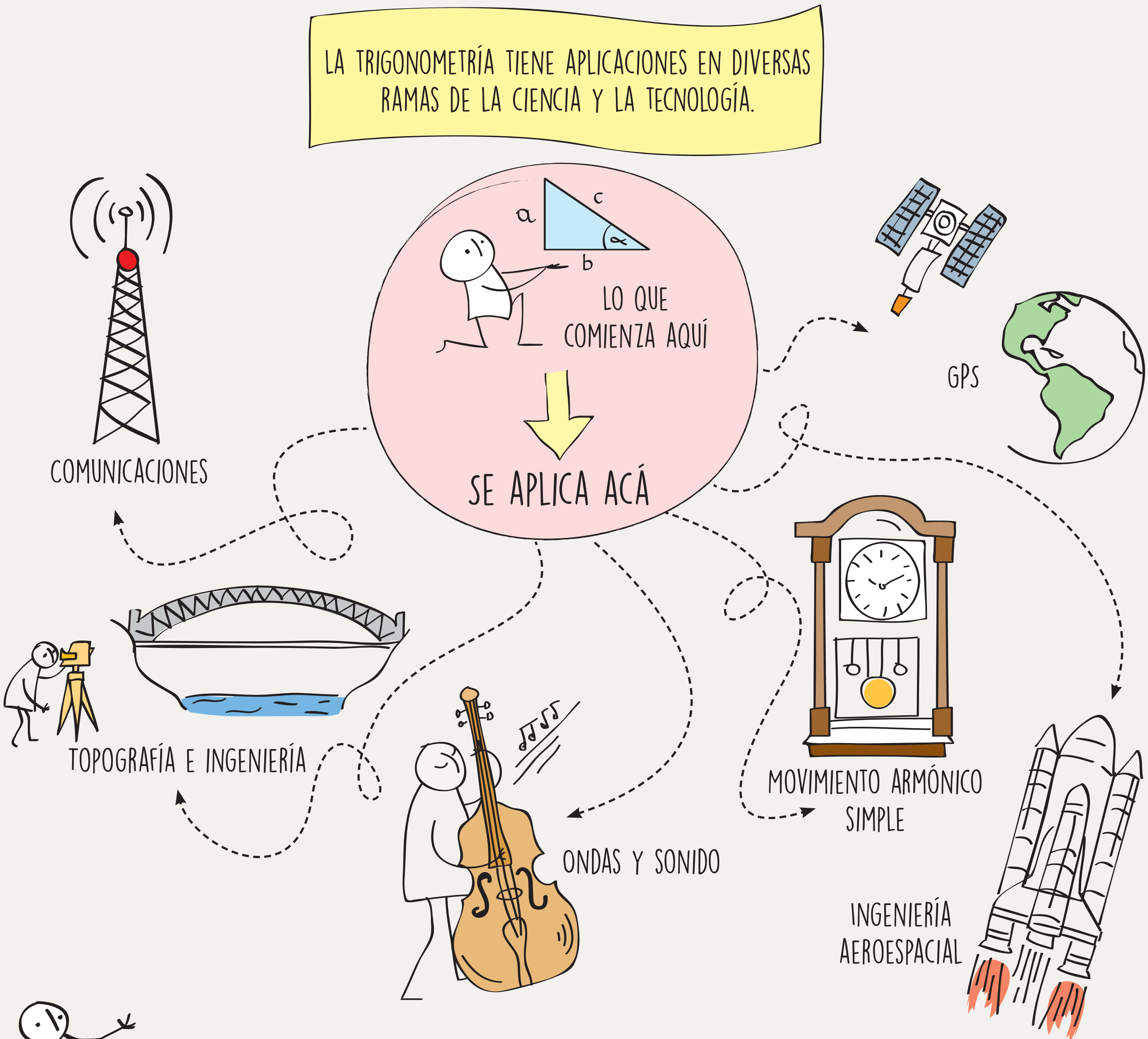


APRENDER CON MONOS

Apuntes gráficos



Apuntes gráficos con trigonometría



Ahora es mi turno de dibujar

Temas para practicar los apuntes gráficos:

- ¿Cómo describirías a los chilenos?
- ¿Cómo se celebran las Fiestas Patrias en tu región?

Muestro lo que aprendí usando apuntes gráficos:

- El concepto de geometría en general.
- Las lecciones de la unidad de Geometría.

Cuaderno página 115

- Al trabajar en equipo, ¿consideré y respeté los aportes de todos?, ¿estuve dispuesto a entender sus argumentos?
- ¿Demostré curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en mis propias capacidades?

¿Qué aprendí?

Evaluación final

1 Determina cuáles de los siguientes objetos son esféricos y cuáles no. Justifica tu respuesta.

a.

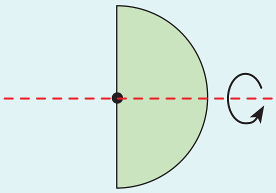
c.

b.

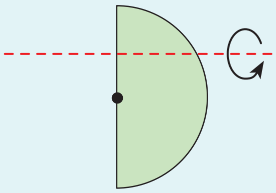
d.

2 Decide en cuál de las rotaciones se puede asociar a una esfera. Justifica los casos en que no sea posible.

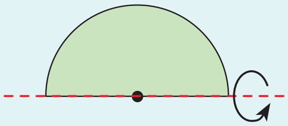
a.



b.



c.



3 Calcula el área (A) y el volumen (V) de cada esfera.

a. $r = 7$ cm

$V =$

$A =$

b. $r = \frac{16}{9}$ mm

$V =$

$A =$

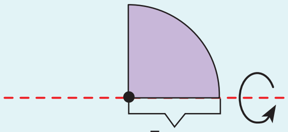
c. $d = 2{,}4$ m

$V =$

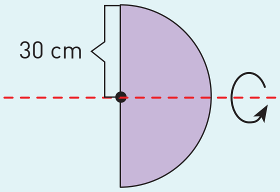
$A =$

4 Calcula el área y el volumen de cada cuerpo generado considerando la información dada.

a. Un cuarto de círculo.

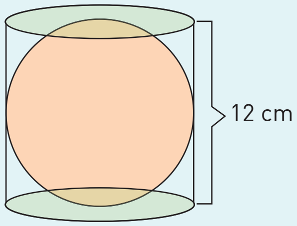


b. Semicírculo.

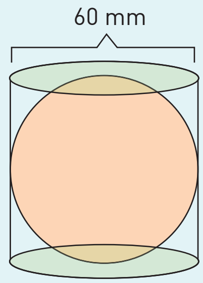


5 Calcula el área y el volumen de la esfera inscrita en cada cilindro.

a.



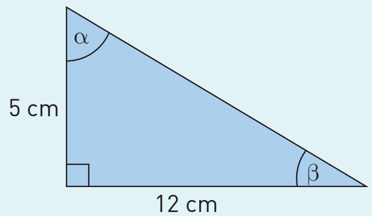
b.



Usa $\pi \approx 3{,}14$

6 Si el área de una esfera es 676π cm^2, ¿cuál es su volumen?

7 Identifica las razones trigonométricas de cada ángulo agudo del triángulo.



a. $\text{sen}(\alpha)$ =

b. $\cos(\alpha)$ = __________

c. $\text{tg}(\alpha)$ = __________

d. $\text{sen}(\beta)$ = __________

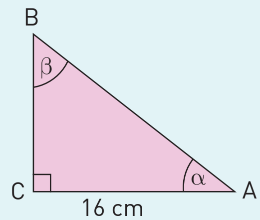
e. $\cos(\beta)$ = __________

f. $\text{tg}(\beta)$ = __________

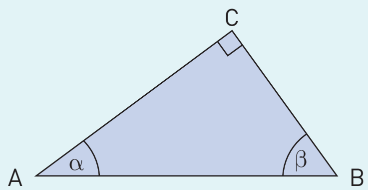
8 En el triángulo ABC que se muestra en la figura, $\text{sen}(\beta) = 0{,}8$.

a. ¿Cuál es el valor de $\text{tg}(\alpha)$? $\text{tg}(\alpha)$ = __________

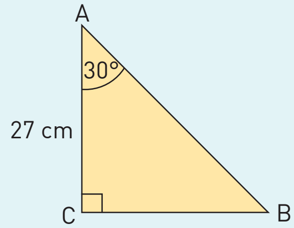
b. ¿Y el de $\cos(\beta)$? $\cos(\beta)$ = __________



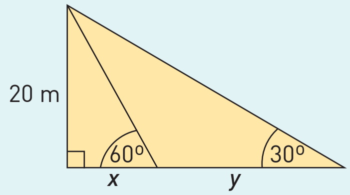
9 En un ΔABC, rectángulo en C, el lado AC mide 9 cm. Si $\text{sen}(\beta) = 0{,}4$, ¿cuánto mide el lado BC?



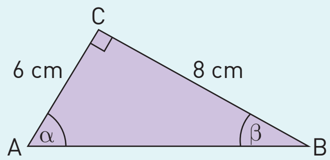
10 En la siguiente figura, ¿cuánto miden los lados AB y BC?



11 ¿Cuáles son los valores de ***x*** e ***y*** en el siguiente triángulo?



12 Considera el ΔABC, rectángulo en C. ¿Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? Justifica tu respuesta.



I. $\text{sen}(\alpha) = \frac{4}{5}$

II. $\text{tg}(\beta) = \frac{3}{4}$

III. $\cos(\beta) = \frac{3}{5}$

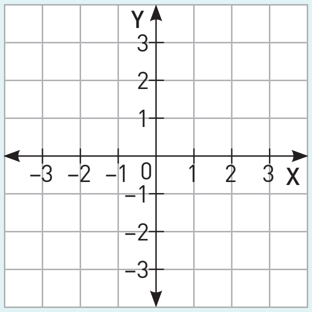
13 La diagonal de un rectángulo mide 27 cm y forma un ángulo de 30° con su base. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

14 En un triángulo ΔABC rectángulo en C, el lado AC mide 5 cm y el lado BC mide 12 cm. Si α es el ángulo opuesto al lado BC, ¿cuál es el valor de la expresión $\frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$?

15 Represente cada vector. Luego, calcula la magnitud y la dirección de cada uno.

a. $\vec{V} = (3, -3)$

b. $\vec{W} = (-1{,}5; 2)$



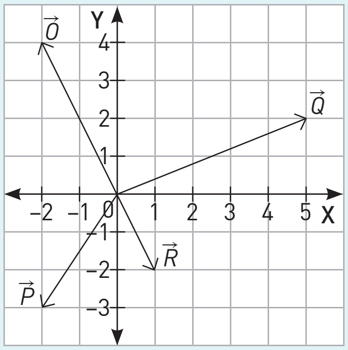
16 En el siguiente plano cartesiano, ¿cuáles son las componentes de cada vector?

a. $\vec{O}$ = ______________________

b. $\vec{P}$ = ______________________

c. $\vec{Q}$ = ______________________

d. $\vec{R}$ = ______________________



17 Un estanque esférico apoyado en el suelo tiene un radio interior de 1,5 m y una pared de 0,03 m de grosor.

a. ¿Cuál es su capacidad?

b. ¿Cuál es su área?

18 El diámetro de una pelota de básquetbol es de 24 cm y el de una pelota de ping-pong, de 4 cm.

a. ¿Cuál es el volumen de cada una?

b. ¿Cuántas pelotas de ping-pong alcanzan el volumen de una pelota de básquetbol?

c. ¿Cuál es el área de cada una?

19 El radio aproximado del Sol es de 696 000 km y el de la Tierra, 6378 km.

a. ¿Cuál es el volumen del Sol?

b. ¿Cuál es el volumen de la Tierra?

c. ¿Cuál es la razón entre los volúmenes del Sol y la Tierra?

20 Elisa necesita guardar una esfera de cristal de 1 L de volumen en una caja de cartón para enviarla por encomienda al campo.

a. Elisa quiere ocupar la menor cantidad de cartón posible. ¿De qué forma debería ser la caja?

b. ¿Cuáles son las dimensiones aproximadas de la caja más pequeña en la que se puede contener la esfera?

Usa $\pi \approx 3,14$

21 Una industria producirá pelotas de goma en dos tamaños distintos: estándar de radio R, y súper, de radio $2R$. Para bajar costos, diseñaron cajas cúbicas lo más pequeñas posible, para embalarlas, y de un solo tamaño, tal que cada caja pueda contener una pelota súper u ocho pelotas estándar. ¿En cuál de los casos se utiliza un mayor volumen de la caja?

22 Para practicar el *snooker*, un juego derivado del billar, se requiere una mesa similar, tacos de madera y 22 bolas, como muestra la imagen. Todas las bolas son macizas y miden 52,5 mm de diámetro.

a. Valentina debe fabricar las bolas para un total de seis mesas de *snooker*. ¿Cuántas bolas fabricará?, ¿cuál será su volumen total?

b. Ricardo tiene ocho tarros nuevos de pintura, uno de cada color reglamentario, para pintar las bolas de tres mesas de *snooker*. Si el rendimiento de cada tarro es de 12 m^2 de superficie y va a pintar cada bola tres veces, ¿será suficiente la pintura? Calcula cuánta pintura, expresada en los metros cuadrados que puede cubrir, sobrará o faltará de cada color.

c. Alonso aplicó tres manos de pintura a cada una de las bolas que pintó, completando un total de casi 433 cm^2 pintados. ¿Cuántas bolas pintó?

Usa $\pi \approx 3{,}14$

23 **Ciencias naturales.** Para una feria científica, los participantes de un taller de astronomía tienen el desafío de construir una maqueta del sistema solar que represente cada uno de los planetas en forma proporcional, de modo que 1 cm en la maqueta equivale a 320 km en la realidad. Esto, con el fin de que los asistentes puedan dimensionar las diferencias de tamaño que existen entre estos planetas.

a. Si ellos determinaron que con esta proporción el radio de la maqueta de la Tierra es de 19,9 cm y el de Marte es de 10,6 cm, ¿cuál es el volumen de las maquetas de cada planeta?

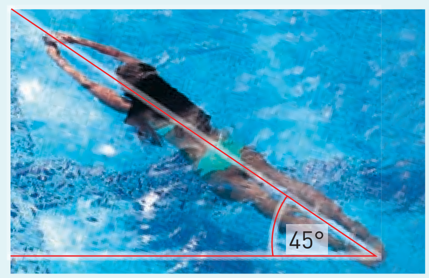
b. El diámetro de Mercurio mide 4880 km y el de Venus, 12 104 km. Entonces, ¿cuál debe ser el radio de sus respectivas maquetas?, ¿cuál es el área de cada una?

c. Lucas calculó que la cantidad de material necesaria para la construcción del planeta Urano es de casi 2 135 545 cm^2. Determina el radio de su maqueta.

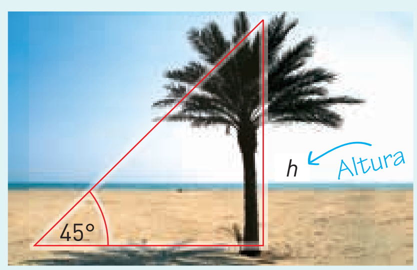
d. Observando las medidas obtenidas para las dimensiones de las maquetas de cada planeta, ¿crees que los participantes del taller podrán construir la maqueta del sistema solar, respetando correctamente la proporción entre los tamaños de todos sus planetas? Justifica.

24 Un árbol proyecta una sombra de 12 m en el suelo. Si la tangente del ángulo de elevación de la parte más alta del árbol es de 0,7, ¿cuál es su altura?

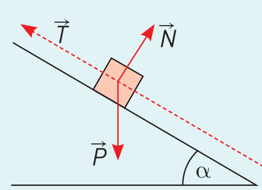
25 Con respecto a un sistema de referencia, una nadadora se dirige al extremo opuesto de la piscina con una rapidez de 4 m/s y con la dirección que se muestra en la imagen. ¿Cuáles son las componentes de su velocidad?



26 Una palmera proyecta una sombra de 7 m, como se muestra en la imagen. Usando razones trigonométricas, ¿cómo se puede representar la altura (*h*) de la palmera?



27 Analiza el objeto y las fuerzas que actúan sobre él.



Si el objeto se encuentra estático debido a una cuerda con $|\vec{N}| = 50$ N y m = 10 kg, determina α y $|\vec{T}|$.

α = ____________________

|T| = ____________________

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😒	😮
Relacioné la esfera con objetos cotidianos y la reconocí como una figura 3D generada por la rotación de una figura 2D.	◯	◯	◯
Apliqué las fórmulas del área y el volumen de una esfera para resolver problemas geométricos, científicos y de la vida diaria.	◯	◯	◯
Comprendí las razones trigonométricas en triángulos rectángulos y las apliqué para resolver triángulos.	◯	◯	◯
Apliqué las razones trigonométricas para resolver problemas de la vida cotidiana, de geometría y de ciencias naturales.	◯	◯	◯
Expliqué demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.	◯	◯	◯
Trabajé en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas	◯	◯	◯

Cuaderno página 118

Reviso mis metas y estrategias

1 Lee las preguntas de la página 187. ¿Cómo las responderías ahora?

____

____

2 Considera las metas personales que escribiste en la página 189: ¿las cumpliste?, ¿por qué?

____

____

3 Ahora que terminaste la unidad, ¿qué habilidades te parecen relevantes para estudiar geometría?

____

____

4 ¿Y qué actitudes?

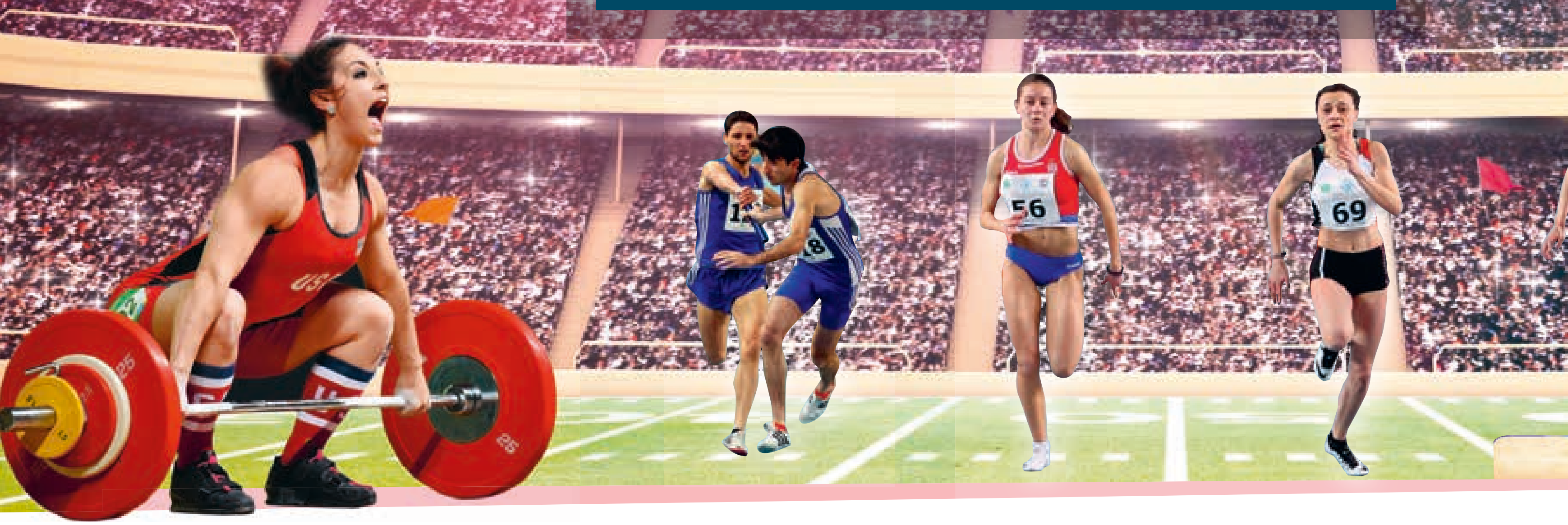
____

____

UNIDAD 4

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

El deporte nos brinda la oportunidad de observar emocionantes espectáculos de gran interés, los que motivan la preparación de los deportistas y los pronósticos deportivos, y generan expectativas en los hinchas y la prensa. En la organización de estos eventos se deciden los posibles enfrentamientos por la logística necesaria y la probabilidad de que algunos rivales participen, lo que puede influir mucho en su desempeño. ¿Hasta qué punto los resultados de una competencia deportiva dependen del azar y hasta dónde de una buena ejecución? Es una discusión de nunca acabar, en la que se culpa a la suerte de los malos resultados. Y es que, aun cuando existan diferencias, a veces gana el que parecía más débil.



¿Qué sabes sobre la probabilidad?, ¿cómo se define? Coméntalo con un compañero o compañera.

¿En qué aspectos de la vida diaria se utilizan expresiones como "es probable que…", "la probabilidad de que suceda es nula"? o "ha aumentado la probabilidad de…"? Nombra tres ejemplos.

Activo mis ideas

1. ¿Cómo organizarías un campeonato deportivo con ocho equipos?
2. Si se jugara "todos contra todos", esto es, un partido por cada pareja posible de equipos rivales, ¿cuántos partidos deberían realizarse?
3. ¿De qué otra manera podría organizarse el campeonato? Comenta cuáles serían sus ventajas y desventajas.
4. ¿Es posible determinar la probabilidad de que un equipo le gane o no a otro?, ¿por qué?
5. Al basarse en las estadísticas de partidos anteriores entre los mismos equipos, ¿cambia la probabilidad descrita? Explica.

Si algún evento tiene alta probabilidad de ocurrir, ¿se puede asegurar que efectivamente ocurrirá? Justifica.

Mis metas y estrategias

¿Qué aprenderé?

A utilizar permutaciones y combinaciones.

Sobre las variables aleatorias finitas.

A comprender el rol de la probabilidad en la sociedad.

¿Para qué me servirá?

Para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Para definir la variable aleatoria, determinar los posibles valores de la incógnita, calcular su probabilidad y graficar sus distribuciones.

Para revisar informaciones de los medios de comunicación, identificar suposiciones basadas en probabilidades, explicar cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas, así como decisiones basadas en situaciones subjetivas.

¿Cómo lo voy a aprender?

Las actividades de esta unidad se situarán en contextos relacionados con el deporte, ya sea investigando las distintas formas posibles de organizar un campeonato deportivo, como analizando la probabilidad que tiene un jugador o un equipo de ganar, o la que tiene un jugador de acertar en un lanzamiento penal, por ejemplo.
Por otra parte, el análisis de las probabilidades nos permitirá reconocer las reales posibilidades de ganar en los diferentes juegos de azar que existen en Chile.

¿Qué actitudes crees que son necesarias para aprender probabilidad?

- Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social
- Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas.
-

¿Qué habilidades consideras relevantes para estudiar probabilidad?

Argumentar y comunicar

- Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.
- Explicar demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.

Representar

- Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y su validez.
-

¿Qué te gustaría aprender?

Mis motivaciones

¿Qué te interesa aprender en esta unidad?

Mis estrategias

¿Qué estrategias o procedimientos consideras adecuadas para lograr tus metas?

¿Cómo las cumpliré?

¿Cuáles son tus metas personales para esta unidad?

Mis recursos

¿Qué fortalezas y debilidades consideras que tienes para aplicar tales estrategias?

Lección 9

Técnicas de conteo

Exploro

¿Qué conocimientos tienes sobre técnicas de conteo? Escribe tres ideas.

Cuando se cuentan todas las posibilidades, ¿es relevante considerar el orden? Explica.

Aprenderé a:

Aplicar el principio multiplicativo en la resolución de problemas:

- Identificando regularidades en las operaciones utilizadas al representar cada caso.
- Deduciendo y aplicando las fórmulas de permutaciones, variaciones y combinaciones, con sus representaciones respectivas.

Aplicar las fórmulas combinatorias en la resolución de problemas, en especial en casos que involucran cálculo de probabilidades.

Necesito recordar...

- Conteo de casos en experimentos asociados a repeticiones sucesivas o a combinaciones de casos.
- Definición y cálculo de probabilidad.

¿Qué debo saber?

1. Determina en cada caso la cantidad pedida.
   a. Una tienda ofrece poleras de cuatro tallas distintas: S, M, L y XL, todas ellas en cinco colores diferentes. ¿Cuántos tipos de poleras distintas tiene la tienda?
   b. En el problema anterior, ¿cuántos tipos de poleras habría si, además, tuvieran las modalidades con y sin cuello?

2. Pedro analiza las condiciones del viaje y el alojamiento.

  a. ¿Cuántas posibles elecciones puede realizar Pedro?

  b. ¿Qué operación relaciona las posibilidades de cada ítem y la cantidad posible de elecciones que se pueden realizar?

3. Andrea compara las actividades que se ofrecen.

  a. ¿Cuántas actividades podría realizar en total Andrea?

  b. ¿Qué operación relaciona las posibilidades de cada ítem y la cantidad posible de actividades que se pueden realizar?

4. ¿Qué diferencias observas entre las posibilidades descritas en las preguntas anteriores? Explica.

5. Para cada uno de los casos analizados anteriormente, describe una regla general que permita calcular las posibilidades.

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😒	😟
Apliqué algunas técnicas de conteo de casos en experimentos aleatorios, asociados a repeticiones sucesivas o a combinaciones de casos.	◯	◯	◯
Apliqué las reglas de las probabilidades en el contexto de la resolución de problemas.	◯	◯	◯
Usé modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.	◯	◯	◯
Usé procedimientos matemáticos para confirmar la veracidad de una información y/o para complementarla.	◯	◯	◯

Cuaderno página 123

Tema 1: ¿Cuándo se aplica el principio multiplicativo?

¿Qué aprenderé?

A aplicar el principio multiplicativo para determinar la cantidad de casos posibles en situaciones que implican ordenamientos de objetos.

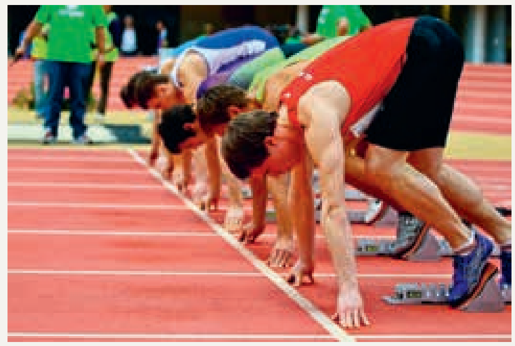
¿Para qué?

Para realizar cálculos sin necesidad de contar uno por uno los casos.

Actividad en pareja

Taller

En una competencia de atletismo, participan Hugo, Marcelo, Emilio y Rubén. Las marcas que ellos obtengan en cada prueba se traducirán en puntuaciones con las cuales se establecerán los cuatro lugares de la competencia.



1 Si se considera el orden en que cada uno termine la competencia, ¿cuáles son todos los posibles resultados? Escriban todas las posibilidades.

a. ¿Qué procedimiento siguieron para determinar las posibles posiciones?

b. ¿Existe otra forma de obtener todas las posibilidades? Justifiquen.

2 El entrenador cree que Marcelo ganará la competencia y que Hugo resultará último. Si así fuera, describan con sus palabras los resultados posibles. ¿Cuántos casos son?

3 Finalmente, Marcelo ganó la competencia.

a. ¿Cuántos son los resultados posibles?

b. Para cada caso, ¿cuántos resultados se generan al cambiar el lugar que obtiene Hugo? Expliquen.

c. ¿Qué relación existe entre la cantidad de resultados de este caso y la determinada en el ítem anterior? Expliquen.

4 Comparen la cantidad de casos que determinaron en el ítem 1 con la que determinaron en el ítem 3. ¿Qué relación existe entre estas cantidades? Comenten con sus compañeros y expliquen.

5 Según todos sus cálculos anteriores, ¿qué sucederá si Arturo, un quinto competidor, quisiera participar? Calculen todos los resultados posibles y justifiquen su respuesta sin realizar una lista.

¿Cómo trabajé el taller?	Individualmente ○ ○ ○ Grupalmente ○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	Individualmente ○ ○ ○ Grupalmente ○ ○ ○

Actividades de proceso

Para recordar una clave de cinco letras, Diego decide usar solo las vocales sin repetir ninguna de ellas. ¿Cuántas claves distintas podría crear?

Para abordar este tipo de problemas, podemos utilizar un esquema de casilleros. En este caso, tenemos 5 casilleros que corresponden al orden que pueden dar a las vocales. Así:

5	4	3	2	1

- Para la primera posición existen 5 posibilidades, porque puede ser escogida cualquiera de las cinco vocales.
- En cada caso hay 4 posibilidades para ocupar la segunda posición, ya que las vocales no deben repetirse. Entonces, para los primeros dos casilleros hay $5 \cdot 4 = 20$ posibilidades.
- Para la tercera posición, quedan solo tres vocales. Es decir, en total son $20 \cdot 3 = 60$ posibilidades.
- En el cuarto lugar, hay dos vocales disponibles. Entonces, son $60 \cdot 2 = 120$ posibilidades.
- Para el último lugar, solo queda una opción en cada caso. Es decir, hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \cdot 1 = 120$ casos en total.

1. Usando el procedimiento descrito en el ítem anterior, resuelve nuevamente las actividades del taller, es decir:

a. Si se considera el orden en que cada uno termine la competencia, ¿cuántos son todos los posibles resultados?

b. El entrenador cree que Marcelo ganará la competencia y que Hugo resultará último. ¿Cuántos son los resultados posibles?

c. Finalmente, Marcelo ganó la competencia. ¿Cuántos son los resultados posibles?

d. Si Arturo, un quinto competidor, quisiera participar, ¿cuántos son todos los resultados posibles?

En resumen

El **principio multiplicativo** establece que si un procedimiento dado se compone de dos etapas, que tienen respectivamente m y n posibilidades, entonces dicho procedimiento tiene $m \cdot n$ casos posibles en total. Si luego se agrega una nueva etapa, que tenga p posibilidades, el procedimiento tendrá $m \cdot n \cdot p$ casos posibles, es decir, siempre se multiplica por la cantidad de posibilidades de cada etapa.

Una **permutación** de n elementos es cada uno de los posibles órdenes de ellos, sin repetición. Se anota la cantidad total de los órdenes posibles como P_n.
(P_n se lee "pe sub ene")

El total de permutaciones de n elementos sin repetición se calcula como

$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$

Este producto, de todos los números naturales de 1 hasta n, se llama n factorial (y se escribe $n!$).

Actividades de práctica

1. Identifica, en cada situación, si las permutaciones asociadas tienen elementos distintos o repetidos.

Situación	Tipo de permutación
Las formas en que se puede distribuir un grupo de 15 trabajadores en 15 puestos de trabajo.	
Los números que se pueden formar con los dígitos de tres dados de seis caras.	
Las maneras en que se pueden ordenar las letras de la palabra INTELIGENCIA.	
El orden de llegada a clases de los 30 estudiantes de un curso.	

2. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a. 5! **b.** 7! **c.** 12! **d.** 8!

3. Escribe en cada caso una expresión (sin desarrollarla) que corresponda a la respuesta de cada pregunta.

a. Rosario tiene 12 libros de una colección que ha comenzado a formar. Si para guardarlos ha instalado una repisa en su pieza, ¿de cuántas maneras puede ordenarlos?

b. Miguel es profesor y en su curso hay 32 estudiantes. Si los quiere formar en fila, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

4. A continuación, se muestran las 24 permutaciones posibles de las letras A, B, C y D. Obsérvalas y responde las preguntas.

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

a. ¿Cuántas permutaciones comienzan con cada una de las letras?, ¿por qué debe ser así? Justifica.

b. Considera las que comienzan con la letra B. ¿En cuántas de ellas la segunda letra es la A?, ¿ocurre lo mismo con las otras letras?, ¿por qué?

c. Describe el procedimiento que se utilizó para hacer la lista de las 24 permutaciones sin repetir ninguna.

5. Explica con tus palabras por qué las siguientes igualdades son correctas.

a. $\frac{7!}{5!} = 6 \cdot 7$

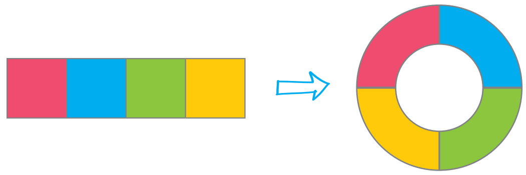
b. $8! \cdot 9 = 9!$

6. Escribe en cada caso una expresión con factoriales que sea equivalente a la dada. Explica.

   a. $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$

   b. $(a + 1) \cdot (a + 2) \cdot (a + 3) \cdot ... \cdot (a + n)$

7. Cuatro personas (simbolizadas por cada color) caminan en fila hacia una mesa redonda. Manteniendo el orden, se sientan en ella como se muestra.



   a. Representa todos los ordenamientos posibles en la fila y todos los ordenamientos posibles en la mesa circular.

   b. Considera los ordenamientos alrededor de la mesa: ¿hay ordenamientos que sean equivalentes entre sí?, ¿por qué? Comenta con tus compañeros y compañeras.

   ¿Qué tipo de razonamiento utilizaste? Explica.

   c. Por cada ordenamiento en la mesa circular, ¿cuántos ordenamientos hay que son equivalentes con él?

   d. ¿Qué relación hay entre la cantidad de permutaciones en fila y la cantidad de ordenamientos que hay alrededor de una mesa circular? Explica.

8. Según lo analizado en el ítem anterior, ¿de cuántas formas pueden sentarse alrededor de una mesa circular en cada caso? Escribe una expresión que las represente.

   a. 7 personas.

   b. 8 personas.

   c. 12 personas.

   d. 15 personas.

9. Para la fotografía oficial de la temporada, los 11 jugadores de un equipo profesional de fútbol se ubicarán de pie, uno al lado del otro. Sabiendo que el capitán del equipo no es el arquero:

   a. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse para la foto si en cada extremo debe ubicarse el capitán y el arquero?

   b. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse para la foto si el capitán y el arquero deben aparecer juntos?

¿Qué aprendí hoy?

Una camiseta de un equipo de básquetbol se compone de dos secciones. La primera sección puede ser blanca, roja o verde; la segunda puede ser negra, azul, amarilla, naranja o café.

a. ¿Cuántas combinaciones de colores posibles hay?

b. Si se quiere aumentar el número de combinaciones posibles agregando una opción de color a una sección de la camiseta, ¿a qué sección conviene más agregarla? Explica.

Cuaderno página 124

Tema 2: ¿Qué son las permutaciones y las combinaciones?

¿Qué aprenderé?

A reconocer las variaciones y las combinaciones, distinguirlas de las permutaciones y calcularlas.

¿Para qué?

Para aplicar las permutaciones, variaciones y combinaciones en la resolución de problemas de probabilidades.

Matemática en el deporte

La idea de la fase por grupos pretende que cada participante pueda asegurar un mínimo de partidos jugados que justifiquen su clasificación y participación. Fue creada a partir de los campeonatos mundiales de fútbol, ya que antiguamente muchos futbolistas no eran profesionales (tenían sus propios empleos) y la mayoría de los viajes largos se realizaban en barco. En esos tiempos, no era un buen estímulo obtener el permiso de viajar para todos, navegar varias semanas, para perder solo un partido y tener que regresar inmediatamente.

Actividad grupal

Taller

Muchos campeonatos, de diversas disciplinas, se organizan en dos fases: la primera, conocida como "de grupos", en la que los primeros lugares de cada grupo clasifican a la siguiente y la segunda, de "eliminación directa", donde el ganador permanece en competencia y el perdedor queda eliminado.

El Campeonato de Fútbol Sudamericano Sub-20 se desarrolla en dos fases. En la fase inicial se organizan dos grupos de 5 países cada uno. Los primeros 3 lugares de cada grupo pasan a la fase final.

1 Consideren los grupos sorteados para el Campeonato Sudamericano Sub-20 Ecuador 2017, clasificatorio para el Mundial de Fútbol Sub-20.

Grupo A	Grupo B
Ecuador	Argentina
Colombia	Uruguay
Brasil	Perú
Paraguay	Venezuela
Chile	Bolivia

a. ¿De cuántas maneras puede ordenarse el grupo A? Comenten y decidan la mejor forma de contar los casos sin repetirlos ni que falte alguno.

b. De cada grupo, clasifican los tres primeros equipos a la segunda fase. Según estas posiciones se define el orden de los partidos, por lo tanto, es importante si lo hace en primer, segundo o tercer lugar. En el grupo A, ¿qué combinaciones posibles hubo para los tres primeros lugares? Escriban todas las posibilidades.

c. ¿Cuántas son todas las combinaciones posibles para los tres primeros lugares?

___

___

¿Cómo se relaciona esta cantidad con la cantidad de selecciones que participaron en el campeonato y la de equipos que clasifican a la segunda fase? Expliquen.

d. Hay otros torneos en los que, después de clasificar a la segunda fase, se realiza un sorteo para definir el orden de los partidos, de modo que el orden en que los equipos clasifiquen no es importante. Si esto hubiera ocurrido en el Sudamericano Sub-20, ¿cuántas combinaciones de equipos clasificados pudieron haber existido en el grupo A?

Hagan una lista de todas las combinaciones.

e. ¿Qué relación existe entre la cantidad de combinaciones que describieron en los ítems b y d? Expliquen.

f. Si en lugar de fijarnos en los equipos clasificados, nos fijáramos en los que fueron eliminados, ¿cuántas combinaciones habría? ¿Qué relación hay con la cantidad de combinaciones de equipos clasificados? Expliquen.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?		
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?		

Ayuda

Un diagrama de árbol permite representar una secuencia de realizaciones de un experimento. En cada etapa, sus ramas indican la cantidad de casos posibles que existen para cada una.

Glosario

Factorial: de cualquier número natural n al producto de todos los números naturales menores o iguales que él.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Variación: de m elementos tomados de n en n (con $m \geq n$) a los distintos grupos formados por n elementos de forma que no entran todos los elementos ni se repiten, pero sí importa el orden de los elementos en el grupo.

Actividades de proceso

1. La profesora Valentina debe seleccionar entre 5 de sus alumnos (Andrés, Bruno, Carla, Diego y Eugenia) a 3 de ellos, los cuales representarán al liceo en una competencia. ¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo?

Una forma de resolverlo es mediante un diagrama de árbol, pero también es posible imaginar que lo construye para contar las posibilidades. Observa.

PASO 1 Si Valentina tuviera que escoger en orden a sus alumnos, tendría 5 posibilidades para escoger al primero. Luego, para escoger al segundo, tendría solo 4 posibilidades, 3 para el tercero, 2 para el cuarto y 1 para el quinto.
Por lo tanto, en el diagrama de árbol se podrían ver:

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ posibilidades.

Este producto, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ corresponde a 5 **factorial**, que se escribe $5!$.

PASO 2 Ya que Valentina debe escoger solo a 3 de sus alumnos, el diagrama de árbol habría llegado hasta la tercera etapa, es decir, habría tenido solo $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades.

Observa que, al "suprimir" las últimas dos etapas en el diagrama de árbol, se ha debido dividir por $1 \cdot 2 = 2$ el número de casos de esas etapas, es decir:

$$60 = \frac{120}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Al número $\frac{5!}{(5-3)!}$ le llamaremos **variación** de 3 objetos escogidos entre 5, y corresponde a la cantidad de formas en que se puede escoger, en orden, 3 objetos entre 5 disponibles. Se anota en este caso como V_3^5.

PASO 3 Al considerar estos 60 casos, se está pensando que escoger, por ejemplo, a Andrés, Bruno y Carla es distinto que escoger a Carla, Andrés y Bruno.
Entonces, ya que las 3 personas pueden ordenarse de $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneras, se debe dividir los 60 casos por estas 6 maneras, para obtener las formas de escogerlos sin importar el orden:

$$\frac{60}{6} = 10 = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!}$$

Al número $\frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!}$ le llamaremos combinación de 5 sobre 3, y corresponde a la cantidad de formas en que podemos escoger, sin importar el orden, 3 objetos entre 5 disponibles.

2. Comenta con tus compañeros y responde:

a. ¿Qué relación debe existir entre V_n^m y la cantidad de combinaciones posibles que hay, sin importar el orden? Justifiquen.

b. Si hay 4 elementos, y se quieren escoger los 4 considerando el orden, ¿cuántas posibilidades hay? ¿Es equivalente a preguntarse por las permutaciones de 4 elementos? Expliquen.

c. Considerando la pregunta anterior, calcula aplicando la fórmula $V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ ¿A qué equivalen los valores de m, n y m – n?

d. A partir de lo anterior, ¿cuál debe ser el valor de 0!?, ¿por qué?

¿Qué tipo de razonamiento utilizaste? Explica.

En resumen

Si $m, n \in \mathbb{N}_0$, entonces:

- Se llama **permutación** de n elementos (se escribe P_n) a la cantidad de formas en que se pueden ordenar en una fila y se puede calcular como

$$P_n = n!$$

- Se llama **variación** de n elementos escogidos entre m (se escribe V_n^m) a la cantidad de ordenamientos posibles de n elementos, escogidos entre m. La cantidad de ellos se puede calcular como:

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

- Se llama **combinación** de n elementos escogidos de entre m a la cantidad de posibilidades que hay de escoger n elementos de un total de m, sin que importe el orden en que son escogidos. La cantidad de combinaciones se escribe como C_n^m, y se puede calcular como:

$$C_n^m = \frac{V_n^m}{n!} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

- La expresión $\frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$ suele escribirse como $\binom{m}{n}$ –que se lee "m sobre n"– y recibe el nombre de **número combinatorio**.

- Algunas propiedades de los números combinatorios son:
  - Cualquier número sobre 0 es igual a 1.

$$\binom{n}{0} = 1$$

  - Todo número sobre sí mismo es igual a 1.

$$\binom{n}{n} = 1$$

  - Un número sobre 1 es siempre igual al número.

$$\binom{n}{1} = n$$

Ayuda

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

Actividades de práctica

1. Cinco estudiantes se presentan de candidatos para la directiva del curso. Si se debe escoger a tres de ellos para ocupar los cargos de presidente, secretario y tesorero, ¿cuántas son las distintas directivas posibles?

2. Gustavo tiene una colección de 40 revistas de cómics, de las cuales ha decidido regalarle 6 a Florencia, las que ella escoja. ¿De cuántas maneras puede elegir las revistas Florencia?

3. A partir de un grupo de 10 jugadores disponibles, se quiere formar un equipo de futbolito de 7 jugadores. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

4. Un profesor distribuye a sus estudiantes en filas en la sala, de modo que cada fila tiene 6 puestos. Si en total hay 7 filas, ¿de cuántas formas distintas puede formarse la primera de ellas?

5. Rosario se cambió de departamento y quiere invitar a algunos de sus amigos para que lo conozcan. Como tiene poco espacio, decide invitar a 10 de ellos, pero en grupos de 5. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?

6. Los estudiantes de un curso han organizado una rifa a beneficio de uno de sus compañeros, para el que venderán boletos en toda la comunidad del colegio. Cada boleto tiene 4 números impresos, que están entre 01 y 30 (ambos inclusive). El día del sorteo se utilizará una tómbola con bolitas numeradas del 01 al 30 y se extraerán cuatro de ellas sin reposición. Se adjudicará el premio mayor quien tenga en su boleto los 4 números que se sacaron. Si ningún boleto está repetido, ¿cuántos se pueden haber impreso (como máximo)?

7. La directora técnica de un equipo femenino de básquetbol debe definir a las jugadoras que integrarán la selección para un campeonato. En su equipo completo dispone de 5 **bases**, 8 **escoltas**, 10 **aleros**, 6 **ala-pívot** y 7 **pívot**.

   a. En la nómina final tiene pensado incluir a tres jugadoras por cada posición. ¿De cuántas maneras puede formar su selección?

   b. Ella además definirá para cada posición la calidad de titular, suplente y sparring, es decir, integrante del equipo de entrenamiento. Con estas condiciones, ¿de cuántas maneras puede nominar la selección final?

Glosario

En un equipo de básquetbol, normalmente, el **base** es el director del equipo sobre la cancha.
El **escolta** es a menudo el mejor tirador, especialmente a gran distancia del aro. El **alero** habitualmente tiene capacidad para llegar a canasta con rapidez manejando la pelota. El **ala-pívot** suele ser un jugador corpulento que se desenvuelve cerca del aro. Por último, el **pívot** acostumbra a ser el jugador más alto y corpulento del equipo.

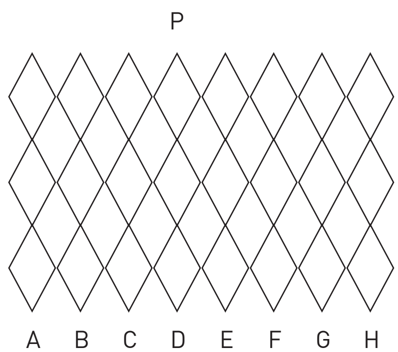
8. Un grupo de 4 amigos se encuentra jugando cartas con un naipe inglés (52 cartas). Si cada uno de ellos recibe 5 cartas al azar, siguiendo el orden en el que están sentados, ¿cuántos posibles repartos hay?

9. Alejandra diseñó un sorteo en el que se escogerán 12 bolitas de una tómbola, de un total de 20 bolitas, numeradas del 01 al 20. Cada participante del sorteo tendrá un cartón con 12 números, y resultará ganador quien tenga todos los números escogidos. Marcelo le sugiere que, en lugar de 12 números, escojan 10, pues habrá mayores posibilidades de ganar, ya que habrá menos cartones posibles. ¿Estás de acuerdo con Marcelo?, ¿por qué?

10. ¿Cuantos números de 7 cifras se pueden formar utilizando tres 2 y cuatro 3?

11. Demuestra que si p y q son dos números enteros de modo que $p > q \geq 0$, se cumple que $\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-1}{q}$

12. Una reja de alambre tiene la siguiente forma:



Una gota de agua se encuentra en el punto P y en cada unión de los alambres puede irse por la derecha o la izquierda.

a. ¿A qué puntos puede llegar en el último nivel?

b. ¿De cuántas maneras puede llegar a cada uno de ellos? Explica.

¿Crees que alguien ha pensado en una solución diferente?, ¿por qué?

¿Qué aprendí hoy?

1 En un campeonato de vóleibol participan 12 equipos, cada uno de los cuales jugará contra cada rival un solo partido. Al finalizar, se entregarán premios a los tres primeros lugares.

a. ¿Cuántos partidos se jugarán en total?

b. ¿De cuántas maneras diferentes puede conformarse el podio?

2 Para una representación folclórica se necesita formar un grupo de 4 estudiantes de un taller de 8 integrantes. ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar?

Cuaderno página 126

Tema 3: ¿En qué se aplican las combinaciones?

¿Qué aprenderé?

A aplicar las combinaciones en la resolución de problemas cotidianos.

¿Para qué?

Para distinguir las combinaciones de las permutaciones y poder decidir en qué casos corresponde uno o el otro.

Actividad grupal

Taller

Cuando se organiza un campeonato de fútbol, en el que los equipos participantes juegan todos contra todos, generalmente se intenta que el partido entre los dos equipos que atraen más público se realice en algunas de las fechas centrales, de modo que exista una mayor expectativa por el partido, es decir, por una parte que no se juegue con el campeonato ya definido y, por otra, que no resulte ser una final anticipada.

Si se está organizando un campeonato de fútbol en el que participan 12 equipos:

1. ¿Cuántos partidos se deben jugar en total?

2. ¿En cuántas fechas es posible completar el campeonato?, ¿por qué?

3. En su cuaderno, construyan una tabla en la que se muestre el desarrollo del campeonato, es decir, cuáles partidos se juegan en cada fecha. Consideren que cada equipo juega solo un partido por fecha.
Luego, organicen un orden posible para cada partido. ¿De cuántas maneras distintas se podrían ordenar? Expliquen.

4. Si se prueba haciendo el calendario de los partidos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el partido entre los dos equipos favoritos se juegue entre las fechas 7 y 9 (ambas inclusive)? Justifiquen su respuesta.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Cada competencia deportiva considera una instancia de desempate si es necesario determinar un ganador. Por ejemplo, en el tenis, se recurre al *tie break* para desempatar los sets. En el básquetbol se agregan tiempos adicionales de 5 minutos. En el caso del fútbol, se utiliza generalmente la **definición por penales**.

   Si un equipo cuenta con 11 jugadores al comenzar los penales:

   a. ¿De cuántas maneras se puede escoger a los cinco primeros jugadores que patearán, si luego entre ellos definirán el orden que seguirán?

   Ya que los jugadores acordarán el orden en que tirarán después de ser escogidos, la elección inicial no considerará el orden. Por lo tanto, se trata de una ______________________ de 5 elementos entre 11. En total serán:

   b. Si dos jugadores quieren calcular la probabilidad de ser escogidos ambos entre los cinco primeros tiradores, ¿qué cálculos deben realizar?

   Podemos considerar todas las elecciones en las que dos jugadores fijos se encuentran presentes. En este caso, el problema se traduce en escoger solo 3 jugadores entre los 9 restantes, es decir:

$$C_3^9 = \frac{9!}{3! \cdot 9-3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!}$$

   La probabilidad, por lo tanto, corresponde al cociente entre los casos favorables y los casos totales. Así:

$$P = \frac{C_3^9}{C_5^{11}} = \frac{\frac{9!}{3! \cdot 6!}}{\frac{11!}{5! \cdot 6!}} = \frac{9!}{3! \cdot 6} \cdot \frac{5! \cdot 6!}{11!} =$$

   Por lo tanto, para dos jugadores determinados, la probabilidad de ser escogidos ambos dentro de los primeros cinco tiradores es $\boxed{}$.

Glosario

Definición por penales: serie de lanzamientos desde el punto penal, para los que ambos equipos deben comenzar los tiros con igual cantidad de jugadores. Primero, se lanzan cinco tiros por cada equipo, en forma alternada, al cabo de los cuales gana quien haya anotado más veces. Si el empate persiste, continúan lanzado un tiro cada equipo hasta que uno anota y el otro falla.

Ayuda

Recuerda que el factorial de un número representa una multiplicación; luego, una expresión con fracciones y factoriales generalmente puede simplificarse. Observa.

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4! \cdot 6!}{10!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{10 \cdot 9 \cdot 8!}$$

$$= \frac{5 \cdot 6}{10 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

2. En un torneo de atletismo participan 10 corredoras. Dos de ellas, Emilia y Florencia, tienen una gran rivalidad y se prevé que ambas obtendrán un lugar entre las tres primeras.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

En primer lugar, se calculan los casos totales para el podio, es decir, la cantidad de formas en que se puede escoger a tres corredoras, considerando el orden (ya que es relevante quién es primera, segunda o tercera). Entonces, se trata de la cantidad de ______________________ de 3 elementos, escogidos entre 10.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Emilia supere a Florencia si ambas son finalistas?

Cada caso puede considerarse como un problema de rellenar 3 casilleros, 2 de las cuales son fijos (las posiciones de Emilia y de Florencia) y el tercero sería ocupado por alguna de las otras 8 corredoras.

Completa la tabla con los casos en que Emilia le gana a Florencia.

Primer lugar	Segundo lugar	Tercer lugar
Emilia	Florencia	

Por lo tanto, el total de casos favorables será ________.

Así, la probabilidad de que ocurra lo descrito será igual a:

3. El director técnico de un equipo de fútbol había previsto que, en caso de llegar a los penales, sus dos mejores tiradores patearan el primero y el último de los cinco penales. Pero el director fue expulsado durante el partido y el ayudante decidió escoger tanto a los jugadores como el orden de los lanzamientos al azar. Si solo participarán 10 jugadores por equipo, ¿cuál es la probabilidad de que se cumpla la idea del director técnico?

Usa calculadora
Para resolver

En primer lugar, como los jugadores fueron escogidos al azar, sin considerar el orden, los casos totales corresponden a una ____________________ de 5 elementos escogidos entre 10.

Así, se pueden escoger de ☐ maneras.

Para calcular los casos favorables a la idea del técnico, sean *A* y *B* sus lanzadores preferidos, se considera una secuencia de 5 casilleros, con el primero y el último ya ocupados por ellos.

A				*B*

Luego, los 3 lanzadores restantes se escogen, sin importar el orden, de entre los 8 jugadores disponibles (además de *A* y *B*). Entonces, se puede hacer de ☐ maneras.

El técnico pensó que sus lanzadores preferidos deberían lanzar el primer y el último tiro, pero sin especificar cuál le correspondía a cada uno. Por lo tanto, sus posiciones son intercambiables de tantas maneras como se pueden ordenar los dos jugadores, 2! = 2. Así, los casos favorables son:

$$2 \cdot C_3^8 = 2 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8!}{3 \cdot 5!}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que se cumpla la idea del técnico es:

$$\frac{2 \cdot C_3^8}{C_5^{10}} = \frac{\frac{8!}{3 \cdot 5!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} = \boxed{}$$

En resumen

Los problemas que involucran probabilidades se pueden resolver utilizando variaciones, combinaciones y el principio multiplicativo.

Dependiendo del caso de que se trate, es importante diferenciar si la situación involucra permutaciones o combinaciones, analizando si el orden es importante o no en la determinación de los casos.

Finalmente, se calcula el cociente entre los casos favorables y los casos totales, simplificando los factores y factoriales presentes según corresponda para expresar el resultado como fracción irreductible.

Actividades de práctica

1. En un campeonato nacional de 10 equipos, dos de ellos pertenecen a la misma ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan puestos consecutivos?

2. Un equipo de vóleibol consta de seis jugadores en cancha, pero el plantel completo es de 9 jugadores. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellos, que son hermanos, sean escogidos para jugar simultáneamente?

3. Un grupo de 7 amigos se juntaron a cocinar y almorzar. Acordaron que, una vez concluido el almuerzo, tres de ellos, escogidos al azar, lavarán los platos. ¿Cuál es la probabilidad de que a Paulina y a Esteban les toque hacer lo mismo, es decir, que ambos laven platos o que ambos no lo hagan?

4. Considera las letras de la palabra SACABAN.

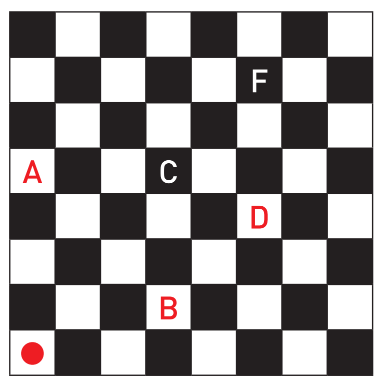
   a. ¿Cuántas palabras se pueden formar (con o sin sentido), considerando 5 letras no repetidas?

   b. Si se escogen dos letras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos consonantes?

   c. Si se escogen dos letras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que una de ellas sea la A?

   d. Si se escogen cuatro de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que a lo más una de ellas sea una A?

5. Se ubica un rey en un tablero de ajedrez, como se muestra. El rey solo puede moverse hacia la derecha o hacia arriba, haciendo un movimiento por vez.



   a. ¿Cuántos movimientos se deben realizar para llegar a cada una de las posiciones indicadas por letras en el tablero?

   b. Si en cada caso los movimientos se realizan al azar, ¿cuál es la probabilidad de llegar a cada posición del tablero?

6. En el póker, se llama “mano” a las cinco cartas que recibe cada jugador. El juego consiste en formar alguna de las siguientes combinaciones:

Nombre	Descripción	Ejemplo				
Escalera Real	5 cartas seguidas, de la misma pinta, del 10 al As.	A ♦	K ♠	Q ♠	J ♠	10 ♠
Escalera de color	5 cartas seguidas, de la misma pinta, sin el As como carta más alta.	J ♥	10 ♥	9 ♥	8 ♥	7 ♥
Póker	4 cartas del mismo valor.	7 ♥	7 ♠	7 ♦	7 ♣	4 ♦
Full	3 cartas de igual valor y otras 2 de igual valor, pero distintas de las anteriores.	5 ♥	5 ♦	5 ♣	10 ♥	10 ♣
Color	5 cartas de la misma pinta, no seguidas.	8 ♠	7 ♠	4 ♠	3 ♠	2 ♠
Escalera	5 cartas seguidas, no de la misma pinta.	9 ♦	8 ♣	7 ♠	6 ♥	5 ♦
Trío	Tres cartas del mismo valor.	6 ♣	6 ♥	6 ♦	A ♣	K ♦
Doble par	Dos pares de cartas, de los mismos valores entre sí.	5 ♦	5 ♥	3 ♠	A ♠	A ♥
Par	Dos cartas del mismo valor.	7 ♣	7 ♥	6 ♦	2 ♠	A ♠

Un jugador ha recibido su mano. Calcula la probabilidad de que tenga:

a. Una escalera real.

b. Un póker de figuras (K, Q o J).

c. Un full con un trío de figuras y un par de números menores que 4.

d. Un póker de cartas de pinta roja.

e. Un par de números.

f. Una escalera cuya carta más alta sea un 8.

¿Qué aprendí hoy?

En una tómbola hay 8 bolitas en total, rojas o blancas y se extraerán tres de ellas sin reponerlas. Se sabe además que la probabilidad de que salgan tres bolitas rojas es igual a $\frac{5}{28}$.

a. ¿Cuántas bolitas hay de cada color?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolitas sean blancas?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan más bolitas rojas que blancas?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan más bolitas blancas que rojas?

Cuaderno página 128

1 Identifica si cada situación tiene asociada una variación (V), una permutación (P) o una combinación (C).

Situación	Respuesta
Los números que se pueden formar con los dígitos 3, 5 y 7.	
Los números de tres dígitos que se pueden formar con los dígitos 3, 5 y 7, sin repetir.	
Los pares de números que se pueden elegir entre los dígitos 3, 5 y 7.	
Los votos de 10 profesores para elegir al mejor estudiante entre 5 alumnos.	
Las parejas de estudiantes que se pueden formar con 5 alumnos.	
Los *rankings* de 3 estudiantes, hechos a partir de 5 de ellos.	

2 En un restaurante se ofrecen diferentes alternativas para los elementos que componen un almuerzo. Es posible elegir entre tres entradas, cinco platos de fondo y seis postres, además de agua mineral, bebida o jugo. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar un menú?

3 Una familia, compuesta por el padre, la madre y sus tres hijos, se sentará al azar en los 5 asientos disponibles de un teatro. ¿Cuál es la probabilidad de que los padres se sienten uno al lado del otro?

4 En un matrimonio, 4 parejas quieren tomarse una foto en fila junto a los novios, de manera que cada persona esté junto a su pareja. ¿De cuántas formas pueden ordenarse para la foto si los novios deben quedar en el medio?

5 **Historia, geografía y ciencias sociales.** Las placas patentes de vehículos en Chile se forman con cuatro letras y dos dígitos, los que deben cumplir las siguientes condiciones:

Usa calculadora
Para explorar

- No se usan las vocales, ni las consonantes M, N, Ñ o Q.
- El primer dígito debe ser distinto de cero.

a. ¿Cuántas posibles placas patentes hay?

b. Si se pudiera usar las letras M y N, ¿cuántas más patentes posibles habría?

6 En una fiesta de Año Nuevo, todas las personas presentes se abrazaron entre sí una vez. Si en total se dieron 120 abrazos, ¿cuántas personas había?

7 En un curso hay 25 estudiantes, de los cuales 10 son hombres y 15 son mujeres. Se quiere formar una comisión organizadora, que debe estar formada por 3 hombres y 4 mujeres. Calcula la cantidad de comisiones posibles que se pueden formar si se quiere que aquella:

a. se forme completamente al azar;

b. incluya a Fernando y Emilia;

c. incluya a Pablo y Gabriel;

d. incluya a María y Claudio, pero no a Teresa.

8 Calcula en cada caso el valor de ***x***.

a. $V_x^{10} = 720$

b. $C_x^{8} = 56$

c. $V_4^{x} = 1680$

d. $C_6^{x} = 5005$

9 De un naipe inglés (52 cartas, sin comodines) se extraen 3 de ellas. Si los ases se consideran como número 1, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a. Que todas las cartas sean figuras.

b. Que haya más figuras que números.

c. Que haya más números que figuras.

10 Una empresa de juegos de azar quiere realizar un sorteo con una tómbola con números del 1 al 30, y cartones con 5 números impresos, sin repeticiones entre cartones. Se extraerán 5 números al azar y se otorgará un premio a quienes obtengan 4 o 5 aciertos. Al presentar este sorteo al directorio de la empresa, se plantean las siguientes sugerencias:

- Aumentar a 32 los números de la tómbola, manteniendo el criterio de entrega de los premios.
- Aumentar a 6 los números extraídos e impresos, y premiar a los que obtengan 5 o 6 aciertos.
- Disminuir a 28 los números de la tómbola, y premiar solo a quienes tengan cinco aciertos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de ganar un premio con las condiciones iniciales del sorteo?

b. ¿Con cuál de las sugerencias es más difícil ganar un premio?, ¿cuál es la probabilidad correspondiente?

c. ¿Con cuál de las sugerencias es más fácil ganar un premio?, ¿cuál es la probabilidad correspondiente?

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😒	😯
Realicé permutaciones de hasta cinco elementos, con material concreto o pictóricamente.	○	○	○
Combiné las permutaciones con el sorteo al azar, con o sin reposición.	○	○	○
Resolví problemas de juegos de azar y de la vida cotidiana, aplicando combinatoria y permutaciones.	○	○	○
Evalué el proceso y comprobé resultados y soluciones dadas de un problema matemático.	○	○	○
Mostré una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.	○	○	○

Cuaderno página 130

Lección 10

Variable aleatoria

Exploro

¿Qué conocimientos tienes sobre variable aleatoria? Escribe tres ideas.

Al lanzar diez veces una moneda, ¿qué eventos se podrían contar? Explica.

Aprenderé a:

Definir y utilizar una variable aleatoria asociada a un experimento:

- Identificando los casos posibles y determinando las posibilidades para cada uno.
- Determinando la probabilidad de cada caso posible según la probabilidad de cada resultado y la cantidad de casos.
- Analizando la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria.
- Representando gráficamente la función de distribución.

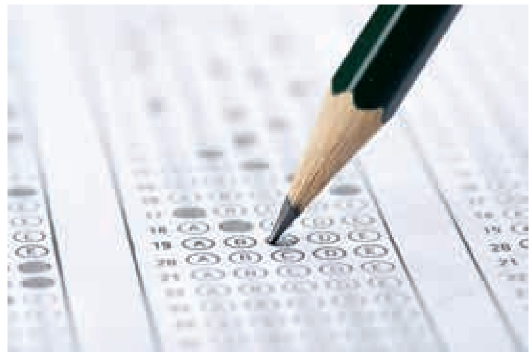
Necesito recordar...

- Técnicas de conteo asociadas a experimentos aleatorios.
- Concepto de función y sus elementos.
- Construcción, lectura e interpretación de gráficos de barras.

¿Qué debo saber?

1. Elena juega a lanzar tres monedas simultáneamente.
   a. ¿Cuántas posibilidades hay de obtener caras?
   b. Determina una función $f(x)$ que indique la cantidad de posibilidades de obtener x caras en cada caso. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función?

Antes de la implementación de la Prueba de Selección Universitaria (PSU), los estudiantes rendían la Prueba de Aptitud Académica. Entre los principales cambios se encuentra la modificación al reglamento de puntuación, implementado en 2014. Con anterioridad a esta fecha, cada respuesta incorrecta descontaba 0,25 puntos (se otorgaba 1 punto por respuesta correcta y 0 por omitir), con objeto de evitar que los estudiantes se arriesgaran a responder al azar cuando no supieran con certeza la respuesta.



Para evitar que los alumnos contesten al azar o por descarte (en lugar de que lo hagan aplicando sus conocimientos), al confeccionar una prueba de selección múltiple, se incluyen muchos aspectos: se procura que las alternativas tengan una elaboración similar –ya que en general los estudiantes prefieren las respuestas más elaboradas que otras más simples–, que no haya alternativas evidentemente descartables y que las letras correspondientes a las alternativas no sigan algún patrón establecido (por ejemplo, ABCDEABCDEABCDE).

2. Marcelo ha respondido cierta cantidad de preguntas de una prueba con certeza. Para lograr el puntaje que necesita, requiere dos respuestas correctas más, pero le quedan cuatro preguntas, cada una con 5 alternativas, y no sabe qué responder. Decide entonces responderlas al azar.

- **a.** ¿De cuántas maneras puede responder estas 4 preguntas?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que una pregunta respondida al azar sea correcta?
- **c.** ¿De cuántas maneras puede ocurrir que dos de las respuestas sean correctas?, ¿cómo lo puedes calcular?
- **d.** ¿Cuál es la probabilidad de que logre su objetivo de obtener al menos dos respuestas correctas más?, ¿qué casos debes considerar? Explica.

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Apliqué diversas técnicas de conteo asociadas a experimentos aleatorios.			
Comprendí el concepto de función y sus elementos.			
Describí relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.			
Tomé decisiones basado en conocimientos matemáticos.			

Cuaderno página 132

Tema 1: ¿Qué es una variable aleatoria?

¿Qué aprenderé?

A definir y utilizar una variable aleatoria, asociada a un experimento.

¿Para qué?

Para elaborar diversos análisis a partir de un mismo experimento aleatorio, según lo que interese estudiar.

Ayuda

En un diagrama de árbol, se llama **rama** a cada una de las líneas que simbolizan los caminos a diferentes posibilidades. Los extremos de las ramas se juntan en **nodos**, que simbolizan resultados particulares en una etapa. El final de cada rama se conoce como **hoja**. Recuerda que las secuencias de resultados posibles se presentan considerando el orden de ellos.

Actividad en pareja

Taller

Una partida de ajedrez se puede ganar, empatar (conocido como "tablas") o perder. En un torneo de ajedrez, cada jugador se enfrenta una vez contra cada uno de los demás, y a cada jugador se le asignan tres puntos por la victoria, un punto por un empate y ninguno por la derrota. Resulta vencedor del torneo quien acumule mayor puntaje. Esta forma de otorgar los puntos se conoce como "Regla de Bilbao", ya que fue implementada por primera vez en esta ciudad el año 2008, durante un Torneo de Maestros.

muzsy / Shutterstock.com

1 Construyan un diagrama de árbol para representar los resultados posibles de tres partidas, para un jugador específico, de modo que cada nodo del árbol contenga tres ramas, correspondientes a cada resultado. Utilicen las letras G, E y P para indicar si la partida es ganada, empatada o perdida.

a. ¿Cuántas ramas tiene este diagrama de árbol?

b. Seleccionen tres ramas del árbol, describan en palabras el desarrollo de los partidos y calculen la cantidad de puntos obtenidos.

c. ¿De cuántas maneras el jugador puede obtener 3, 4 y 7 puntos?

2 En el colegio, se desarrolla un torneo de ajedrez con 4 jugadores utilizando la "Regla de Bilbao".

a. ¿Cuántas partidas deben jugarse en todo el torneo?

b. ¿Cuántos puntos puede obtener, como máximo, un jugador que participa en el torneo?

c. ¿Cuántos puntos puede obtener, como mínimo, un jugador que participa en el torneo?

d. ¿Es posible que un jugador obtenga 8 puntos?, ¿por qué? Expliquen.

e. ¿Cuáles son todas las posibles cantidades de puntos que puede obtener un jugador? Escríbanlas y describan en cada caso un resultado que permita obtener dicha cantidad.

f. Si se sabe que un jugador obtuvo 3 puntos, ¿es posible saber cuáles fueron sus resultados? Expliquen.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?		
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?		

Matemática e historia

Leyenda del ajedrez

Hace mucho tiempo reinaba en parte de la India el rey Sheram. En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso lo dejó profundamente triste. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarlo.

Un buen día, un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirlo y alegrarlo de nuevo: el ajedrez.

Después de explicarle las reglas y entregarle las piezas y el tablero, el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y desapareció en parte su pena. Sissa lo había logrado.

Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara. Este rechazó esa recompensa, pero el rey insistió y Sissa pidió lo siguiente:

> "Deseo que ponga un grano de trigo en el primer cuadro del tablero, dos, en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada cuadro, y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante".

El rey se sorprendió bastante con la petición creyendo que era una recompensa demasiado pequeña para tan importante regalo y aceptó. Mandó a los calculistas de la corte que calcularan la cantidad exacta de granos de trigo que había pedido Sissa, es decir:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}$$

Cuál fue su sorpresa cuando estos le comunicaron que no podía entregar esa cantidad de trigo ya que ascendía a:

18 446 744 073 709 551 615 granos de trigo

El rey se quedó de piedra. Pero en ese momento Sissa renunció al presente. Tenía suficiente con haber conseguido que el rey volviera a estar feliz y además les había dado una lección matemática que no se esperaban.

Actividades de proceso

1. Una tómbola contiene 24 bolitas, numeradas del 1 al 24, de las cuales se escogen 3 al azar. Francisca, Felipe y Jorge apuestan sobre los números de estas bolitas.

- Francisca dice que una de las bolitas tendrá el número 18.
- Felipe dice que al menos dos de las bolitas contendrán números pares.
- Jorge dice que una bolita tendrá un número múltiplo de 3.

Al extraer las bolitas, aunque los resultados posibles son los mismos, las **variables aleatorias** que observa cada uno son diferentes. Sus apuestas se pueden interpretar de modo que se representen usando números. Observa.

a. A Francisca le interesa cuántas de las bolitas obtenidas tienen el número 18. ¿Qué valores puede tomar esta variable?

____

____

b. A Felipe le interesa la cantidad de números pares obtenidos. ¿Qué valores puede tomar esta variable?

____

____

c. A Jorge le interesa si el número de la bolita es múltiplo de 3. ¿Qué valores puede tomar esta variable?

____

____

2. Considera el experimento aleatorio "preguntar a una persona cuál es su plato favorito". En ese contexto, determina si cada una de las siguientes variables corresponde o no a una variable aleatoria.

a. X: cantidad de letras que tiene el nombre del plato. ☐

b. $X = 0$ si son solo verduras, $X = 1$ si es solo carne, $X = 2$ si no corresponde a ninguno de los casos anteriores. ☐

c. X: nombre del plato. ☐

d. X: costo de preparación, en pesos, del plato. ☐

e. X: cantidad de calorías que tiene el plato. ☐

f. X: lugar donde se vende el plato. ☐

Glosario

Variable aleatoria: función que toma sus valores de acuerdo con los resultados de un experimento aleatorio. Así, su dominio es el espacio muestral y el recorrido corresponde a valores numéricos según se defina la función. Se utiliza la notación $X(x)$.

3. En el torneo de ajedrez descrito (página 270), la regla de Bilbao para el resultado de cada partida corresponde a una variable aleatoria X.

a. ¿Cuál es el dom(X)?

b. ¿Cuáles son todos los valores posibles para $X(x)$? Explica.

c. ¿De cuántas maneras es posible obtener 5 puntos?

A veces, la combinatoria nos puede ayudar a contar las posibilidades correspondientes a uno de los valores del recorrido. En este caso:

Puntos	Corresponde a	Es como contar de cuántas maneras se puede escoger	Cálculo	Casos Posibles
0	Perder las 3 partidas.	0 elementos de 3.	$\binom{3}{0} = 1$	1
3	Ganar una partida y empatar las otras 2.	1 elemento de 3.	$\binom{3}{1} = 3$	4
	Empatar las 3 partidas.	0 elementos de 3.	$\binom{3}{0} = 1$	
4	Ganar una partida, empatar una y perder una.	El orden de 3 elementos.	$3!$	6

d. Explica con tus palabras la forma de calcular las posibilidades para los casos restantes utilizando combinatoria. Compara tu explicación con tus compañeros.

e. Completa la siguiente tabla.

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Posibilidades										

En resumen

Una **variable aleatoria** es una función que, a cada posible resultado de un experimento, le asigna un número real. Por lo general, se denotan las variables aleatorias con letras mayúsculas X, Y, Z, etc.

La ventaja del concepto de variable aleatoria es que nos permite centrar la atención en alguna característica común que tengan los elementos del espacio muestral y que pueden ser de nuestro interés, más que los resultados mismos del experimento aleatorio.

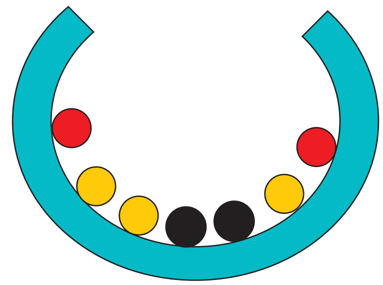
Actividades de práctica

1. Para el experimento "lanzar 4 monedas simultáneamente", se define la variable aleatoria X: número de sellos obtenidos.
   a. ¿Qué valores puede tomar X?
   b. ¿Cuál es el dominio de la variable aleatoria X?
   c. Determina los eventos correspondientes a $X = 3$. ¿Cuántos son los casos posibles?
   d. ¿Cuáles son los eventos para los cuales $X = 1$?, ¿cómo los podrías describir?
   e. ¿En qué casos se cumple $1 < X \leq 3$? Explica.
2. Dado el experimento "comprar una caja con 10 ampolletas", decide si las siguientes son variables aleatorias. Si fuera así, identifica los posibles valores que cada variable puede tomar.
   a. X: cantidad de ampolletas quemadas.
   b. Y: suma de los watts de todas las ampolletas.
   c. Z: color de las ampolletas.
   d. W: fecha de embalaje de la caja.
3. Laura y Antonio practican rayuela, pero no recuerdan cómo se otorgan los puntajes. Entonces, deciden que cada uno lanzará tres veces, por turnos, y ganará quien más aciertos haya logrado. Comienza lanzando Laura.
   a. Representa en un diagrama de árbol los posibles resulatados del juego de Laura. ¿Cuántas posibilidades hay?
   b. ¿De cuántas maneras es posible que gane Laura?, ¿y que gane Antonio?
4. Gladys trabaja haciendo el control de calidad de una partida de tornillos. Para esto, extrae consecutivamente 5 tornillos de cada caja y registra si están dañados o en buen estado.
   a. Determina la variable aleatoria X: cantidad de tornillos en buen estado.
   b. Describe con palabras los siguientes eventos:
      - $X = 4$
      - $X = 0$
      - $1 < X \leq 4$

Matemática y deporte

La rayuela consiste en lanzar un tejo metálico circular sobre una caja inclinada rellena con arcilla desde 14 metros de distancia. Este receptáculo está dividido por la mitad por una lienza tensada dispuesta a lo ancho de la cancha. Los jugadores se van alternando los tiros y el tejo que queda más cerca de la lienza obtiene los puntos. Si le acierta a la lienza -jugada conocida como "quemada"- se adjudica doble puntaje. Los puntos se van anulando si son iguales entre los contrincantes, por lo que los partidos pueden tener una duración indefinida.

5. Considera la siguiente tómbola:



Se extrae una bolita, se registra su color y se deja aparte. Luego, se repite el proceso tantas veces como sea necesario. A partir de ello se han definido las siguientes variables aleatorias:

- X: extracciones necesarias hasta sacar la segunda bolita roja.
- Y: extracciones necesarias hasta sacar la segunda bolita amarilla.
- Z: extracciones necesarias hasta sacar la primera bolita negra.

Escribe en cada caso los elementos del espacio muestral correspondientes a los siguientes valores.

a. $X = 3$

b. $Y = 5$

c. $Z = 4$

6. Se lanzan cinco monedas a la vez y se define una variable aleatoria considerando los resultados obtenidos. El recorrido de esta variable aleatoria es $\text{Rec}(X) = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$

a. ¿Cuál puede ser la variable aleatoria definida?, ¿es única? Discute con tus compañeros.

b. Escribe, para cada elemento del recorrido, sus preimágenes. ¿Cuántos elementos tiene cada uno? Explica.

Ayuda

Dada una función $f(x)$, si $f(a) = b$ entonces b es la **imagen** de a, mientras que a es la **preimagen** de b.

¿Qué aprendí hoy?

De un juego de dominó completo se extrae una ficha al azar y se define la variable aleatoria Y: totalidad de los puntos que contiene.

a. Utiliza una tabla o un esquema para representar la variable aleatoria.

b. ¿De qué maneras se pueden obtener 5 puntos?

c. ¿De cuántas maneras se pueden obtener 9 puntos?

d. ¿A qué casos corresponde la expresión $Y > 8$? Escríbelos.

Cuaderno página 133

Tema 2: ¿Cuál es la probabilidad de una variable aleatoria?

¿Qué aprenderé?

A calcular la probabilidad de la variable aleatoria asociada a un experimento.

¿Para qué?

Para calcular la función de probabilidad correspondiente al experimento aleatorio.

¿Hay alguna otra manera de que lo puedas hacer? Explica.

Actividad en pareja

Taller

Los jugadores de un equipo de básquetbol han decidido practicar con dedicación los tiros libres, ya que han errado muchos en los últimos partidos. Para esto, realizarán una competencia que consiste en que cada jugador podrá lanzar a la canasta hasta que logre convertir, con un máximo de 4 tiros.

Tiro en que logró convertir	Puntaje
Primero	3
Segundo	2
Tercero	1
Cuarto	0
Ninguno	–2

1. Utilizando un diagrama de árbol, representa el posible desarrollo de la competencia para un jugador.

2. Define para esta situación una variable aleatoria. ¿Cuál es su dominio y su recorrido?

3. Si al lanzar un tiro libre cualquiera, cada jugador tiene una probabilidad de anotar de 0,75, ¿cuál es la probabilidad de que obtenga 1 punto? Explica cómo calcularlo.

4 Para cada valor de una variable aleatoria, se puede determinar su probabilidad, creando de esta manera una nueva **función de probabilidad**. Observa y completa.

La probabilidad de que acierte al primer tiro es 0,75.

Que acierte al segundo tiro implica que falló el primero, cuya probabilidad es de 0,25. Luego, la probabilidad de que acierte al segundo es 0,25 • 0,75.

a. Que acierte al tercer tiro implica que ya falló los dos primeros. Luego, la probabilidad de que esto suceda es:

______________________________.

b. La probabilidad de que acierte al cuarto tiro es de ______________________________ y la de que no acierte ninguno de los cuatro tiros es ______________________________.

5 Así, se define la función de probabilidad de la variable aleatoria como P($X = x$) para cada valor posible de x. Completa:

$P(X = 3) = 0{,}75 = \frac{3}{4}$

$P(X = 2) = 0{,}25 \cdot 0{,}75 = \frac{3}{16}$

a. $P(X = 1) =$ ____________________

b. $P(X = 0) =$ ____________________

c. $P(X = -2) =$ ____________________

6 Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos. Explica con tus palabras a qué corresponden en cada caso.

a. $P(X \geq 0) =$ ____________________

b. $P(X < 3) =$ ____________________

Glosario

Función de probabilidad: de una variable aleatoria discreta X es la función que asocia a cada valor de x_i de la variable su probabilidad p_i. Ya que se trata de la probabilidad, para los valores de p_i se cumple que $0 \leq p_i \leq 1$, y siempre: $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

¿A que se refieren estas propiedades? Explicalas dando un ejemplo de cada una.

Ayuda

No confundas las letras *X* y *x*, ya que, en probabilidades, tienen distinto significado.
Se usa la letra *X* (mayúscula) para designar la variable aleatoria; mientras que la letra *x* (minúscula) designa sus valores particulares.

Actividades de proceso

1. Natalia es una tiradora de arco y flecha con mucha experiencia. La probabilidad de que consiga una diana (es decir, que acierte en el centro del disco de lanzamiento) es igual a 0,95. En una serie de 6 tiros:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga 4 dianas?

Observa que, según el número de dianas que consiga, la cantidad de posibilidades de obtenerlas en los 6 lanzamientos va variando. Por ejemplo, existe solo una forma de no acertar ninguna (o de acertarlas todas). Pero si logra solo una diana, son seis las posibilidades de que esto ocurra (porque la serie es de seis tiros).

Entonces, se puede usar combinatoria para determinar la probabilidad de cada uno de los valores de la variable aleatoria *Y*: cantidad de dianas obtenidas.

En este caso, se busca el valor de P(Y = 4), esto es, la probabilidad de que obtenga solo cuatro dianas. Una forma de hacerlo es imaginar una secuencia de seis casilleros en los que debemos escoger cuatro de ellos que correspondan a las dianas.
Por ejemplo:

1	2	3	4	5	6
Fuera	Diana	Diana	Fuera	Diana	Diana

Completa con otro caso posible:

1	2	3	4	5	6

Escoger todas las posiciones correspondientes a 4 dianas equivale a calcular la cantidad de maneras en que se pueden escoger cuatro elementos de entre seis sin considerar el orden. Es decir:

$$C^6_4 = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \boxed{}$$

Ahora, observa que la probabilidad para la primera secuencia de tiros es la siguiente:

$$0{,}05 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}95^4 \cdot 0{,}05^2$$

Para la segunda secuencia, la probabilidad es:

$\boxed{}$.

Luego, se puede deducir que:

$$\text{P}(Y = 4) = \underbrace{\boxed{}}_{\text{Cantidad de maneras}} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{\text{Probabilidad de 4 dianas}}$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Natalia obtenga más dianas que tiros fuera del centro?

De manera similar, para cada valor de la variable aleatoria, en este caso $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, se tiene que:

$$P(Y = n) = \underbrace{\binom{6}{n}}_{\text{Cantidad de maneras}} \cdot \overbrace{0{,}95^{n}}^{\text{Probabilidad de } n \text{ dianas}} \cdot 0{,}05^{6-n}$$

Entonces, la probabilidad de obtener más dianas que tiros fuera se puede calcular como:

$P(Y > 3) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6)$

$P(Y > 3) = \boxed{}$

2. Un jugador de básquetbol, que suele encestar el 70 % de sus tiros, tiene que lanzar a la canasta. Si acierta el primer tiro, puede repetir el lanzamiento. Luego, puede obtener 0 puntos (fallando el primer tiro), 1 punto (acertando el primero y fallando el segundo) o 2 puntos (acertando ambos tiros). Si X es la variable aleatoria que representa el puntaje obtenido, ¿cuál es su función de probabilidad?

Considerando que lo que ocurra en el primer lanzamiento no tiene ningún efecto sobre el segundo lanzamiento, entonces:

$P(X = 0) = \boxed{}$ probabilidad de fallar el primer tiro.

$P(X = 1) = \boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$ probabilidad de acertar un tiro y fallar otro.

$P(X = 2) = \boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$ probabilidad de acertar ambos tiros.

En resumen

Se llama **función de probabilidad** de una variable aleatoria a aquella que describe la probabilidad de los valores iguales a un valor de su dominio. Podemos escribirla como $P(X = x)$, siendo X la variable aleatoria correspondiente.

Si una variable aleatoria puede tomar los valores $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, entonces se cumple que

$P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \ldots + P(X = x_n) = 1.$

Ayuda

Si dos sucesos son independientes, la probabilidad de que ocurran ambos –es decir, uno y el otro– se calcula multiplicando sus probabilidades respectivas.

Y él ¿quién es?

Blaise Pascal (1623-1662)

Matemático, físico, escritor y filósofo cristiano francés, considerado una de las mentes privilegiadas de la historia occidental. Sus contribuciones a la matemática y a la historia natural incluyen el diseño y construcción de calculadoras mecánicas, aportes a la teoría de la probabilidad, investigaciones sobre los fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío. Después de una experiencia religiosa profunda, Pascal se dedicó también a la filosofía y a la teología.

Actividades de práctica

1. Considera el lanzamiento de tres dados con seis caras numeradas, de colores blanco, azul y rojo. A partir de esto se definen las siguientes variables aleatorias:

- X: suma de los puntos de los tres dados.
- Y: suma de los puntos de los dados blanco y rojo menos los puntos del dado azul.
- Z: diferencia absoluta de los puntos obtenidos entre el dado rojo y el dado azul multiplicada por los puntos del dado blanco.

a. Construye una tabla de valores para cada variable aleatoria.

b. Determina la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria.

Calcula los siguientes valores:

c. $P(X > 15)$

d. $P(Y \leq 5)$

e. $P(Z \geq 12)$

2. En el control de calidad de una fábrica se extrae uno de sus productos al azar para verificar si tiene fallas o no. Se ha estimado que la probabilidad de que un producto tenga fallas es igual a 0,02, independiente de los resultados previos. Para realizar el control de calidad se extraen 10 unidades del producto. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

a. Dos de las unidades tienen fallas.

b. A lo más 4 unidades tienen fallas.

c. Las unidades con fallas son a lo menos 2, pero no más de 5.

3. En un colegio se organiza una prueba sorpresa durante el paseo de fin de año y se ha indicado a cada curso que debe escoger al azar a sus representantes (5 en total). En el 2° medio hay 20 mujeres y 13 hombres.

a. Determina la variable aleatoria Y: cantidad de mujeres en el equipo.

b. Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria Y.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos una mujer en el equipo, pero no más de tres?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más hombres que mujeres en el equipo?

4. Lissette ha decidido ordenar sus 12 libros de ficción en una repisa uno al lado del otro, disponiéndolos al azar. Si dos de sus libros son sus favoritos:

a. Determina la variable aleatoria Z: cantidad de libros entre sus dos favoritos.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que entre sus dos libros favoritos haya 5 libros?

5. La función de probabilidad de una variable aleatoria X se define con las siguientes condiciones:

$P(X = 1) = \frac{1}{5}$

$P(X = 2) = 2 \cdot P(X = 3)$

$P(X = 4) = 3 \cdot P(X = 2)$

a. Calcula la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria.

b. ¿Cuál es el valor de $P(X \leq 2)$?

6. Amanda y Pablo van a un casino, y participan en el siguiente juego: Se apuesta $200 a algún número del 1 al 6. Luego el croupier lanza cuatro dados. Si el número escogido aparece una, dos, tres o cuatro veces en los dados, se gana una, dos, tres o cuatro veces lo apostado, respectivamente. Si no aparece, se pierde la apuesta.

a. Determina la variable aleatoria al monto ganado en el juego, apostando a un número cualquiera.

b. ¿Cuál es la probabilidad de ganar al menos $400?

c. Si Amanda y Pablo se ponen de acuerdo para apostar a números distintos, en el mismo lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad de que, juntos, ganen al menos $600?

7. Un experimento tiene solo dos posibles resultados, que se pueden definir como "éxito" y "fracaso", y se determina que P(éxito) = p. Si el experimento se repite n veces, ¿qué expresión representa la función de probabilidad de la variable aleatoria asociada? Explica.

¿Qué tipo de razonamiento utilizaste? Explica.

¿Qué aprendí hoy?

Magaly está organizando un campeonato de vóleibol en la comuna. El estadio que será sede del campeonato tiene canchas que permiten albergar a un máximo de 10 equipos, pero ella ha aceptado 12 inscripciones. Por su experiencia, estima que el 20 % de los equipos que se inscriben no llegan el día de la competencia. Calcula la probabilidad de que:

a. ese día falten canchas;

b. ese día haya más canchas disponibles que las necesarias;

c. el estadio se utilice en su máxima capacidad.

Cuaderno página 135

Tema 3: ¿Cómo se grafica la distribución de una variable aleatoria?

¿Qué aprenderé?

A representar gráficamente la distribución de una variable aleatoria.

¿Para qué?

Para determinar la probabilidad de una variable aleatoria, observándola directamente en el gráfico y comparar e interpretar dos o más gráficos.

Glosario

Función de distribución: de una variable aleatoria X, cuyos valores suponemos ordenados de menor a mayor, es la función:

$$F(x) = p(X \leq x)$$

Es decir, la función de distribución asocia a cada valor de la variable aleatoria la probabilidad acumulada hasta ese valor.

Actividad en pareja

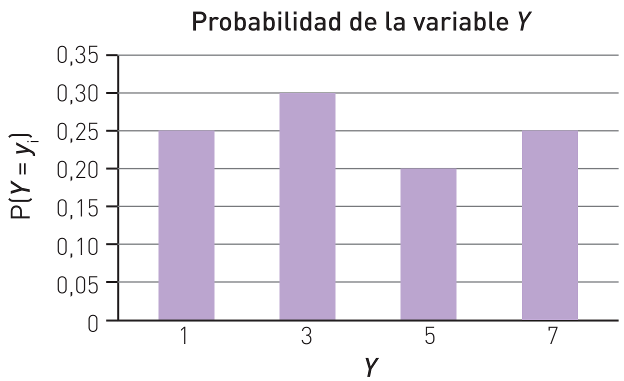
Taller

1. Para el experimento "lanzar dos dados", describan el espacio muestral Ω, escribiendo todos sus elementos. ¿Cuántos elementos son?
2. Dada la variable aleatoria X: suma de los dados, ¿cuáles son todos los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria X?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dados sea 12?, ¿y 8? Expliquen cómo determinarlo.
4. Calculen la probabilidad de que la variable aleatoria X tome cada uno de los valores posibles, es decir, describan su función de probabilidad.
5. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dados sea, a lo más, 6? Expliquen cómo calcularlo.
6. Calculen la probabilidad de que la variable aleatoria X tome, a lo más, cada uno de los valores posibles, es decir, describan su **función de distribución**.
7. Construyan dos gráficos, ubicando en el eje de las abscisas los posibles valores de la variable aleatoria, y en el eje de las ordenadas, la probabilidad de que la variable aleatoria tome cada valor. Utilicen barras del mismo ancho sin dejar espacios entre ellas.
   a. Grafiquen la función de probabilidad $f(x)$.
   b. Grafiquen la función de distribución $F(x)$, es decir, la que describe la probabilidad de los valores menores o iguales a un valor del dominio de la variable aleatoria.

	Individualmente	Grupalmente
¿Cómo trabajé el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○
¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	○ ○ ○	○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Analiza el gráfico y completa la tabla. Luego, responde.



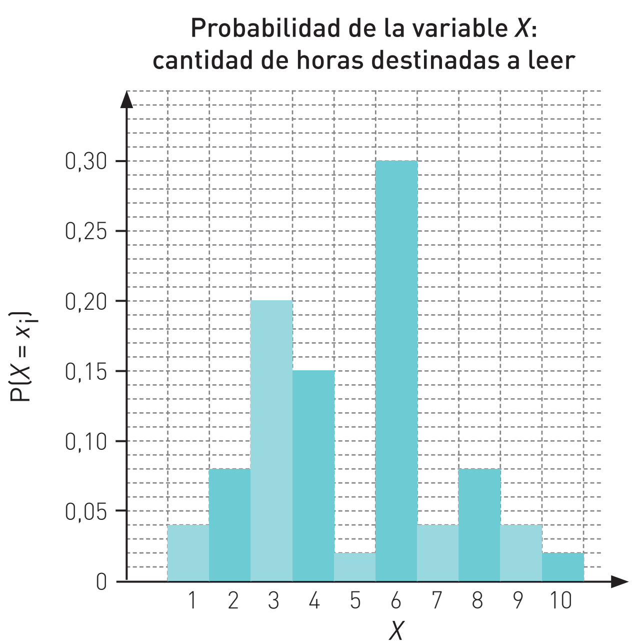
y_i	$P(Y = y_i)$
1	
3	
	0,20

a. ¿Cuál es el recorrido de la variable aleatoria Y?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que $Y = 5$?

c. ¿Existen valores de la variable que tengan la misma probabilidad de ocurrir?

2. Analiza el gráfico y responde.



a. ¿Cuál es la probabilidad de que $X = 2$?

b. ¿Cuál es la probabilidad de elegir, entre todos los encuestados, a un estudiante que destine a leer 7 horas?

Herramientas tecnológicas

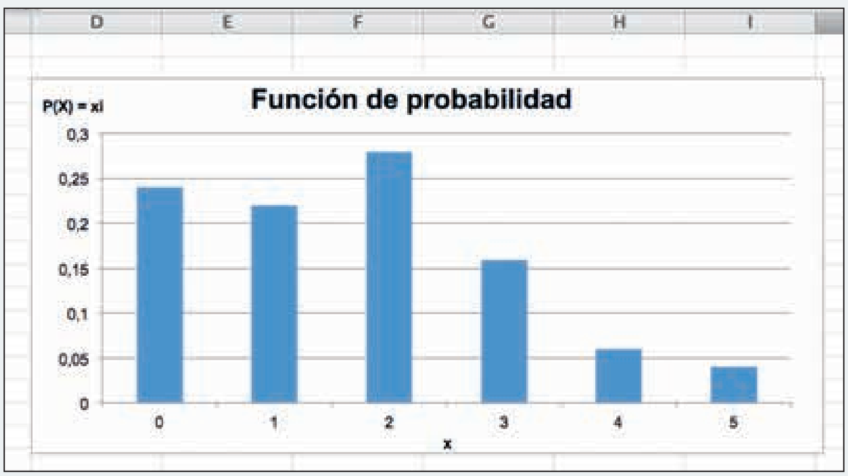
Representar gráficamente las probabilidades de una variable aleatoria usando una hoja de cálculo.

1. Abre una hoja de cálculo e ingresa en una celda una lista de valores para la variable aleatoria X. Luego, ingresa los valores de las probabilidades $P(X = x_i)$ en la siguiente columna.

	A	B
1	0	0,24
2	1	0,22
3	2	0,28
4	3	0,16
5	4	0,06
6	5	0,04

2. Para graficar los datos, selecciona los valores de la segunda columna y presiona el botón Insertar de la barra de herramientas. Luego, en la pestaña de **Gráficos** selecciona **Columna** y escoge la primera opción, como muestra la imagen.

3. Luego, quita la leyenda "Serie 1" del gráfico presionando el botón derecho del mouse sobre la leyenda y haciendo clic sobre **Eliminar**. Haz clic en **Presentación**, de la barra de herramientas. Después, selecciona el ícono Título del gráfico y escoge la segunda opción. Por último, debes escribir como título: Función de probabilidad.
   Para dar nombre a los ejes, nuevamente selecciona **Presentación** y haz clic en **Rótulos del eje**. En el eje horizontal escribe x, y en el vertical ingresa $P(X = x_i)$.
   Así obtienes lo siguiente:



Practica, representando gráficamente las probabilidades de cada variable aleatoria.

a. X: cantidad de semáforos en rojo.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,10	0,40	0,25	0,20	0,05

b. Z: cantidad de esferas rojas que se pueden extraer de una tómbola.

z_i	2	4	6	8	10
$P(Z = z_i)$	0,125	0,200	0,400	0,150	0,125

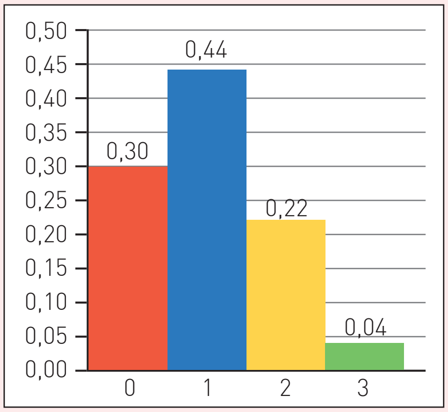
Cuaderno página 140

En resumen

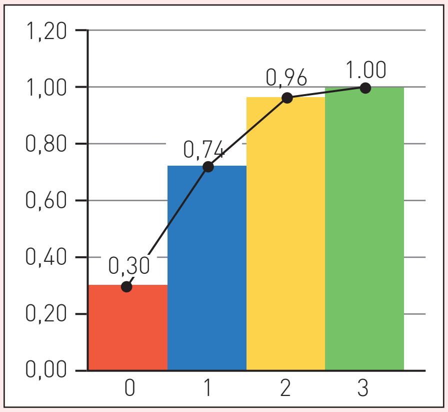
Se llama **función de distribución** de una variable aleatoria a aquella que describe la probabilidad de los valores menores o iguales a un valor de su dominio o, dicho de otra manera, su probabilidad acumulada.
Si X es la variable aleatoria, la función de distribución se puede escribir como $P(X \leq x)$, o bien, $F(X)$.

Tanto la función de probabilidad como la función de distribución se pueden graficar. Para ello, se deben ubicar en el eje de las abscisas todos los posibles valores de la variable aleatoria X y en el eje de las ordenadas la probabilidad correspondiente en cada caso.

Para construir los gráficos, se deben utilizar barras de igual ancho, sin espacio entre ellas.



Función de probabilidad



Función de distribución

En el gráfico de la función de distribución, se puede observar una secuencia creciente de barras en la que la última tiene altura igual a 1, ya que corresponde a la probabilidad acumulada. Si se traza una línea por los puntos medios de las partes superiores de las barras, se obtiene una curva llamada **ojiva**.

Y ella ¿quién es?

Florence Nightingale (1820 - 1910)

Enfermera, escritora y estadística británica, es considerada precursora de la enfermería profesional moderna y creadora de su primer modelo conceptual. Aplicó la estadística a la epidemiología y a la estadística sanitaria. Fue pionera en el uso de representaciones visuales de la información y de gráficos estadísticos. Se le atribuye el desarrollo de un tipo de gráfico circular: el diagrama de área polar o diagrama de la rosa de Nightingale, equivalente a un moderno histograma circular.

Actividades de práctica

1. Una casa de apuestas permite seleccionar tres partidos, en los cuales se debe acertar al resultado: local, empate o visita. Según el número de aciertos, se entrega un premio al apostador. Si se supone que el resultado del partido es al azar:

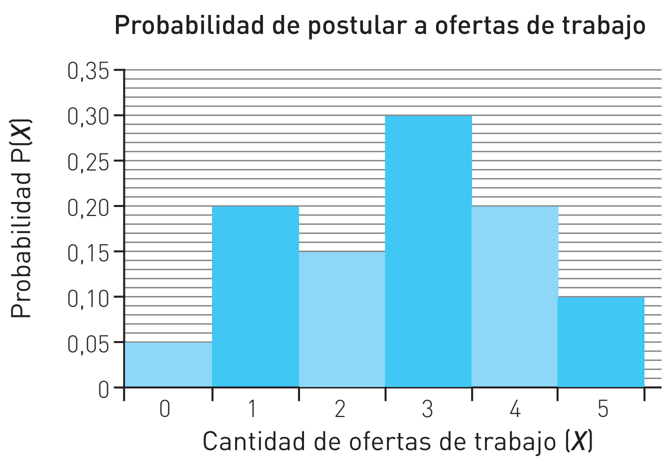
a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar al resultado de un partido cualquiera?

b. ¿Cuál es la probabilidad de acertar al resultado de solo uno de los tres partidos?, ¿y de dos?

c. Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria asociada a la cantidad de aciertos.

d. Grafica la función de probabilidad.

2. En el siguiente gráfico, se representa la probabilidad de que un trabajador postule a una cierta cantidad de trabajos.



a. ¿Cuál es la variable aleatoria X?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador postule a 3 ofertas laborales?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador no postule a ninguna oferta laboral?

3. Considera el experimento aleatorio "lanzar dos dados" y la variable aleatoria X = cantidad de números primos que aparecieron en ambos dados. Recuerda que el 1 no es un número primo.

a. Escribe todos los valores que puede tomar la variable aleatoria X.

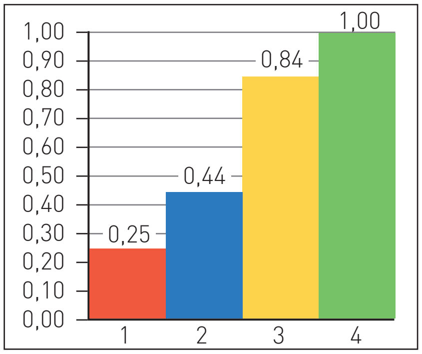
b. Calcula $P(X = 1)$, $P(X < 2)$.

c. Para cada uno de los valores que puede tomar la variable aleatoria X, calcula la probabilidad de que tome ese valor.

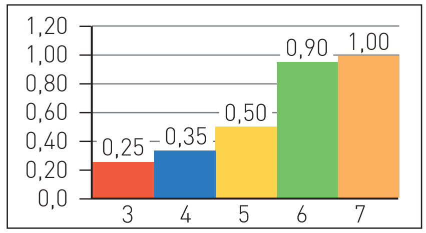
d. Grafica la función de probabilidad.

4. Para cada uno de los siguientes gráficos (de distribución de probabilidad de una variable aleatoria), determina cuál es la función de probabilidad correspondiente.

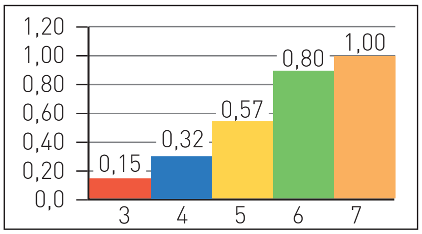
a.



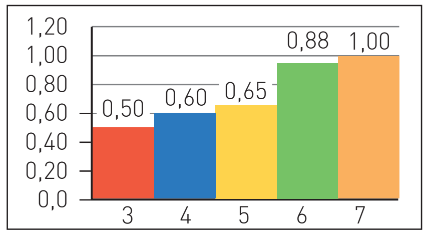
c.



b.



d.



Actividad grupal

5. El gráfico de la función de probabilidad de una variable aleatoria que toma los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5 tiene una primera columna cuya altura es 0,8. Sin dibujar el gráfico, comenta con tus compañeros:

a. ¿Cómo caracterizarían la forma del gráfico de la función de probabilidad? ¿Cómo deben ser las demás columnas? Expliquen.

b. ¿Qué forma tendrá el gráfico de la función de distribución de probabilidad? ¿Cómo será la línea trazada por los puntos medios de los extremos de las columnas? Argumenten y construyan un gráfico para ejemplificar.

¿Qué aprendí hoy?

1 Se lanzan tres monedas al aire y se registra la cantidad de sellos obtenidos.

a. Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria.

b. Grafica su función de probabilidad y su función de distribución.

2 Cantidad de cubos que se pueden extraer de una caja que contiene 3 esferas y 4 cubos al sacar 2 cuerpos de la caja.

a. Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria.

b. Grafica su función de probabilidad y su función de distribución.

Cuaderno página 137

1 En una caja se han puesto 5 fichas con los números 1, 2, 3, 4 y 5. Luego, se extraen al azar dos de ellas.

a. Determina dos posibles variables aleatorias para este experimento aleatorio y describe los eventos correspondientes a cada valor.

b. Sea la variable aleatoria X: mayor valor obtenido. Describe los casos correspondientes a cada valor de la variable aleatoria.

2 En la final de la Copa América 2015, Alexis Sánchez pateó el cuarto penal de la definición que proclamó campeón a Chile por primera vez. Antes de su tiro, cada selección (de Chile y Argentina) había ejecutado tres lanzamientos de la tanda de los primeros cinco, con un resultado parcial de 3 - 1 a favor de Chile.

a. Dado el momento anterior a este penal, ¿cuáles eran todos los posibles resultados para los dos tiros que quedaban (para cada selección)? Utiliza un diagrama de árbol para describir las posibilidades y considera que si uno de los equipos obtiene una ventaja imposible de igualar para el otro, la serie se acaba de inmediato.

b. Se define la variable aleatoria X: resultado de la serie de 5 tiros. Antes de la ejecución de Sánchez, ¿qué valores podía tomar esta variable aleatoria?

c. Determina, para los valores anteriores, todos los casos posibles que correspondan a cada uno.

3 Una empresa realiza un estudio respecto de la televisión en los hogares de una comuna. Para esto, se pide a un encuestador que en cada calle de un barrio consulte en 6 hogares si tienen o no servicio de televisión por cable. Considerando los resultados obtenidos en una calle, y suponiendo que todos responden al encuestador:

a. Define una variable aleatoria Y para esta situación.

b. ¿A qué casos corresponden los siguientes valores?

- $Y = 4$
- $Y = 1$
- $Y \leq 3$
- $Y > 4$

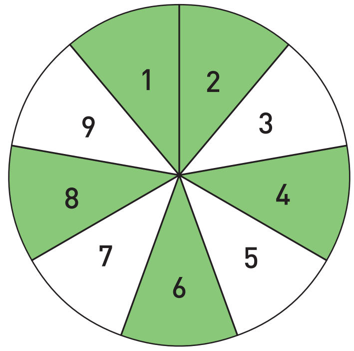
4 Paulina quiere aumentar la cantidad de cómics que tiene en su colección.
En una librería, compró una serie de cómics sin fijarse si eran de artistas nacionales o extranjeros. Si compró 8 en total y la probabilidad de comprar uno nacional o uno extranjero era la misma:

a. Define la variable aleatoria Z: cantidad de cómics nacionales que compró.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya comprado dos cómics extranjeros?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que haya comprado al menos un cómic nacional, pero que no todos sean nacionales? Escribe matemáticamente esta situación.

5 En un juego de una feria se utiliza la siguiente ruleta. La ruleta se lanza 4 veces seguidas y se registra el número obtenido y el color del casillero que salió.



a. Si se define la variable aleatoria X: cantidad de colores verdes obtenidos, ¿cuál es el valor de $P(X = 3)$?

b. Si se define la variable aleatoria Y: cantidad de números pares obtenidos, ¿cuál es el valor de $P(X < 4)$? ¿Qué representa, en palabras, este valor?

Calcula los siguientes valores:

a. $P(Y = 3)$

b. $P(X > 2)$

c. $P(X \geq 3)$

d. $P(1 \leq Y < 3)$

6 Cada set de un partido de tenis se compone de a lo más 12 juegos en los que los jugadores sirven –es decir, realizan el primer saque en ese juego– alternadamente. Gana el set quien primero logre ganar seis juegos, con al menos dos de ventaja sobre su rival. Así, si se encuentran 6 a 5 y el jugador que lleva la ventaja gana el siguiente juego, obtiene el set con marcador de 7 a 5. En cambio, si pierde, hay un empate a 6 juegos y se debe definir el set en un *tie break* (gana quien primero consigue 7 puntos con al menos dos de ventaja, sin límite de juegos).

En un partido de tenis, se enfrentan Pedro y Gerardo. Según las estadísticas, cuando Pedro sirve, gana el juego con probabilidad 0,8, mientras que cuando Gerardo sirve, gana con probabilidad 0,75. Además, en el tie break, la probabilidad de ganar de Pedro es 0,6. En el primer set comenzó sirviendo Gerardo, y luego de 8 juegos se encuentran con un marcador igualado a 4.

a. ¿Cómo se podría calcular la probabilidad de que Pedro gane el set? Comenta con tus compañeros.

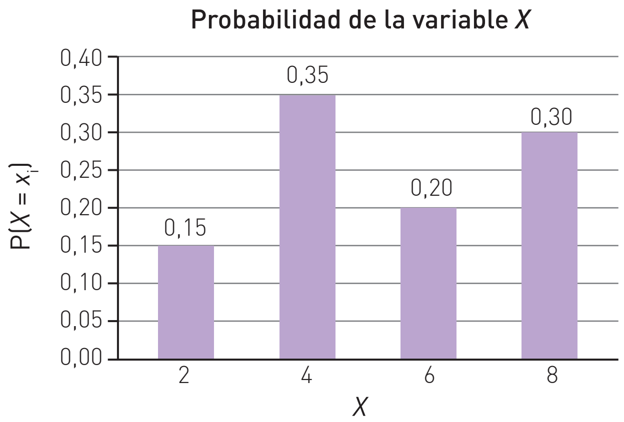
b. Se definen los siguientes valores:

- 1: Pedro gana el set sin necesidad de *tie break*.
- 2: Pedro gana el set con *tie break*.
- 3: Gerardo gana el set sin necesidad de *tie break*.
- 4: Gerardo gana el set con *tie break*.

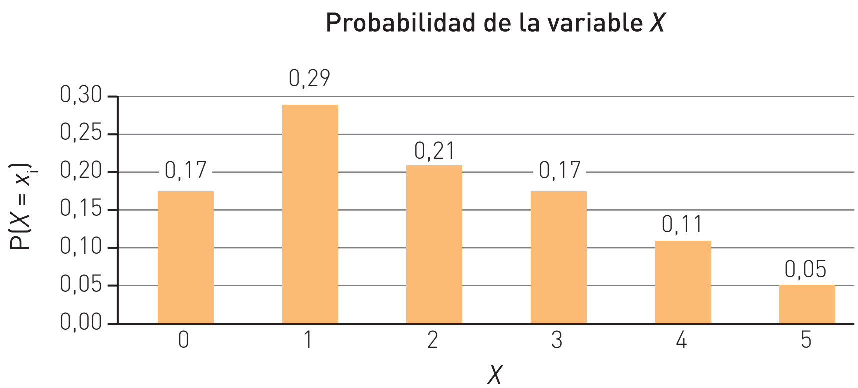
Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria X, que relaciona cada posible desarrollo del juego restante con los valores definidos anteriormente.

7 Para cada uno de los siguientes gráficos, que muestran la función de probabilidad de una variable aleatoria ***X***, construye el gráfico que muestre su función de distribución.

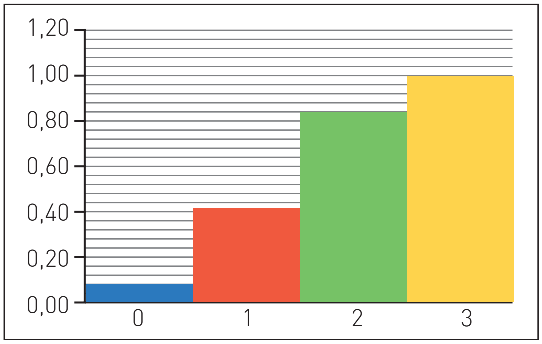
a.



b.



8 Se lanza una moneda tres veces y se define la variable aleatoria ***Z***: cantidad de caras obtenidas. La función de distribución de probabilidad de esta variable aleatoria se grafica de la siguiente manera:



a. ¿Se puede afirmar que la moneda no está cargada (es decir, que la probabilidad de obtener cara es igual a la de obtener sello)? ¿Por qué? Justifica.

b. Explica gráficamente cómo se puede construir, a partir de este gráfico, el gráfico de la función de probabilidad de la variable aleatoria *Z*.

9 Una variable aleatoria X tiene la siguiente función de probabilidad:

X	0	1	2	3	4
P(X)	0,2	n	$2n$	$4n$	$5n$

a. ¿Cuál es el valor de n? Luego, completa la tabla de la función de probabilidad.

X	0	1	2	3	4
P(X)	0,2				

b. Completa la siguiente tabla.

X	0	1	2	3	4
$P(X \leq x)$					

c. Grafica la función de probabilidad de X y su función de distribución de probabilidad.

Usa calculadora
Para explorar

Me evalúo

Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Definí variables aleatorias finitas en experimentos aleatorios.			
Determiné los valores que puede tomar la variable aleatoria finita.			
Determiné las probabilidades de una variable aleatoria aplicando correctamente la terminología $P(X = xi)$.			
Elaboré tablas y gráficos para representar la distribución de una variable aleatoria finita.			
Describí relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.			
Usé de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información.			

Cuaderno página 142

Reviso mis metas y estrategias

1 Considera las estrategias que escribiste en la página 189: ¿han sido eficaces?, ¿por qué?

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

Lección 11

Probabilidades

Exploro

¿Qué conocimientos tienes sobre probabilidades? Escribe tres ideas.

¿Qué tipo de decisiones pueden ser fundadas en alguna probabilidad? Explica.

Aprenderé a:

- Analizar el uso e interpretación de información relativa a probabilidades en los medios de comunicación.
- Aplicar las reglas de probabilidades para la toma y evaluación de decisiones en diferentes procesos.
- Interpretar diferentes formas en que se alude a las probabilidades, distinguiendo a qué se refiere cada una y extrayendo información de ellas.

Necesito recordar...

- Definición de probabilidad y regla de Laplace.
- Definición de frecuencia absoluta y relativa, y su representación en forma de fracción y porcentaje.
- Cálculo de probabilidad de sucesos compuestos, por unión o conjunción de dos o más sucesos.

¿Qué debo saber?

1. En Chile, todos los años se produce una serie de fenómenos de todo tipo, los cuales dependen de la geografía del país. En cada caso, indica si la probabilidad de ocurrencia del suceso es "alta" o "baja", considerando que $\frac{1}{2}$ es un valor intermedio entre ambas.
   a. Que nieve en Coihaique en el mes de julio.
   b. Que llueva en Copiapó, durante enero.
   c. Que tiemble en algún lugar de Chile esta semana.
   d. Que tiemble hoy en tu región.
2. Carolina viaja en sus vacaciones a una gran ciudad en el extranjero. Una vez allí, se encuentra con un compañero de trabajo de hace muchos años. ¿Dirías que se trata de algo poco probable lo que le ocurre a Carolina?, ¿por qué?

En Chile, los juegos de azar son administrados por Lotería de Concepción y Polla Chilena de Beneficencia, por lo que no está permitido a otras empresas o particulares realizar apuestas. Pese a esto, en el último tiempo han proliferado en nuestro país distintos tipos de máquinas que, aparentando ser "de habilidad", se comportan más como juegos de azar. En un juego de habilidad existe cierta forma de jugar que, cuando es conocida y bien ejecutada por el jugador, lo llevará a ganar. En un juego de azar esto debe ser imposible.

En la mayoría de los juegos de azar en Chile –a excepción de los pronósticos deportivos–, se debe acertar a los números que serán extraídos de una tómbola. En algunos casos, los boletos se pueden comprar ya impresos, o bien se marca una cartilla con los números a gusto del comprador. Muchas personas buscan estrategias para ganar, basándose en aspectos personales –como fechas significativas– o en el análisis de los números que han salido en sorteos anteriores. Aunque muchos lo intentan, no existen estrategias que puedan probar su efectividad de manera concluyente, y que los convierta en millonarios.

3. En un juego de azar, que consiste en acertar a 5 números extraídos desde una tómbola con 30 números, un apostador escoge siempre: 1, 2, 3, 4 y 5.
   a. ¿Tiene menos probabilidades de ganar que otros apostadores?, ¿por qué?
   b. La estrategia de este apostador, ¿crees que es utilizada por muchas otras personas?, ¿por qué?
4. Se sabe que en los últimos diez sorteos del concurso anterior ha salido el 4 entre los números extraídos.
   a. ¿Podrías afirmar que se trata de algo "extraño" en el sorteo? Justifica.
   b. ¿Recomendarías a un apostador escoger el 4 entre los números que seleccione para el próximo sorteo? Discute con tus compañeros.

Me evalúo Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Interpreté el concepto de probabilidad y lo apliqué en situaciones cotidianas.			
Utilicé probabilidades para describir el comportamiento azaroso.			
Apliqué las reglas de las probabilidades en el contexto de la resolución de problemas.			
Representé y ejemplifiqué utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.			
Usé procedimientos matemáticos para confirmar la veracidad de una información y/o para complementarla.			

Cuaderno página 144

Tema 1: ¿Cómo se aborda la probabilidad en los medios de comunicación?

¿Qué aprenderé?

A analizar la información, relativa a probabilidades, presentada en distintos medios de comunicación.

¿Para qué?

Para interpretar de manera correcta tal información, en el sentido de que un evento probable no es seguro, por ejemplo.

Actividad en pareja

Taller

¿Se puede asegurar el resultado de un encuentro deportivo antes de que se juegue? Aunque a veces es tentador creer que sí, hay factores que pueden provocar un resultado inesperado. Tampoco se puede decir que tal resultado dependa solo del azar, pero sí existen factores que se pueden considerar azarosos y que inciden en el resultado.

En el tenis, por ejemplo, cuando se produce un enfrentamiento por Copa Davis se juegan 5 partidos en tres días. Ambos países presentan a sus jugadores, según su *ranking*. El país anfitrión siempre escoge todas las condiciones: la superficie en la que se jugarán –césped, arcilla, cemento, superficie sintética bajo techo–, la ubicación geográfica (lo que agrega factores como la temperatura ambiental, la humedad o la altitud del lugar), incluso la hora de cada partido. Con esta información, los comentaristas deportivos pueden especular acerca de qué país ganará según el *ranking* de los jugadores, el registro de triunfos y derrotas en la superficie escogida o las experiencias previas de partidos jugados en el mismo lugar.

1 Imaginen que deben realizar un reporte periodístico respecto de un partido de Copa Davis entre dos países. Inventen nombres para identificar a cada jugador.

- **a.** ¿Qué aspectos creen que es importante averiguar respecto de los jugadores que se enfrentan para pronosticar un resultado del juego? Describan al menos 4 aspectos, y expliciten qué información les parecería fundamental conocer para describir sus características.
- **b.** Inventen los datos relativos a los puntos anteriores. A partir de ello, redacten un texto breve en el que se justifique por qué un jugador tiene mayor probabilidad de vencer que el otro, utilizando los datos. Creen un titular para su texto.
- **c.** Si el partido se jugara en el lugar en que viven, ¿cuáles serían las ventajas y desventajas para los jugadores chilenos? Expliquen.
- **d.** Si ustedes fueran los encargados de decidir, ¿cuál sería la superficie en la que se jugaría el partido?, ¿a qué hora lo programarían? Justifiquen.

¿Cómo trabajé el taller?	
	Individualmente ○ ○ ○
	Grupalmente ○ ○ ○

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	
	Individualmente ○ ○ ○
	Grupalmente ○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Como se ha mencionado, el tiempo atmosférico puede incidir en el desarrollo de un partido. Un informe meteorológico indica, a tres días del partido, que se espera una temperatura cercana a los 30 °C, con muy poco viento y una probabilidad de lluvia del 3 %.

   a. ¿Es posible que el día del partido se registre una temperatura de 25 °C y que llueva? Justifica.

   b. ¿Cómo se puede interpretar la probabilidad de lluvia? ¿En qué información te podrías basar?

   c. ¿Es posible predecir el tiempo atmosférico del día del partido un mes antes de que se juegue?, ¿se pueden asignar probabilidades?, ¿de qué manera? Comenta con tus compañeros.

2. Supón que el próximo enfrentamiento por Copa Davis se juega en Chile.

   a. ¿Qué aspectos crees que se deberían cuidar en la entrega de información para hacerla de manera seria? Explica.

   b. Si uno de los partidos se jugara en la capital de tu región, ¿qué aspectos serían relevantes para realizar el partido?

3. Respecto de la probabilidad de lluvia, existen múltiples factores que inciden en que un día determinado llueva o no.

   a. ¿Existen factores climáticos que hagan imposible que llueva?, ¿cuáles?

   b. ¿Existen factores que hagan imposible el triunfo de un jugador sobre otro? ¿Qué diferencias observas con los aspectos analizados respecto del clima?

4. Lee el siguiente artículo y luego responde.

La paradoja de los cuatro hijos

Asumiendo que la mitad de los nacimientos son de varones y la mitad de mujeres, el sentido común nos impulsa a creer que en un caso como este la familia tendrá dos hijos y dos hijas. Pero puede demostrarse matemáticamente que tal cosa es bastante improbable. Es la paradoja de los cuatro hijos. Nuestro cerebro tiende a jugarnos malas pasadas cuando asume resultados basándose en lo que la gente llama «sentido común». Cuando enfrentamos los resultados obtenidos por este método intuitivo con los que arrojan los fríos (pero efectivos) cálculos matemáticos, vemos con sorpresa cuán equivocados estábamos. Una de las paradojas que resulta más sencilla de demostrar es la que Martin Gardner -un divulgador científico y filósofo de la ciencia estadounidense- llama «paradoja de los cuatro hijos». Gardner dice que si sabemos (o nos cuentan) que un matrimonio tiene cuatro hijos, tendemos a pensar que existe una alta probabilidad de que dos de ellos serán niños y dos niñas. Sin embargo, y a pesar de que estadísticamente prácticamente la mitad exacta de los nacimientos son de varones y la mitad de mujeres, puede demostrarse matemáticamente que nuestra intuición falla miserablemente. Las matemáticas demuestran que solo el 37,5 % de las familias con cuatro hijos tendrá dos de cada sexo, y que -en realidad- es mucho más probable tener 3 hijos de un sexo y uno del otro que cualquiera de las otras posibilidades por separado.

WWW.NEOTEOABC.es

a. ¿En qué consiste la paradoja de los cuatro hijos?

____

____

b. A partir del texto, ¿se puede obtener que la probabilidad de que tres de cuatro hijos sean varones es 0,375? Justifica.

____

____

c. ¿Por qué, para los matrimonios que tienen 4 hijos, es más probable tener tres hijos del mismo sexo? Justifica.

- Las posibles permutaciones de cuatro hijos, considerando hombre H y mujer M, son {HHHH, HHHM, HHMH, HHMM, HMHH, HMHM, HMMH, HMMM, MHHH, MHHM, MHMH, MHMM, MMHH, MMHM, MMMH, MMMM}

Por lo tanto, ______________________________

____

____

5. Lee la información y luego responde las preguntas.

- Existe un 35 % de probabilidad de que se produzcan chubascos el día de hoy por la tarde y un 20 % durante la noche.
- El servicio meteorológico de una ciudad indicó que la temperatura máxima pronosticada para hoy es 15 °C y la temperatura mínima es –1 °C.
- La rapidez de los vientos provenientes desde la costa hacia la cordillera de los Andes variará entre 10 a 20 kilómetros por hora.
- La humedad ambiental variará entre un 50 % y un 72 %, existiendo una probabilidad de chubascos de entre un 20 % y un 35 %. La mayor probabilidad de chubascos será durante la tarde, disminuyendo durante la noche a un 20 %.

a. ¿Es mayor la probabilidad de que llueva que la de que no llueva?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya chubascos durante la tarde?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya chubascos durante la noche?

Actividad grupal

6. Seleccionen, en algún medio de comunicación, una noticia que incluya información que involucre probabilidades.

a. Las probabilidades presentadas, ¿en qué están basadas? Expliquen.

b. ¿Les parece correcta la manera de presentar la información? ¿Por qué? Expliquen.

En resumen

Cuando se conoce completamente las reglas del comportamiento de un experimento aleatorio, es posible determinar su probabilidad teórica. Sin embargo, en muchas ocasiones esto no es posible y se utiliza la información respecto de cómo han sido los resultados anteriores de un experimento con las mismas o similares condiciones. A esto se le llama **probabilidad empírica** o frecuencial.

En los medios de comunicación no se suele explicitar esta diferencia, por lo que la interpretación respecto de lo que buscan decirnos debe considerar estas diferencias para realizar un análisis correcto.

Actividades de práctica

1. Junto con un compañero o compañera, investiguen y comenten respecto de la forma en que se determinan los valores correspondientes a las siguientes informaciones:

a. Esperanza de vida al nacer.

b. Probabilidad de lluvia para el día siguiente.

c. Estimación del porcentaje de crecimiento económico para el año siguiente.

d. Respecto de los valores anteriores, ¿qué relación se puede establecer con probabilidades? Redacten en cada caso una frase que presente la información.

2. Una empresa de estudios de opinión realiza una encuesta respecto de los hábitos y costumbres de los chilenos en diversos aspectos, uno de los cuales es la honestidad en el comercio. Para ello, se hicieron dos preguntas: una a cada mitad de los encuestados.

- A: ¿Siempre paga todos los artículos que lleva en un supermercado?
- B: ¿Ha llevado artículos sin pagar en el supermercado?

Observa los resultados:

	Sí	No
Pregunta A	62 %	38 %
Pregunta B	28 %	72 %

a. ¿En cuál de los dos casos crees que habrá más gente que mentirá en su respuesta?, ¿por qué? Comenta con tus compañeros.

b. ¿Podrías estimar la probabilidad de que, al seleccionar a una persona al azar de la muestra, esta haya robado alguna vez un artículo del supermercado? Discute con tus compañeros respecto de la forma de hacerlo.

3. De acuerdo a la actividad anterior, investiga:

a. ¿De qué otras maneras suelen hacerse este tipo de encuestas? ¿Qué ventajas tienen estas otras formas? Explica.

b. ¿Qué aspectos en la recolección de datos con las personas debe considerar una encuesta para obtener resultados confiables? ¿Cuáles te parecen más importantes a ti? Explica y comparte con tus compañeros.

4. Reúnete con 3 compañeros y busquen, en diarios, revistas o medios digitales, artículos, noticias e informaciones que estén relacionadas con probabilidades.

a. ¿A qué tema se refiere la información presentada? Escojan, por ejemplo, alguna de las siguientes categorías:

- probabilidad en pronósticos de tiempo;
- probabilidad en el desarrollo económico;
- probabilidad de contraer alguna enfermedad;
- probabilidades electorales;
- probabilidad en expectativas de sobrevivencia.

b. ¿Cuál es, específicamente, la información de probabilidad presentada?

c. ¿La probabilidad presentada es teórica o se obtuvo a partir de la frecuencia relativa de un resultado?

d. ¿Cómo se presenta la información? (Por ejemplo, a través de un gráfico, numéricamente, mediante una frase del tipo "3 de cada 5 personas", etc.) ¿De qué otras formas se podría presentar? Muestren algunos ejemplos.

e. ¿Qué conclusiones se presentan a partir de la información dada?

f. ¿Existen algunas inexactitudes o errores en la información presentada? Expliquen.

g. ¿Se observan algunas manipulaciones de la información?, ¿cuáles creen que son sus motivos? Comenten.

Presenten sus conclusiones al curso y discutan los puntos anteriores con sus compañeros y compañeras.

¿Qué aprendí hoy?

Antes del desarrollo de una elección presidencial, tres empresas de estudios de opinión realizan encuestas para medir las preferencias de los electores respecto tres de los candidatos. Observa:

	Candidato			No sabe/no responde
	A	B	C	
Empresa 1: ¿Por cuál de los siguientes candidatos votaría?	41 %	32 %	20 %	7 %
Empresa 2: ¿Cuál de los siguientes candidatos cree que ganará la elección?	52 %	27 %	15 %	6 %
Empresa 3: ¿Cuál de los siguientes candidatos le gustaría que gane la elección?	44 %	31 %	22 %	3 %

a. ¿Qué diferencias observas entre los resultados obtenidos por las diferentes empresas? Explica a qué pueden deberse.

b. ¿Cuál de las empresas presenta resultados que permiten determinar mejor la probabilidad de ganar de cada candidato?, ¿por qué?

c. ¿Qué probabilidad le asignarías a cada candidato de ganar la elección, considerando los resultados de las tres encuestas? Explica.

Cuaderno página 145

Tema 2: ¿Cómo se aplica la probabilidad en la toma de decisiones?

¿Qué aprenderé?

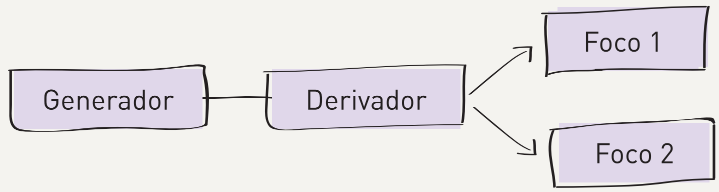
A analizar el uso de información entregada usando probabilidades en diferentes hechos para la posterior toma de decisiones.

¿Para qué?

Para explicar cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas, así como decisiones basadas en situaciones subjetivas.

Taller

Para la iluminación de un gimnasio se ha optado por diferenciar los circuitos que llegan hasta los focos desde cada generador. El esquema adoptado ha sido el siguiente:



La corriente parte desde el generador hasta el derivador, que funciona aleatoriamente. Cuando un foco no funciona, implica que la torre que los contiene quedará apagada. Mario lleva un registro de las fallas y estima que:

- La probabilidad de que envíe la corriente hacia el Foco 1 es igual a 0,54.
- La probabilidad de que el Foco 1 falle cuando le llega la corriente es igual a 0,02, mientras que la del Foco 2 es 0,08.

1 ¿Cuál es la probabilidad de que la torre quede apagada?

2 Si la iluminación del gimnasio se compone de 4 torres iguales, ¿cuál es la probabilidad de que prendan las 4?

3 ¿Cuál es la probabilidad de que el gimnasio quede completamente a oscuras?

4 ¿Es conveniente este diseño de las torres? Expliquen por qué.

¿Cómo trabajé el taller?
Individualmente
Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?
Individualmente
Grupalmente

Actividades de proceso

1. Pablo es un competidor de judo que va a disputar una clasificatoria regional para un campeonato nacional. Para esto deberá enfrentarse en tres peleas contra dos luchadores, A y B, alternadamente. Clasificará si consigue ganar al menos dos peleas consecutivas. Pablo puede escoger a qué rival enfrentará primero.

a. Dibuja dos diagramas que representen las posibles secuencias de victorias y derrotas que puede obtener Pablo. Indica los casos en los que clasifica.

b. Si llamamos p y q a la probabilidad de ganar a los luchadores A y B, respectivamente, completa la tabla con las posibilidades de clasificar.

	Comenzando	
	contra A	contra B
Ganar las dos primeras peleas.	$P = p \cdot q$	
Perder la primera y ganar las otras dos.	$P = (1 - p) \cdot q \cdot p$	

Sumando las probabilidades en cada caso –ya que debe ocurrir una cosa o la otra– tenemos que:

Comenzando contra A: $P = pq + (1 - p) \cdot q \cdot p = 2pq - qp^2 = pq(2 - p)$

Comenzando contra B: $P =$ ______________________

c. Si la probabilidad de ganar a cualquiera de los dos rivales fuera la misma, ¿cuál es la probabilidad de que Pablo clasifique? Explica.

d. Si se sabe que el rival A es más difícil de vencer que el B, ¿con cuál le conviene a Pablo comenzar la clasificatoria? Justifica.

____

e. ¿Existen valores de p y q, con $p < q$, para los cuales la respuesta anterior cambie? Explica.

____

En resumen

Se pueden utilizar las probabilidades para tomar mejores decisiones, determinando la probabilidad de que ocurra cada suceso que nos interesa. Para esto, se aplica el principio multiplicativo y demás reglas de probabilidades que se conocen para dos o más sucesos independientes.

Actividades de práctica

1. Gabriel vive en una ciudad en que llueve el 35 % de los días del año. El año pasado sacó a pasear a su perro siempre que no hubo lluvia. Además, el 5 % del total de los días del año paseó a su perro mientras llovía.

   a. ¿Qué porcentaje de los días que llueve Gabriel saca a pasear a su perro?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un día cualquiera y que en este Gabriel haya sacado a pasear a su perro?

2. Un jugador de fútbol, cercano a su retiro, ha sido contratado por un club. Debido a su edad y sus frecuentes lesiones, nunca juega los 90 minutos, sino que comienza en la banca e ingresa según el resultado del partido hasta ese minuto. Además, un factor importante para decidir si ingresa o no es si está lloviendo durante el partido, ya que se arriesga más a que se produzca una lesión.

   En condiciones normales, la probabilidad de que el técnico lo haga ingresar a la cancha es igual a 0,7, mientras que si llueve, se reduce a 0,4. De acuerdo con los registros del kinesiólogo del equipo, en un juego normal la probabilidad de que sufra una lesión es de 0,3, mientras que con lluvia aumenta a 0,5. Se considera imposible, en la práctica, que se lesione si no juega.

   Si se sabe que para el día del partido, la probabilidad de lluvia se estima en 45 %, ¿cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

   a. Que el jugador ingrese a la cancha.
   b. Que el jugador termine el partido con una lesión.
   c. Que no llueva pero termine el partido con el jugador lesionado.

3. Los accidentes en las fábricas generalmente tienen su origen en fallas humanas o en las condiciones inseguras del lugar de trabajo. En algunos casos, también incide el horario en que se realice el trabajo. En cierta fábrica se produjeron, el año pasado, 30 accidentes, cuyos porcentajes por combinación de factores se expresan en el siguiente cuadro.

Turno	Condiciones inseguras	Fallas humanas
Matutino	5 %	32 %
Vespertino	6 %	25 %
Nocturno	2 %	30 %

   Se elige aleatoriamente un reporte de accidente de entre los 30 reportes. Calcula la probabilidad de que el accidente:

   a. Haya ocurrido en el turno de noche.
   b. Se deba a una falla humana.
   c. Se haya producido durante los turnos vespertino o nocturno.

4. El uso de sustancias ilícitas para estimular el desarrollo muscular y el rendimiento físico en las competencias deportivas se ha convertido en un grave problema en el último tiempo en las competencias de atletismo. Esto ha obligado a modificar las normas de los controles antidopaje para hacerlas más exhaustivas y permanentes, en reemplazo de los exámenes aleatorios que se realizaban hasta hace un tiempo. Hoy es necesario examinar a prácticamente la totalidad de los atletas que han participado en una competencia.

De los ocho participantes de una competencia de tiro con arco, la organización del evento ha decidido escoger a tres de ellos para un examen antidopaje, por sorteo. De los ocho, cuatro han utilizado en el último tiempo sustancias ilícitas.

a. Representa en un diagrama las posibilidades del sorteo, considerando como resultados "positivo" o "negativo" según hayan consumido o no alguna droga. Considera que los deportistas son elegidos uno después de otro.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no se registre ningún dopaje positivo en el control?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que se registre al menos un dopaje positivo?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres participantes registren dopaje positivo?

5. Supón que un arquero ha atajado 30 tiros, de un total de 90 penales, y el resto han sido goles.

a. ¿Cuál es la frecuencia relativa de la variable aleatoria X = cantidad de goles en lanzamientos de penales?

b. ¿Cuál es una estimación, a partir de lo observado, de la probabilidad de que el próximo penal sea atajado por el arquero?

c. Si se realizan 9 lanzamientos de penal, ¿necesariamente el arquero atajará 3 de esos tiros?, ¿por qué?

¿Qué aprendí hoy?

Para preparar una posible definición a penales, los jugadores de un equipo de fútbol deciden hacer una competencia. Cada uno pateará un máximo de tres penales, de modo que al perder uno de ellos, pierde la posibilidad de lanzar los siguientes. Se estima que la probabilidad de anotar un penal, para un jugador específico, es igual a 0,75.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no anote ningún penal?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que anote al menos un penal?

c. ¿Cuál es la cantidad más probable de penales que puede anotar el jugador?

d. Si la probabilidad de anotar un penal para otro jugador es igual a 0,6, ¿cambia el valor anterior? Explica.

Cuaderno página 147

Tema 3: ¿Cómo puede interpretarse la probabilidad?

¿Qué aprenderé?
A interpretar información probabilística a partir de su origen

¿Para qué?
Para reconocer claramente las probabilidades, independiente de las intenciones de las personas.

Taller

Ernesto proyecta adornar el camino interior de un extenso parque municipal para lo que ha encargado una gran cantidad de pequeñas piedras negras y blancas.

La alcaldesa Patricia le comentó a Ernesto que espera que sean más las piedras claras, ya que las prefiere. Cuando llega su pedido, las traen mezcladas en el camión. Pedrito observa curioso la carga del camión desde arriba, y le parece que hay más blancas que negras. A Ernesto le gustaría que fuera así, pero no puede afirmarlo.

1. ¿Qué experimento podría hacer Ernesto para estimar la probabilidad de que una piedra cualquiera de la carga sea blanca o negra? Planteen distintas posibilidades y discutan la que les parezca más efectiva.
2. A Pedrito le parece que hay más piedras blancas que negras: ¿a partir de qué observación pudo concluir eso?, ¿es razonable su conclusión?, ¿por qué?
3. ¿Qué información sería necesaria para conocer el valor de esta probabilidad en forma exacta?, ¿es factible tener esta información? Expliquen
4. ¿Cómo influyen los deseos de Patricia respecto de la probabilidad tratada?

¿Cómo trabajé el taller?
Individualmente
Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?
Individualmente
Grupalmente

Actividades de proceso

1. En el básquetbol, un acierto a la canasta tiene distintos puntajes: 2 puntos si el tiro es realizado desde la zona de dobles (a menos de 6,75 metros del aro), 3 puntos desde fuera de esta zona, y un punto si es de tiro libre. Cuando se comete una infracción a un jugador que está lanzando, se cobran dos o tres tiros libres según la zona donde estaba.

   Si quedan pocos segundos del partido y un equipo aventaja a otro por un punto, por ejemplo, se produce un momento de gran tensión. Como son dos tiros consecutivos, que lanza el mismo jugador, se puede conjeturar respecto de lo que ocurrirá. Supón la siguiente situación: dos segundos antes del fin del partido, hay una infracción a favor del equipo que está un punto debajo de su rival. El jugador falla su primer tiro y, antes de lanzar el otro, los relatores dan los siguientes datos:

   - De las personas que siguen la transmisión por televisión y las redes sociales, 2200 creen que fallará el lanzamiento y 500 creen que lo acertará.
   - El jugador ha perdido el 5 % de los lanzamientos que ha realizado en los últimos dos minutos de partido.
   - De acuerdo a un estudio profesional, un jugador que falla el primer lanzamiento en una situación difícil disminuye en un 60 % sus probabilidades de anotar el segundo lanzamiento.

   a. ¿A qué apostarías tú: a que acertará o a que fallará? Explica.

   ____

   b. ¿Qué aspecto te parece más relevante al momento de estimar la probabilidad de que el jugador acierte el tiro?, ¿cuál menos?, ¿por qué?

   ____

   c. ¿Te parece que hay alguna información que no determina la probabilidad de acertar el lanzamiento?, ¿cuál?, ¿por qué?

   ____

   d. ¿Cómo podría asignarse un valor a la probabilidad de que anote el lanzamiento? Explica.

   ____

En resumen

Existen tres tipos de interpretaciones de la probabilidad de un suceso:

- **Probabilidad clásica:** corresponde al cociente entre la cantidad de sucesos favorables y la cantidad total de sucesos posibles de un experimento aleatorio equiprobable.
- **Probabilidad frecuencial:** corresponde a la frecuencia relativa de un suceso obtenida al realizar un gran número de veces un experimento aleatorio.
- **Probabilidad subjetiva:** corresponde al valor que un observador asigna bajo su propio juicio a la probabilidad de un suceso, de acuerdo al conocimiento o experiencia que posea acerca del suceso, .

Actividades de práctica

Ayuda

Como ya hemos visto, para determinar probabilidades es posible basarse en aspectos técnicos del experimento o utilizar la frecuencia relativa de los resultados. En este caso, se debe ser cuidadoso con el tipo de datos que se seleccionen, pues pueden estar dejándose de lado otros aspectos que influyen en el resultado, o bien, pueden estar combinados de manera inadecuada.

La percepción personal de lo que pueda ocurrir o no en un experimento, o la masividad de quienes sostengan una opinión u otra no puede, en ningún caso, tomarse como una información válida para estimar la probabilidad de un suceso.

1. Identifica el tipo de probabilidad asociada a cada situación. Justifica.

   a. Estudios científicos indican que en 20 años más será menos probable que las personas fumen.

   b. De acuerdo a la cantidad de accidentes en carreteras urbanas que hubo en septiembre del año 2017, en septiembre del 2018 se estima que la probabilidad de tener un accidente es de 7 %.

   c. Si hoy está nublado, entonces es muy probable que mañana llueva durante todo el día.

   d. Es muy probable que mañana haya mucho tráfico, porque comienzan las clases en todos los colegios y universidades.

2. Determina, en cada caso, si las siguientes informaciones permiten determinar o estimar las probabilidades que se indican. En caso de que sea posible, determina si es en forma frecuencial o teórica.

   a. En un torneo de vóleibol nacional han clasificado 8 equipos para la fase final, de los cuales dos son de Talca. Las parejas de equipos que disputarán esta fase se determinará por sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos equipos talquinos deban jugar entre sí en esta fase?

   b. La probabilidad de que un hombre casado vea cierto programa de televisión es 0,4 y la probabilidad de que una mujer casada vea el mismo programa es 0,5. La probabilidad de que un hombre vea el programa, dado que su esposa lo hace, es 0,7. ¿Cuál es la probabilidad de que un matrimonio vea el programa?

   c. Se ha encuestado a 2500 personas en todo el país respecto de sus expectativas sobre el clima, y el 80 % de ellas cree que el invierno será lluvioso. ¿Cuál es la probabilidad de tener un aumento en las precipitaciones normales para un año?

   d. Se enfrentan dos equipos en un partido decisivo. El equipo local ha perdido sus últimos 4 partidos, mientras que el visitante ha ganado 3 y empatado 1. ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado posible (triunfo del local, empate o triunfo del visitante)?

   e. El 15 % de los alumnos de un colegio prefiere las bebidas bajas en calorías. De los que las prefieren, el 70 % son mujeres, mientras que de los que no las prefieren, el 80 % son hombres. Se selecciona una persona al azar de este colegio para un estudio. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer que prefiere las bebidas bajas en calorías?

   f. En un juego de tiro al blanco, un jugador, acierta al blanco 12 de 15 lanzamientos. ¿Cuál es la probabilidad de que falle en dos lanzamientos seguidos?

3.

Durante tres años consecutivos, algunas empresas de estudios sociales han realizado encuestas y análisis de datos para evaluar los niveles de delincuencia en una región del país. Para esto, han utilizado diferentes metodologías:

- **Empresa 1:** consultó a un grupo de personas "¿Ha sido víctima usted o sus cercanos de un delito durante el último año?"
- **Empresa 2:** consultó a un grupo de personas "¿Cree que ha aumentado la delincuencia durante el último año?"
- **Empresa 3:** registró la cantidad de robos y asaltos denunciados en el sistema judicial durante el último año.
- **Empresa 4:** analizó la cantidad de robos y asaltos denunciados en el sistema judicial y en fundaciones, corporaciones de asistencia y otras instituciones ligadas al apoyo a víctimas.

Considerando la información anterior, comenta con tus compañeros y respondan las siguientes preguntas:

a. ¿Qué información permitiría al gobierno planificar de mejor manera estrategias de seguridad pública?, ¿cómo relacionarían esa información con probabilidades?

b. ¿Qué información le sería más útil a una empresa de venta de alarmas para planificar una estrategia de ventas para el próximo año?, ¿cómo relacionarían esa información con probabilidades?

c. ¿Qué información le sería más útil a un estudio de abogados para planificar en qué áreas centrarse el próximo año?, ¿cómo relacionarías esa información con probabilidades?

d. ¿Qué información permite de mejor manera estimar la probabilidad de una persona de sufrir un robo el próximo año?, ¿qué información distorsiona más la estimación de esta probabilidad?

¿Qué aprendí hoy?

Jorge debe rendir una prueba de selección múltiple de 30 ítems, cada uno con 5 alternativas. Para aprobar, debe obtener un mínimo de 18 respuestas correctas.

a. ¿De qué forma se podría estimar la probabilidad de que obtenga la nota que necesita?

b. ¿Cuál es la probabilidad teórica de que logre esta nota?, ¿qué suposición habría que hacer para que esta probabilidad tenga validez?

c. ¿Qué aspectos podrían influir en la percepción de las posibilidades de Jorge?, ¿tienen sentido? Señala uno que sí influya de manera clara y otro que no.

Cuaderno página 149

Un grupo de estudiantes del sur de Chile, interesados por la astronomía, está organizando un encuentro de observaciones astronómicas en la Región del Biobío. Ellos necesitan por lo menos de 3 días seguidos de cielo despejado. Para esto han investigado los datos de meteorología del lugar de los últimos 20 años entre los meses de octubre y marzo, y obtuvieron lo siguiente:

Mes	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar
Probabilidad día nublado (%)	29	27	15	16	13	23

¿Cuál será el mes más apropiado para realizar el encuentro?

PASO 1 La tabla solo muestra la probabilidad de que el día esté nublado, por lo tanto, para resolver el problema se requiere calcular la probabilidad de un día despejado. Si se considera que cuando no está nublado, necesariamente está despejado, entonces se puede calcular como la diferencia entre el 100 % y la probabilidad que ya se conoce:

Mes	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar
Probabilidad día despejado (%)	71	73	85	84	87	77

PASO 2 Como se desea determinar, para realizar el encuentro, la probabilidad de tener tres días despejados seguidos en cada mes, se calculó de la siguiente manera:

Octubre: $0,71 \cdot 0,71 \cdot 0,71 \approx 0,36$
Noviembre: $0,73 \cdot 0,73 \cdot 0,73 \approx 0,39$
Diciembre: $0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 \approx 0,61$
Enero: $0,84 \cdot 0,84 \cdot 0,84 \approx 0,59$
Febrero: $0,87 \cdot 0,87 \cdot 0,87 \approx 0,66$
Marzo: $0,77 \cdot 0,77 \cdot 0,77 \approx 0,46$

Por lo tanto, el mes más apropiado para realizar el encuentro de observaciones astronómicas es febrero, ya que la probabilidad de que se presenten tres días seguidos despejados es de un 66 %.

Un centro meteorológico utiliza los siguientes modelos para realizar los pronósticos del tiempo:

- Si la temperatura ambiental es inferior a los 8 °C, la probabilidad de chubascos es de un 10 %.
- Si la temperatura ambiental está entre los 8 °C y los 18 °C, la probabilidad de chubascos es de un 40 %.
- Si la temperatura ambiental está sobre los 18 °C, la probabilidad de chubascos se reduce a un 5 %.

1 Si un comerciante quiere vender paraguas, ¿cuál es la temperatura ambiental que le resulta más conveniente?

2 Si el pronóstico dice que el lunes la temperatura ambiental será de 20 °C; el martes, de 10 °C y el miércoles, de 5 °C, ¿en cuál de ellos será más apropiado vestir ropa para lluvia?

Cuaderno página 151

1 En el torneo Preolímpico de Fútbol Sub-23, clasificatorio para los Juegos Olímpicos de Sidney 2000, Chile logró su clasificación a la ronda final del torneo de una manera muy particular. En su último partido de la fase previa cayó por 1 - 5 frente al equipo de Colombia, que con esto llegó a 7 puntos y diferencia de gol +6, desplazando a la selección de Chile del segundo lugar con los mismos 7 puntos y diferencia 0. Entonces, la única posibilidad para Chile radicaba en que Brasil (el equipo local) derrotara a Colombia en el último partido por 7 o más goles de diferencia (Brasil ya había empatado 1 - 1 con Chile).

La historia tuvo un final feliz para Chile, ya que Brasil derrotó a Colombia por 9 - 0, dando a Chile los pasajes a la ronda final, en la que logró clasificar a la cita olímpica –donde alcanzó la medalla de bronce–. La prensa de la época habló de "Insólita clasificación" y de "Resultado imposible".

a. ¿De qué manera se justifican los titulares de la prensa? Explica y comenta con tus compañeros.

b. ¿Se trata de un resultado "improbable" el que se dio entre Brasil y Colombia?, ¿por qué? ¿De qué manera se interpreta la probabilidad en este caso?

c. Redacten dos titulares posibles para esta noticia. Discutan si se deben interpretar de manera literal o no.

2 El proceso para detectar una posible enfermedad en una persona mediante un examen de sangre es complejo, ya que involucra diferentes etapas. Cuando se trata de una enfermedad grave, si el resultado sale positivo implica la toma de una contramuestra –es decir, un nuevo examen– que confirme el primero.

En este contexto, se llama "falso positivo" a un resultado positivo en el examen obtenido por un paciente que realmente no presenta la enfermedad, mientras que se denomina "falso negativo" al caso opuesto, es decir, cuando alguien presenta la enfermedad pero esta no es detectada en el examen.

Para un examen específico, la probabilidad de un falso positivo es 0,005, mientras que la de un falso negativo es 0,0002. En caso de que un paciente tenga un resultado positivo en el primer examen, se realiza un segundo que confirma o desmiente el resultado, mientras que si es negativo en el primer examen, simplemente se informa.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que a un paciente se le informe que tiene la enfermedad?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que sigue el procedimiento sea un falso negativo?

3 En la historia del deporte chileno existen otros eventos que han sido calificados por la prensa como "Imposibles". Por ejemplo:

- El 22 de Agosto de 2004, el triunfo del tenista Nicolás Massú frente al estadounidense Mardy Fish dio a Chile la segunda medalla de oro olímpica en su historia (la primera había sido obtenida el día anterior por el propio Nicolás Massú junto a Fernando González en el tenis en parejas).
- El 24 de Marzo de 1985, el delantero chileno Jorge Aravena marcó, en un partido clasificatorio al Campeonato Mundial de Fútbol de México 1986, un gol de tiro libre que pasó a la historia como "el gol imposible".

a. Investiguen respecto de estos eventos y sus circunstancias. ¿Qué elementos permiten afirmar que se trata, figuradamente, de "imposibles"?

b. ¿Es posible estimar, en cada caso, la probabilidad de éxito? ¿Cómo podría hacerse?

c. ¿Existe alguna forma de determinar estas probabilidades de manera teórica? Comenta con tus compañeros.

4 Para ir de una ciudad a otra existen dos posibles rutas. Una consta de tres tramos (A, B y C), mientras que la otra, de dos tramos (D y E). El viaje, en condiciones normales, dura lo mismo por cualquiera de ellas. Sin embargo, debido a algunos trabajos en la vía, en cada tramo se pueden presentar retrasos:

Tramo	Probabilidad	Tiempo de retraso
A	20 %	10 minutos
B	15 %	10 minutos
C	10 %	15 minutos
D	15 %	15 minutos
E	10 %	20 minutos

a. ¿Cuál es la probabilidad de llegar con menos de 20 minutos de retraso?

b. ¿Cuál es la probabilidad de llegar con más de 15 minutos de retraso?

c. Si se debe elegir una ruta, ¿cuál sería la más conveniente? Justifica.

5 Según el Sistema Nacional de Información de Seguridad y Salud en el Trabajo de Chile, durante el 2015 hubo 180 036 accidentes del trabajo, lo que corresponde a un 3,7 % de los trabajadores del país. La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es de 0,1, mientras que la probabilidad de que suene esta si se ha producido algún incidente es de 0,97 y la de que suene la alarma si no ha sucedido ningún incidente es de 0,02. ¿Cuál es la probabilidad de que la alarma no suene si no se ha producido ningún accidente?

6 Las casas de apuestas internacionales ofrecen distintas posibilidades para los eventos deportivos que captan la atención del mundo. Según las probabilidades de triunfar de cada contrincante, se informa por ejemplo que "paga 2,5 a 1", es decir, por cada $ 1 que se apueste a dicho participante, en caso de que obtenga el triunfo, se podrán cobrar $ 2,5.

Previamente al partido entre Chile y Argentina por la Copa Centenario 2016 –que significó el segundo título continental consecutivo para Chile frente al mismo rival– las principales casas de apuestas informaron que el triunfo chileno pagaba 5 a 1, mientras que el triunfo argentino pagaba 1,72 a 1.

a. ¿A quiénes otorgaban mayor probabilidad de triunfo?, ¿por qué?

b. ¿Qué aspectos pueden haber influido en esta estimación?

c. Los valores asignados pueden ser cambiados por las casas de apuestas a medida que se acerca el evento correspondiente, pese a que no existan cambios sustanciales en las condiciones de los rivales que se enfrentan. ¿A qué creen que puede deberse esto? Expliquen e investiguen para averiguarlo.

d. ¿Son los valores informados por las casas de apuestas estimadores confiables de la probabilidad, considerando lo anterior? Justifiquen y discutan con sus compañeros y compañeras.

7 **Historia, geografía y ciencias sociales.** La tabla muestra la probabilidad de que llueva 10 o más días durante un mes en una ciudad. Una empresa del lugar, que vende materiales para la construcción, tiene mayor cantidad de ventas en los meses en los que la probabilidad de chubascos durante 10 días o más es menor que 0,2. Además, en esos meses debe contratar una mayor cantidad de trabajadores. Por otro lado, cuando la probabilidad de chubascos supera el 0,6, se generan pérdidas.

Mes	Probabilidad de lluvia
Enero	2 %
Febrero	5 %
Marzo	12 %
Abril	8 %
Mayo	20 %
Junio	70 %
Julio	90 %
Agosto	30 %
Septiembre	20 %
Octubre	18 %
Noviembre	10 %
Diciembre	5 %

a. Según la información, ¿en qué meses es probable que la empresa deba contratar más trabajadores?

b. Si los dueños de la empresa deciden cerrar durante los meses que probablemente llueve 10 o más días, ¿cuántos meses estará cerrada?

c. Un análisis de último minuto establece que la empresa generará el triple de ganancias, respecto de un mes normal, durante el tercer mes de un período en que la probabilidad de que llueva 10 o más días en cada uno de ellos sea inferior a 0,07. ¿En qué mes podría ocurrir esto? Justifica.

8 Finalmente, el partido entre Chile y Argentina por la Copa Centenario 2016 se definió por lanzamientos penales. En estos casos, los directores técnicos y preparadores de arqueros suelen estudiar a los jugadores y analizar sus tiros anteriores para instruir a los arqueros respecto de cómo reaccionar: lanzarse hacia un lado u otro, hacia arriba o abajo, etcétera.

- **a.** ¿De qué manera aumenta la probabilidad de atajar un penal si se conoce esta información?
- **b.** El último penal de Chile en este partido fue ejecutado por Francisco "Gato" Silva, que nunca antes (en su trayectoria profesional) había lanzado un penal. ¿Por qué crees que el director técnico de Chile lo escogió?, ¿en qué afectaba la probabilidad de que el arquero argentino atajara su lanzamiento? Comenta con tus compañeros.

9 Considera los siguientes sucesos:

- Sufrir un accidente automovilístico en el transcurso de un año.
- Sufrir la picadura de una araña de rincón en el transcurso de un año.

- **a.** Para los dos sucesos planteados, ¿es una información útil la cantidad de personas a las que le ocurrió el año anterior para estimar la probabilidad de ocurrencia?
- **b.** Considerando el punto anterior, ¿qué otros factores podrían afectar cada una de las probabilidades? Menciona al menos tres para cada suceso y discútelos con tus compañeros.

Me evalúo

Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador			
Resolví problemas de probabilidades presentes en medios de comunicación y de su interpretación.			
Apliqué las reglas de probabilidades para tomar decisiones que involucran frecuencias relativas de procesos de producción, de seguridad, etc.			
Comparé los resultados obtenidos de manera probabilística teórica con los resultados basados en creencias y los resultados estimativos.			
Evalué modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones.			
Mostré una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valoré el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.			

Cuaderno página 152

Reviso mis metas y estrategias

1 Considera las estrategias que escribiste en la página 249: ¿han sido eficaces?, ¿por qué?

____

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

____

EL PROBLEMA DE MONTY HALL

CONSTRUCCIÓN

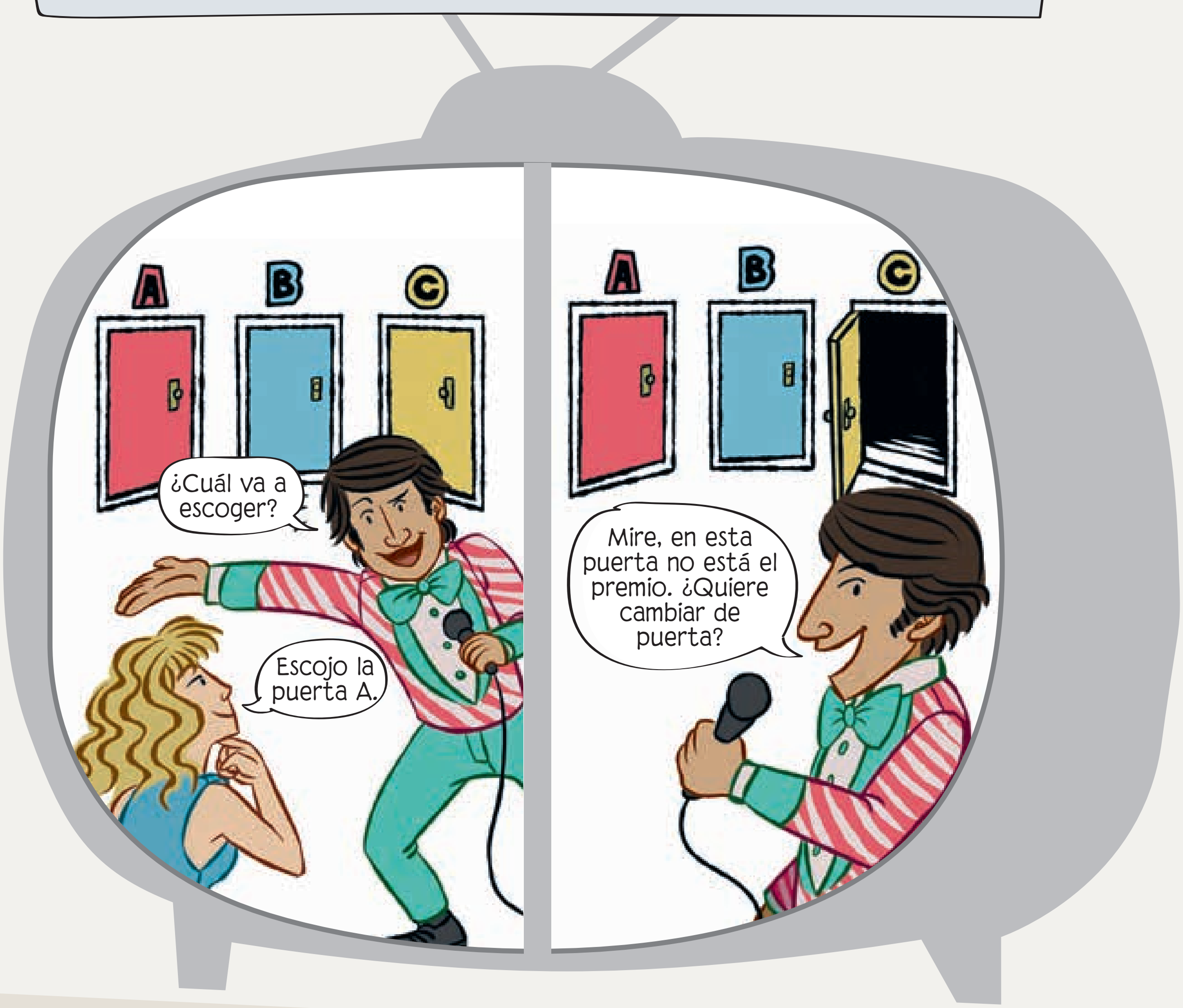
Materiales

- ✓ Una hoja de papel o cartulina.
- ✓ Tijeras.

- Con las tijeras, corten tres tarjetas idénticas para simular las condiciones del concurso. En una de ellas escriban detrás la palabra "premio" y dejen las otras dos en blanco.
- En otra hoja, escriban A, B y C para identificar las puertas.

¿CÓMO SE USA?

Existe un problema clásico que se conoce como "El problema de Monty Hall", llamado así por el animador de un programa de televisión. Consiste en que un concursante se enfrenta a tres puertas, en una de las cuales hay un premio y las otras dos están vacías.



INSTRUCCIONES

1 ¿Qué escogerían ustedes, cambiar de puerta o mantenerla?, ¿por qué?

2 Analicen cuáles son las probabilidades de ganar el premio en la primera escena, y cómo cambian cuando el presentador abre una de las puertas.

3 Con las tarjetas, reproduzcan la situación varias veces, cuenten los resultados y completen la siguiente tabla en cada caso.

	Resultado	
Tarjeta	**Ganó el premio**	**Lo perdió**
Se mantuvo		
Se cambió		

4 De acuerdo a lo que observan, ¿qué le conviene más al concursante?

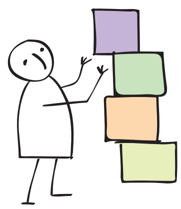
5 Justifiquen, utilizando probabilidades, por qué es mejor una opción u otra. ¿Coincide con la idea que tenían inicialmente?

Cuaderno página 154

APRENDER CON MONOS
Apuntes gráficos

4 maneras de aprender

1



EXPERIENCIAS DESAFIANTES → TRABAJO QUE SE EXTIENDE
EXPERIENCIAS DESAFIANTES → APRENDER EN EL CONTEXTO

2

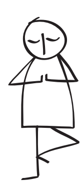
OPORTUNIDAD DE PRACTICAR → NUTRE EL ALTO RENDIMIENTO

3

CONVERSACIÓN CREATIVA

→ ES EL MOTOR DEL APRENDIZAJE Y EL DESARROLLO

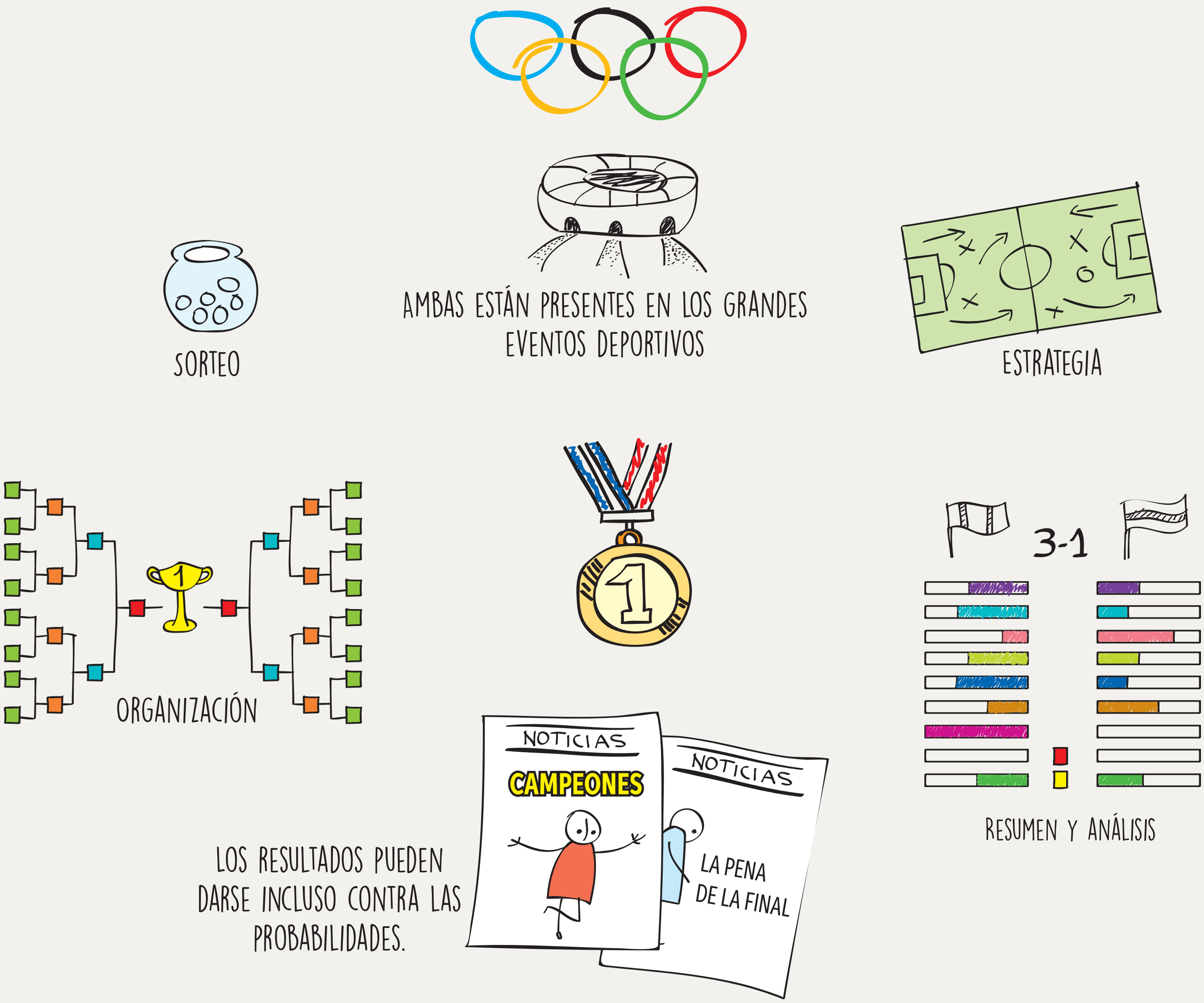
4



TIEMPO PARA REFLEXIONAR
→ INDIVIDUALMENTE
→ GRUPALMENTE
→ FUERA DE CLASES

EXPERIENCIAS Y REFLEXIÓN
=
APRENDIZAJE QUE PERMANECE

Apuntes gráficos con probabilidad y estadística



Ahora es mi turno de dibujar

Temas para practicar los apuntes gráficos:

- Un resumen noticioso o personal del año.
- Propósitos para el próximo año

Muestro lo que aprendí usando apuntes gráficos:

- Las lecciones de la unidad de Probabilidad y Estadística.
- Lo que aprendimos este año en Matemática.

Cuaderno página 155

- Al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas, ¿mostré una actitud crítica y valoré el aporte de los datos en la comprensión de la realidad?
- Al usar las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, ¿lo hice de manera responsable y efectiva?

¿Qué aprendí?

Evaluación final

1 A Ximena le encanta leer. Por eso, antes de partir a sus vacaciones, pasa por la biblioteca municipal para retirar algunos libros. Esta vez ha decidido llevar uno de ciencia ficción, un relato histórico y una novela policial. El bibliotecario le ofrece 8 opciones de libros de ciencia ficción, 4 relatos históricos y 7 novelas policiales. ¿De cuántas maneras puede Ximena escoger los libros que llevará?

2 En un taller de baile hay dos grupos: el de principiantes está formado por 10 mujeres y 8 hombres; el avanzado, por 5 mujeres y 7 hombres. ¿Cuántas parejas se pueden formar sin mezclar los grupos?

3 Si se lanza un dado de seis caras y una moneda al mismo tiempo, ¿cuántos resultados se pueden obtener?

4 Un concurso consiste en abrir un cofre cerrado con 4 candados con una llave distinta para cada uno. Si un concursante tiene 4 llaves y no sabe a qué candado corresponden, ¿cuántos intentos como máximo podría realizar hasta abrir cada candado?

5 Calcula la cantidad de números que se pueden formar con los dígitos del número 111 223 330.

6 **Geometría.** Se dice que dos puntos siempre son colineales. En cambio, tres o más puntos se dicen colineales solo si existe una recta que pase por todos ellos. En caso contrario, se dice que son no colineales.

a. Dado un conjunto de 5 puntos no colineales, ¿cuántas rectas determinan?

b. ¿Qué ocurre con un conjunto de 7 puntos no colineales?

c. Considerando lo anterior, ¿cuántas diagonales pueden trazarse en un pentágono convexo?, ¿por un heptágono convexo?

d. Determina, utilizando combinatoria, la cantidad de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados.

7 De los 11 jugadores de un equipo de fútbol, se debe escoger algunos al azar: uno que se ocupe de llevar a lavar las camisetas, otro que asista a las reuniones con los representantes de los demás equipos, un tercero que encargue de cobrar las cuotas y un cuarto que oficie de capitán en los partidos. ¿De cuántas formas se puede escoger estos jugadores? Representa el resultado utilizando factoriales.

8 Identifica si cada situación tiene asociada una variación (V), una permutación (P) o una combinación (C).

Situación	Respuesta
Los números que se pueden formar con los dígitos 3, 5 y 7.	
Los números de tres dígitos que se pueden formar con los dígitos 3, 5 y 7.	
Los pares de números que se pueden elegir entre los dígitos 3, 5 y 7.	
Los votos de 10 profesores para elegir al mejor estudiante entre 5 alumnos.	
Las parejas de estudiantes que se pueden formar con 5 alumnos.	
Los *rankings* de 3 estudiantes, hechos a partir de 5 de ellos.	

9 Gladys participa todas las semanas de un sorteo a beneficio que han organizado sus vecinos. Se trata de un sorteo de 5 números, escogidos del 1 al 20 al azar, en el que se entregan premios en dinero a quienes obtengan 3, 4 o los 5 aciertos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que Gladys acierte a 3 números?

b. ¿Cuál es la probabilidad de ganar alguno de los premios?

10 La abuela de Pedro está enferma. Por eso, él se ha propuesto visitarla tres veces durante la semana. Para determinar los días de visita, decide recurrir al azar, escribiendo los nombres de los días en diferentes papeles, para luego sacarlos sin mirar desde una bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

a. De que vaya el lunes.

b. De que vaya los dos días del fin de semana.

c. De que vaya dos días seguidos, pero no tres.

11 Para revisar la seguridad de las claves de acceso de un correo electrónico, Mauricio comienza a probar claves al azar, que va anotando para no repetirlas. Él sabe que la clave consta de 2 cifras y tres letras en el siguiente orden: AA1A1. Además, las cifras pueden repetirse pero las letras no, pero pueden ser mayúsculas o minúsculas, y no se considera el uso de la ñ. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al primer intento?

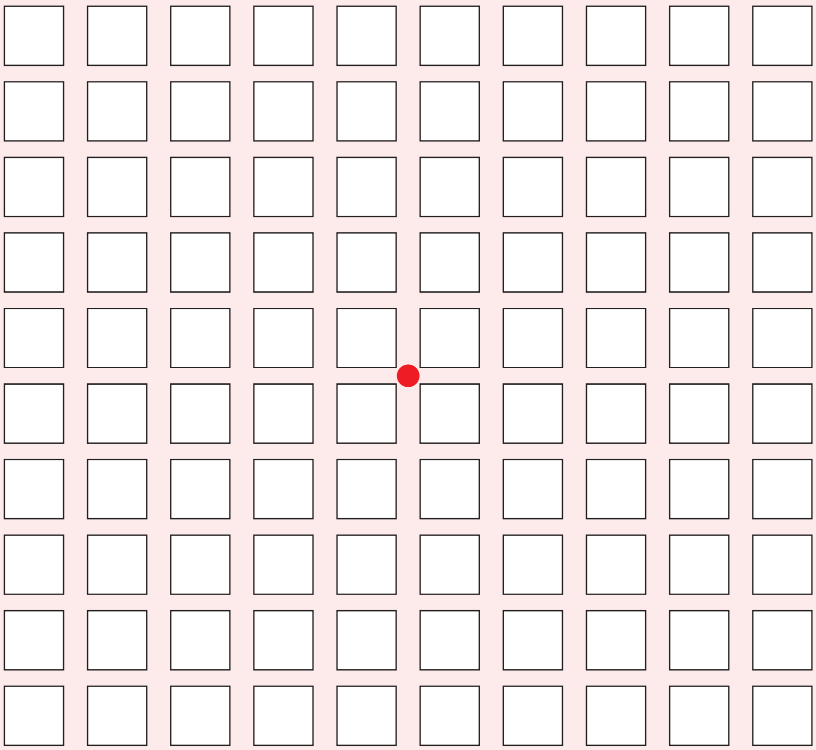
12 Cada día, la profesora de Lengua y Literatura selecciona a 5 de sus estudiantes para preguntarles sobre los libros que han leído. El curso consta de 24 alumnos, y un día hay 8 de ellos que no han terminado su lectura. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

a. Escoger solo a alumnos que no hayan terminado su lectura.

b. Escoger a dos de los alumnos que no hayan terminado su lectura.

c. Escoger al menos a tres de los alumnos que han terminado su lectura.

13 Daniela pasea cada día a su perro dejando que él escoja la ruta que seguirán. De acuerdo a esto ha observado que el perro, al llegar a una esquina, escoge con la misma probabilidad cualquiera de las cuatro direcciones posibles. Ella lo deja hacer esto a lo largo de 5 cuadras, luego de lo cual regresan. En el plano, el punto rojo corresponde al punto de partida del paseo.



a. Indica con las letras *A*, *B*, *C*... los posibles lugares a los que pueden llegar en el paseo.

b. ¿Cuál es la probabilidad de llegar, para cada lugar señalado?

14 Lucas tiene en su monedero 4 monedas de $ 100 y 2 de $ 500. Su hermano selecciona 3 monedas al azar y sin reemplazo. Si se define la variable aleatoria X como el monto total de las 3 monedas, ¿cuál es la probabilidad de X?

15 De una urna que contiene 2 fichas blancas y 4 negras, se extraen 3 de ellas en sucesión y con reemplazo. Encuentra la probabilidad de la variable aleatoria definida como el número de fichas blancas.

16 Al lanzar una moneda, se asigna el valor 2 a obtener sello y 3 a obtener cara. Se lanza un dado de seis caras y una moneda, y se multiplican los valores correspondientes obtenidos:

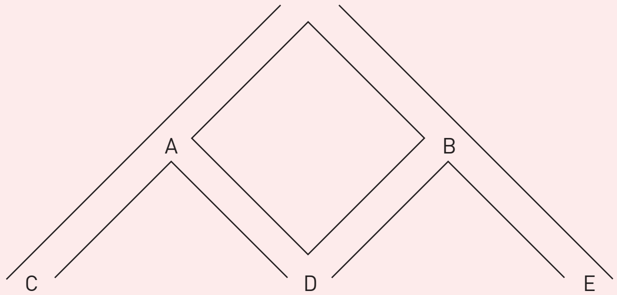
a. ¿Cuál es el recorrido de la variable aleatoria asociada a este experimento?

b. Construye una tabla para la variable aleatoria definida.

c. ¿Para qué valor del recorrido hay más elementos del dominio que le corresponden?

d. Dada la misma situación, define dos variables aleatorias más que se pueden asociar al experimento, y construye su respectiva tabla de valores.

17 Eduardo participa en un juego en el que debe apostar $ 1000 y dejar caer una bolita por un tablero como el que se muestra:



Al pasar por cada letra, el monto apostado se multiplica por el valor correspondiente a la letra. Una vez que se detiene la bolita, se le entrega al concursante la cantidad dinero que obtiene. En cada bifurcación de caminos, la bolita tiene la misma probabilidad de ir hacia un lado u otro.

Si se asigna: $A = 2$, $B = 0{,}3$, $C = 0{,}9$, $D = 4$, $E = 0{,}2$, y se define la variable aleatoria X como el monto total obtenido, determina los casos correspondientes a los siguientes valores:

a. $X < 2000$

b. $X > 1500$

c. $500 < X < 4000$

18 Considerando el juego anterior, determina la probabilidad de que Eduardo obtenga una ganancia al participar.

19 En el experimento aleatorio "elegir a una persona en la calle", las siguientes no son variables aleatorias. Explica por qué no lo son.

a. X = nombre de la persona.

b. X = sexo de la persona.

c. X = color de pelo de la persona.

d. X = tendencia política de la persona.

20 Camila participa en un juego de preguntas y respuestas para el que se ha preparado mucho, por lo que la probabilidad de que responda correctamente la primera pregunta es igual a 0,8. Sin embargo, ella ha notado que, cuando se equivoca, se afecta su confianza y la probabilidad disminuye a la mitad; mientras que si responde correctamente, la probabilidad vuelve a ser 0,8 para la pregunta siguiente. La primera etapa del juego consta de 4 preguntas.

a. Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria X: cantidad de preguntas respondidas correctamente en la primera etapa.

b. Calcula la probabilidad de que responda exactamente 3 preguntas en forma correcta.

c. Si la probabilidad de responder correctamente una pregunta al inicio fuera igual a p, determina una expresión que represente a $P(X = x)$.

21 Se lanzan dos dados piramidales con 4 caras congruentes, marcadas con los números 0, 1, 2 y 3. Luego, la variable aleatoria X definida tiene la siguiente función de probabilidad:

X	0	1	2	3	4	6	9
$P(X = x)$	0,4375	0,0625	0,125	0,125	0,0625	0,125	0,0625

a. ¿Cuál es la variable aleatoria correspondiente? Determina una que corresponda a los valores de la tabla.

b. ¿Es posible determinar otra variable aleatoria? Discute con tus compañeros.

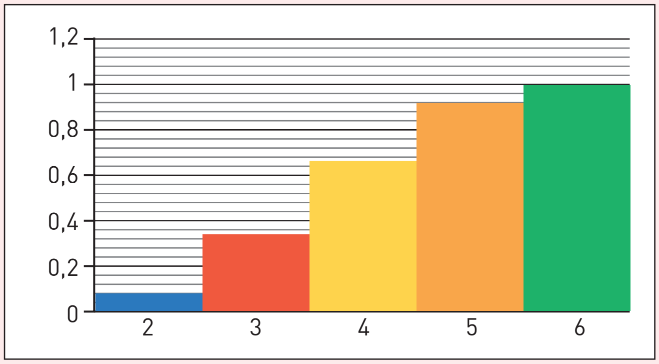
c. Determina y grafica la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

d. ¿A qué corresponde, en palabras, $P(0 < X \leq 4)$?

e. Determina dos eventos tales que su probabilidad acumulada sea igual a 0,1875. ¿Cómo se pueden describir con palabras?

22 Una variable aleatoria Z tiene como recorrido los valores 2, 3, 4, 5 y 6. Si su función de probabilidad es tal que $f(n + 1) = f(n) + 0,1$, ¿cuál es el valor de $P(3 \leq Z < 5)$?

23 Una ruleta está dividida en 4 sectores iguales, de modo que cada uno tiene la misma probabilidad de salir. En cada sector se escribe un número que puede ser 1, 2 o 3, por lo que uno de ellos queda repetido. Luego, se gira la ruleta dos veces seguidas y se suman los números obtenidos. La función de probabilidad de la variable aleatoria asociada tiene el siguiente gráfico:



¿Cuál es el valor repetido? Explica cómo lo determinaste.

24 El profesor recuerda un año en que, a mediados del invierno, un diario tituló una noticia como "Aumenta en un 35 % la probabilidad de contraer enfermedades respiratorias". Junto con dos compañeros, discutan:

a. ¿Qué bases puede tener el diario para este titular? Expliquen.

b. En el caso de una enfermedad respiratoria, para determinar la probabilidad de cualquier persona de contraer la enfermedad, ¿bastará constatar un aumento de los casos respecto del año anterior? Expliquen.

25 Discute con dos compañeros:

a. ¿En qué casos los deseos de las personas influyen en la probabilidad de ocurrencia de un hecho? Den al menos dos ejemplos.

b. Algunas personas afirman que "es muy probable que exista vida fuera de la Tierra". ¿En qué podría basarse esa afirmación? ¿Qué argumentos en contra podría haber?

Me evalúo

Evalúa tu trabajo marcando el nivel de desempeño.

Indicador	🙂	😏	😯
Resolví problemas de cálculo de probabilidades utilizando técnicas de conteo.	○	○	○
Apliqué combinaciones, permutaciones y variaciones para resolver problemas.	○	○	○
Identifiqué y definí variables aleatorias finitas en experimentos aleatorios.	○	○	○
Calculé las probabilidades de una variable aleatoria finita aplicando la terminología $P(X = xi)$	○	○	○
Elaboré tablas y gráficos para representar la distribución de una variable aleatoria finita.	○	○	○
Resolví problemas de probabilidades en medios de comunicación y de su interpretación.	○	○	○
Apliqué las reglas de probabilidades para tomar decisiones que involucran frecuencias relativas de procesos de producción, de seguridad, etc.	○	○	○
Comparé resultados obtenidos de manera probabilística teórica, resultados basados en creencias y resultados estimativos.	○	○	○
Describí relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.	○	○	○
Mostré una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valoré el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social	○	○	○

Cuaderno página 158

Reviso mis metas y estrategias

1 Considera las estrategias que escribiste en la página 189: ¿han sido eficaces?, ¿por qué?

---

2 ¿Has podido cumplir las metas que te planteaste? ¿Qué podrías mejorar para lograrlas?

SOLUCIONARIO

Unidad 1 Números

Lección 1: Números reales

Página 16

1.
   a. $\frac{293}{90}$
   b. $\frac{8333}{1000}$
   c. $\frac{32}{5}$
   d. 10

2.
   a. $0,\overline{13}$
   b. $0,\overline{3}$
   c. 1,2
   d. 22,5

3.
   a. $-\frac{23}{8} = -2,875$
   b. $-\frac{15\ 626}{125} = -125,008$
   c. $\frac{1}{2} = 0,5$
   d. 729
   e. $\frac{1}{5} = 0,2$
   f. $\frac{15\ 851}{432} = 36,692$

Página 17

4.
   a. $\frac{187}{60} = 3,11\overline{6}$
   b. $\frac{47}{6} = 7,8\overline{3}$
   c. $-\frac{8\ 216\ 154}{1\ 247\ 400} = -6,587$
   d. $-\frac{11}{284} = -0,0387$

5.
   a. F
   b. V
   c. F

6. La capacidad de la piscina son 5120 litros.
7. La medida de la hipotenusa es 40 cm.
8. Hay 625 analgésicos en total.
9. Habían 376 bacterias.
10. El volumen es $\frac{27}{63}$ cm^3.

Tema 1: ¿Existen números que no sean racionales?

Página 18

1. La mayoría de las hipotenusas son un número irracional, al medir con una regla, se redondean estos valores a un número racional.
2. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, 4, \sqrt{17}$
3. No son iguales, las medidas con regla son un redondeo a la décima.
4. Siguen la sucesión $a_n = \sqrt{n+1}$
5. Los únicos que se pueden representar son el 2, el 3 y el 4, ya que son los únicos que no son irracionales.

Página 20

1.

$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$

2.
   a. $0,629... \in Q^C$
   b. $\frac{1}{3} \in Q$
   c. $\frac{5}{3} \in Q$
   d. $12 \in Q$
   e. $6 - 2\sqrt{5} \in Q^C$

3.
   a. $\frac{31}{5}$
   b. $\frac{219}{50}$
   c. $\frac{319}{125}$
   d. $\frac{79\ 913}{10\ 000}$
   e. $\frac{51}{99}$
   f. $\frac{5}{198}$
   g. $\frac{211}{495}$
   h. $\frac{2411}{990}$

Página 21

4.
   a. $b = \sqrt{3}$
   b. $b = -\sqrt{5}$
   c. $b = \frac{1}{\pi}$
   d. $b = -\sqrt{15}$

5.
   a. V
   b. F, $\sqrt[3]{8} = 2 \in Q$
   c. F, no existe contraejemplo.
   d. V
   e. F, no existe contraejemplo.

6.
   a. 16
   b. $\sqrt{5}$
   c. $6\sqrt{5}$
   d. $a \in Q$ y $b, c \in Q^C$. Con a sí, pero con b y c no, ya que son números irracionales.

7.
   a. $\sqrt{481} \in Q^C$
   b. $18,5 \in Q$

¿Qué aprendí hoy?

1. Los números irracionales se definen como aquellos números que no se pueden escribir como una fracción entre números naturales.
2.
   a. π
   b. $-\sqrt{2}, \sqrt{2} \in Q^C$, $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^C$

Tema 2: ¿Cómo se ordenan y aproximan los números irracionales?

Página 22

1. $\sqrt{2^2+4^2}, \sqrt{4^2+1^2}, \sqrt{4^2+4^2}, \sqrt{5^2+2^2}, \sqrt{6^2+1^2}, \sqrt{6^2+3^2}$
2. La hipotenusa corresponde al valor de cada una de las raíces.
5. No, ya que el valor de la raíz es el mismo sin depender del orden de los catetos.
6. Sí, pero se debe realizar una sucesión del procedimiento, por ejemplo, $\sqrt{14} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{10})^2}$ y $\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1^2}$. Por lo tanto, podemos encontrar la ubicación de $\sqrt{10}$ usando los catetos 1 y 3, y luego usar los catetos $\sqrt{10}$ y 2 para encontrar la ubicación de $\sqrt{14}$.

Página 23

1. $4 \cdot 5 = 20$; $4^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48$; 20; 32; 48; $2\sqrt{5}$; $4\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$

Página 24

2.
   a. 9; 16; 3; 4
   b. 3,2; $3,2^2 = 10,24$; 9; 10,24; 3; 3,2
   c. 3,1; 9,61; 9,61; 10,24; 3,1; 3,2

Página 26

1.
   a. $4 < 6 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{6} < 3$
   b. $9 < 13 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{13} < 4$
   c. $25 < 27 < 36 \Rightarrow 5 < \sqrt{27} < 6$
   d. $49 < 62 < 64 \Rightarrow 7 < \sqrt{62} < 8$
   e. $81 < 90 < 100 \Rightarrow 9 < \sqrt{90} < 10$
   f. $169 < 185 < 196 \Rightarrow 13 < \sqrt{185} < 14$
   g. $225 < 240 < 256 \Rightarrow 15 < \sqrt{240} < 16$
   h. $324 < 350 < 361 \Rightarrow 18 < \sqrt{350} < 19$

2.
   a. $2\sqrt{3} < 3,601 < \frac{721}{200} < \sqrt{26}$
   b. $\frac{4}{8} < 0,\overline{56} < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{5}$
   c. $2,42 < \sqrt{6} < \frac{49}{20} < 2\sqrt{2}$
   d. $\sqrt{17} < 4,2 < 3\sqrt{2} < \frac{13}{2}$
   e. $\frac{1}{3} < \sqrt{3} < 2,5 < \sqrt{10}$
   f. $\sqrt{15} < 4,0\overline{8} < \frac{22}{5} < 2\sqrt{8}$

3. Respuesta abierta.
4.
   a. Respuesta abierta.
   b. No.
   c. En general, es recomendable redondear en vez de truncar.
   d. Sí, en el caso de las cotas, se sigue respetando $a < b \leftrightarrow a^3 < b^3$.

Página 27

5.
   a. $\sqrt{41} = 6{,}403$ b. $\sqrt{18} = 4{,}243$
6.
   a. 4,48 c. 12,11 e. 33,6
   b. 17,3 d. 20,16 f. 77,504
7. Aproximó π por 3, el problema es que el perímetro va a ser un número irracional, por lo que se debe aproximar π por arriba.
8. El segundo cilindro es más angosto.
9. Se requieren 93,9 cm.

¿Qué aprendí hoy?

1. $6 < \sqrt{38} < 7$
2. 54,7 metros aproximadamente.

Tema 3: ¿Cómo se puede calcular con números reales?

Página 28

1.

Paso 1, descomponer en producto entre un numero con raíz exacta y otro.
Paso 2, separar la raíz en multiplicación de raíces.
Paso 3, calcular la raíz cuadrada.

2.
   a. $6\sqrt{2}$ d. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ g. $\frac{3\sqrt{3}}{10}$
   b. $5\sqrt{10}$ e. $\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$ h. $\frac{3}{\sqrt{2}}$
   c. $100\sqrt{10}$ f. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ i. $\frac{\sqrt{3}}{50}$
3. Se prefiera la raíz después de descomponerla, porque se reconocen factores comunes y cantidades subradicales con mayor facilidad.

Página 29

1.
   a. Escribir lo que se desea resolver.
   b. Propiedad distributiva al factorizar.
   c. Al multiplicar −2 con 3 y 5 con 2.
   d. No, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{7} \in Q^C$, se tendría que aproximar.
2.
   a. Separar las raíces en cuadrados perfectos y parte imperfecta.
   b. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
   c. Uno de ellos debe ser cuadrado perfecto.
   d. Factorización.

Página 30

3.
   a. $12\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 4$ b. $5\sqrt{3}$
4.
   a. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ b. $2\sqrt{3}$
   c. Mismo denominador con signo cambiado para completar suma por diferencia.
   d. Sí, con signo cambiado para completar suma por diferencia.

5.
   a. $\frac{3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25}}$. No.
   b. $\frac{8\sqrt[3]{49}}{7}$. Sí. El exponente es 2, cuando el índice de la raíz es 3, la cantidad subradical debe estar al cubo.

Página 32

1.
   a. $6\sqrt{2}$ b. $6\sqrt{3}$ c. $11\sqrt{3}$ d. $7\sqrt{3}$
2.
   a. $-6\sqrt{5}$ c. $6\sqrt{6} - 68$ e. $12\sqrt{3} - 12\sqrt{2}$
   b. $14\sqrt{5}$ d. 0
3. $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} \Rightarrow x^2 = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a}{b}}$
4.
   a. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ e. $3\sqrt{10} - 3\sqrt{7}$
   b. $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ f. $2 + \sqrt{2}$
   c. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ g. $\frac{7 + 2\sqrt{33}}{4}$
   d. $\frac{5\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{3}$ h. $\frac{7\sqrt{\sqrt{12} + \sqrt{3}}(\sqrt{12} - \sqrt{3})}{9}$

Página 33

5.
   a. El perímetro es 1357,63 m aproximadamente.
   b. 2400 m.
6.
   a. Para Manuel, $9\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$.
      Para Daniela, $4\sqrt{5}$, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$.
      Para Rodrigo, $4\sqrt{11}$, $7\sqrt{7}$, $2\sqrt{11}$, $5\sqrt{11}$, $3\sqrt{7}$, $10\sqrt{7}$.
      Para Javiera, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{5\sqrt{3}}{6}$, $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $2\sqrt{2}$, $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

¿Qué aprendí hoy?

1.
   a. $-\sqrt{7}$ b. $6\sqrt{2}$
2.
   a. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ b. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - \sqrt{6})$

Página 34

¿Cómo voy?

1.

$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$

2.
   a. $16 < 19 < 25 \Rightarrow 4 < \sqrt{19} < 5$
   b. $36 < 42 < 49 \Rightarrow 6 < \sqrt{42} < 7$
   c. $100 < 105 < 121 \Rightarrow 10 < \sqrt{105} < 11$
   d. $256 < 270 < 289 \Rightarrow 16 < \sqrt{270} < 17$
3.
   a. $\frac{121}{50} < \sqrt{14} < 3{,}75 < 3\sqrt{2}$
   b. $\frac{14}{3} < 6{,}\overline{6} < 4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$
   c. $\sqrt{7} < 3{,}12 < \frac{39}{12} < 2\sqrt{3}$
   d. $\frac{13}{4} < \sqrt{19} < 2\sqrt{5} < 4{,}7$

4. Respuesta abierta

Página 35

5.

a. $6\sqrt{3}$
b. $-15\sqrt{7}$
c. $20 - 3\sqrt{10} + 42\sqrt{2}$

6.

a. $\frac{\sqrt{12}}{12}$ c. $\frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{2}$ e. $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$
b. $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ d. $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{6}$ f. $\frac{4\sqrt{3}+3}{3}$

7.

a. $\sqrt{3} \in Q^C$ c. $15 \notin Q^C$ e. $26\pi \in Q^C$
b. $\sqrt{2} \in Q^C$ d. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in Q^C$ f. $100 \notin Q^C$

8.

a. $6{,}40 \in Q^C$ c. $7{,}38 \in Q^C$
b. $11{,}3 \in Q$ d. $4{,}30 \in Q^C$

9.

a. Sus lados miden $36\sqrt{2}$ cm y $12\sqrt{14}$ cm.
b. Su área es de $768\sqrt{7}$ cm^2, sus lados miden 48 cm y $16\sqrt{7}$cm, y su diagonal es de 64 cm.

Página 36

10.

a. Ruta 1: 14,196, Ruta 2: 23,66, Ruta 3: 21,708, Ruta 4: 12,06.
b. 8,7 y 9,648
c. 143,248

11. No

12.

a. $4 + \sqrt{10} + \sqrt{6}$ m d. $19{,}2 + 4{,}8\sqrt{2}$ m
b. $9\sqrt{15}$ m^2 y $16\sqrt{15}$ m^2 e. $56\sqrt{2}$ m^2 y $8{,}96\sqrt{2}$ m^2
c. $8\sqrt{2}$ m y $\frac{16}{5}\sqrt{2}$ m.

Página 37

13.

a. La que tiene hipotenusa $8\sqrt{3}$m.
b. 9; 7,07; 13,44; 13,23; 13,86; 13,4; 13,42.

Lección 2: Raíces enésimas y logaritmos

Página 38

1.

a. $2^3 \cdot 3$ c. $2^2 \cdot 3^3$ e. $5^2 \cdot 3 \cdot 17$
b. $5^2 \cdot 3$ d. $5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$ f. $13 \cdot 5^2 \cdot 2^2$

2.

a. $\frac{401}{25}$ b. -20 c. 72 d. 4096

Página 39

3.

a. F, $4^2 + 3^3 = 43$ y $7^5 = 16\,807$
b. F, $3^3 \cdot 5^2 = 675$ y $15^5 = 759\,375$
c. V
d. F, $6^3 : 3^{-3} = 5832$ y $2^0 = 1$
e. V
f. F, $(3^3)^2 = 3^6$

4.

a. $4\sqrt{7}$ b. $42\sqrt{2}$ c. $15\sqrt{3}$ d. $16\sqrt{5}$

5.

a. Sí d. Sí
b. No e. Sí
c. No f. Sí

Tema 1: ¿Cuáles son las raíces enésimas?

Página 40

2. 2; –2; 5; –5; 7; –7; 8; –8
3. 1,91293118
4.

a. 7
b. $6{,}\overline{9}$
c. Dado la aproximación que se hizo.

6. Error, 3; –3; 2,45; Error; 3; –3.
7. Sí, cantidades subradicales negativos con índice de la raíz par.

Página 41

1.

a. $4\sqrt{5}$ c. 6 e. $\frac{3}{10}$
b. $2\sqrt{7}$ d. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

2.

a. $21\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5} = 17\sqrt[3]{5}$
b. $\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} + \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} - 5 = 2\sqrt[4]{3} + 3\sqrt[4]{2} - 5$. No, además del índice, la cantidad subradical debe ser igual.

3. Sí. No. $\sqrt[3]{-9}$ y $\sqrt[3]{-3}$ existen, ya que el índice de la raíz es impar, por lo que se puede aplicar operaciones aritméticas a ellos, pero $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[4]{-2}$ no existen, ya que tienen índice de la raíz par.

Página 42

4.

a. Descomponer números dentro de la raíz.
b. $\sqrt[z]{xy} = \sqrt[z]{x} \cdot \sqrt[z]{y}$
c. Sumar raíces semejantes.
d. No, los índices de las raíces son distintos.

5.

a. $\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}}$
b. $\frac{8\sqrt[3]{7^2}}{7}$; Segundo; Si se tiene que el índice de la raíz es n, el número por el que se racionaliza debe estar elevado a n – 1.

Página 44

1.

$\sqrt[3]{-27}$		$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[5]{243}$		$\sqrt[3]{-343}$		$\sqrt[3]{1000}$		$\sqrt[4]{1296}$	
	5^3			4^4		$(-8)^3$		$(-1)^9$		$(-2)^7$

2.

a. 4 c. 3 e. 4
b. –2 d. 1 f. 5

3.

a. Porque todo número elevado a un número par es positivo.
b. 1
c. 1 y –1, el índice de la raíz y el signo de la cantidad subradical.

4.

a. 5 b. –8 c. 16,55

Página 45

5.

a. 6
b. 4
c. 6
d. 6

6.

a. $3\sqrt[3]{2}$

b. $2\sqrt[4]{10}$

c. $10\sqrt[3]{9}$

d. $\sqrt[4]{a^3b^9}$

e. $\sqrt[3]{p^5q^4r}$

f. $\sqrt[3]{60p^5q^8}$

Tema 2: ¿Qué representan las potencias de exponente fraccionario?

Página 46

1.

a. 4^6

b. a^{12}

2. Cuando se tiene la potencia de una potencia, los índices se deben multiplicar.

3.

a. 3

b. 6

4. Equivalen a raíces.

6.

a. Es correcta, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

b. $a^{\frac{m}{n}}$ es la n-ésima raíz de a elevado a m.
$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$; $3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}$; $4^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{4^5}$.

Página 47

1.

a. Cuando los índices de raíces son iguales, las cantidades subradicales se pueden multiplicar.
$\sqrt[z]{x} \cdot \sqrt[z]{y} = \sqrt[z]{x \cdot y}$

b. $x^z \cdot y^z = (x \cdot y)^z$

2.

a. $\sqrt[5]{16} : \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{16:8} = \sqrt[5]{2}$

b. $2\sqrt[7]{3} = \sqrt[7]{2^7} \cdot \sqrt[7]{3} = \sqrt[7]{2^7 \cdot 3}$

Página 48

1.

a. $\sqrt[5]{6}$

b. $\sqrt[3]{8}$

c. $\sqrt[9]{24^5}$

d. $\sqrt[2]{x^5}$

e. $\sqrt[4]{q^7}$

f. $\sqrt[n]{101^3}$

2. $\sqrt[an]{x^{bn}} = x^{\frac{bn}{an}} = x^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{x^b}$

3.

a. $\sqrt[8]{p^6}$

b. q^3

c. $\sqrt[2]{p}$

d. $\sqrt[5]{p^4q^3}$

e. $\sqrt[2]{pq}$

4.

a. $a = b = 2 \Rightarrow (2+2)^{\frac{1}{2}} = 2 \neq 2\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}$

b. $a = b = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \neq 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$

c. $a = b = 2 \Rightarrow (2+2)^{\frac{1}{2}} = 2 \neq \frac{1}{16} = \frac{1}{(2+2)^2}$

5. Demostración, $\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[y]{a^{\frac{1}{x}}} = \left(a^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{y}} = a^{\frac{1}{xy}} = \left(a^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\sqrt[y]{a}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}$

6.

a. Primera igualdad, $\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[7]{a^5} = a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{5}{7}} = a^{\frac{46}{35}} = \sqrt[35]{a^{46}}$

Segunda igualdad, $\dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \dfrac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{5}{7}} \cdot a^{-\frac{3}{5}} = a^{\frac{5}{7}-\frac{3}{5}} = a^{\frac{4}{35}} = \sqrt[35]{a^4}$

b. Primera igualdad, $\sqrt[r]{a^s} \cdot \sqrt[t]{a^u} = \sqrt[rt]{a^{st+ru}}$.

Segunda igualdad, $\dfrac{\sqrt[r]{a^s}}{\sqrt[t]{a^u}} = \sqrt[rt]{a^{st-ru}}$

Página 49

7.

a. $\sqrt[15]{4^{12} \cdot 3^{10}}$

b. $\sqrt[6]{7^{13}}$

c. $\sqrt[15]{3^{31}}$

d. $\sqrt[21]{a^{-26} \cdot b^{26}}$

e. $\sqrt[12]{3^3 \cdot 4^4 \cdot p^7}$

f. $\sqrt[12]{2^{11}}$

g. $\sqrt[10]{2^3}$

h. $\sqrt[20]{a^{-1}}$

i. $\sqrt[12]{3^4 \cdot p^{-9}}$

j. $2\sqrt[3]{x} - 3x$

8.

a. $\sqrt[3]{12}$

b. $\sqrt[5]{2 \cdot 5^2}$

c. $\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$

d. 4

e. $3\sqrt[3]{154}$

f. $\sqrt[5]{2^3 \cdot 5^8}$

g. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

h. $\sqrt[4]{\frac{p^3}{q}}$

Tema 3: ¿Qué son los logaritmos?

Página 50

1. Respuesta abierta

2.

	10	4	$\log_{10}(10\,000) = 4$
$6^{-2} = \frac{1}{36}$			$\log_6\left(\frac{1}{36}\right) = -2$
$9^0 = 1$	9	0	
	5	–3	$\log_5(0{,}008) = -3$
$64^{\frac{1}{3}} = 4$	64	$\frac{1}{3}$	

3.

a. No, ya que no estaría definida para todos los reales.

b. No, ya que, si la base es positiva, todas sus potencias son positivas. No, ya que ninguna potencia es cero.

c. 0. 0. No depende de la base, ya que todo número elevado a cero es uno.

Página 52

1.

a. V, $5^2 = 25$

b. F, $2^{0,5} = \sqrt{2} \neq 0{,}25$

c. F, $9^2 = 81$

d. F, $1^0 = 1$

e. F, $10^{100} > 2$

f. V, $e^1 = e$

g. F, $4^{-2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

h. V, $36^{0,5} = \sqrt{36} = 6$

i. V, $\log_{\sqrt{3}}(81)^{-\frac{1}{5}} =$
$-\frac{1}{5}\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}^{\,8}\right) = -\frac{8}{5}$

j. V, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$

k. V, $\log 10^5 = 5\log 10 = 5$

l. F, $8^{\frac{3}{2}} = \sqrt{512}$

2.

a. $\log_9(729) = 3$

b. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$

c. $\log_{0,3}(0{,}09) = 2$

d. $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{32}{243}\right) = 5$

e. $\log_{0,01}(10\,000) = -2$

f. $\log_{\frac{1}{2}}(64) = -6$

g. $\log_{27}\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

3.

a. 0,5

b. 2

c. 2

d. 6561

e. –2

f. –0,5

g. $-\frac{1}{6}$

h. 25

i. 6561

j. $\frac{1}{10}$

Página 53

4.

a.

10^{-11}
10^{-10}
10^{-4}
10^{-2}
10^{3}
10^{6}

b. 50 dB como límite deseable y 120 dB donde comienza el dolor.

c. 1 W/m^2 y 120 dB

d. 10 log (2) dB.

¿Qué aprendí hoy?

a. 10 mg
b. 14,95 horas.
c. 2,014 mg
d. 1:30 a.m.

Página 54

1.

a. 1
b. 0
c. 0
d. 1
e. 1
f. 0. Podemos concluir que todo logaritmo de 1 es 0 y que todo logaritmo de un número con base de mismo número, es 1.

2.

a. V
b. F
c. V
d. V
e. F
f. V
g. V
h. F. Se puede concluir que el logaritmo de una multiplicación es la suma de logaritmos. Siempre ocurre. $\log_x(y \cdot z) = \log_x(y) + \log_x(z)$

Página 55

3.

a. V
b. F
c. F
d. V
e. V
f. V
g. F
h. V. Se puede concluir que el logaritmo de una división es la resta de logaritmos. Siempre ocurre. $\log_x(y:z) = \log_x(y) - \log_x(z)$

4.

a. V
b. F
c. V
d. V. Se puede concluir que el logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base de la potencia. Siempre ocurre. $\log_x(y^z) = z \cdot \log_x(y)$

Tema 4: ¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos?

Página 56

1. Respuesta abierta

2.

a. $2\log(a) + 3\log(b) - 2\log(2)$

b. $\frac{1}{2}\log(a) - \log(b) - 3\log(c)$

c. $\frac{3}{4}[\log(a) + \log(b) + \log(c)]$

Página 57

3.

a. $\log(5^2 \cdot 2 \cdot 3^{-2})$

b. $\log(5^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}})$

c. $\log\left(p^{\frac{23}{4}} \cdot q^{\frac{3}{2}}\right)$

Página 58

1.

a. 1,15
b. 1,55
c. 1,76
d. 1,81
e. 2
f. 2,08
g. 1,96
h. 2,1

2.

a. Sí
b. Sí
c. Sí
d. No
e. No

3.

a. $\log(40)$

b. $\log(45)$

c. $\log(5^{\frac{19}{2}})$

d. $\log\left(\frac{30^{\frac{1}{2}}}{12}\right)$

e. $\log\left(\frac{a^2 + b}{a}\right)$

f. $\log\left(\frac{p^a}{q^{3c}}\right)$

g. $\log\left(\frac{p^{\frac{1}{2}} \cdot r^{\frac{1}{6}} \cdot s^{\frac{2}{3}}}{q^4}\right)$

4.

Página 59

5.

a. 0

b. 20

c. $N = 20\log\left(\frac{p}{2 \cdot 10^{-4}}\right) = 20\left(\log\left(\frac{p}{2}\right) + \log(10^4)\right) =$

$20\left(\log\left(\frac{p}{2}\right) + 4\log(10)\right) = 20\left(\log\left(\frac{p}{2}\right) + 4\right)$

Página 61

1. No; Tiempo 13
2. El número por el que se multiplica es 3.

Página 62

1.

a. F, contraejemplo: $\sqrt{9} = 3$

b. F, $\sqrt{x^2} > 0$ para todo x distinto de 0.

c. F, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \neq a + b = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2$

d. F, contraejemplo: $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1}$

e. F, se lee como logaritmo de b en base a.

f. F, $\log_1(x) = 1$ para cualquier $x > 0$

g. F, la función logaritmo no está definido para valores negativos.

h. F, contraejemplo: $\log_{10}(0,1) = -1$

i. F, haciendo cambio de base, tenemos que $\log_a(x) + \log_b(x) = \log_{ab}(x)\left(\frac{1}{\log_{ab}(a)\ \log_{ab}(b)}\right)$

2.

a. 6
b. 10
c. 6
d. 6

3.

a. $6\sqrt[3]{5}$

b. $2\sqrt[4]{5} - 1$

c. 2

d. $\sqrt[5]{2^7 \cdot 3} - \sqrt[5]{2^6 \cdot 3} - \sqrt[4]{2 \cdot 3}$

Página 63

4.

a. $3^{\frac{6}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

b. $11^{\frac{13}{6}}$

c. $5^{\frac{29}{10}}$

d. $a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{4}{3}}$

e. $p^{\frac{37}{12}}$

f. $2^{\frac{5}{12}}$

5.

a. $2^3 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$ km^2

b. No le alcanza, el perímetro es de $12\sqrt{5}$ km ≈ 26,3 km.

6.

$4^5 = 1024$	$\sqrt[5]{1024} = 4$	
	$\sqrt[3]{1000} = 10$	$\log_{10}(1000) = 3$
$8^3 = 512$		$\log_8(512) = 3$
	$\sqrt[4]{\dfrac{1}{0{,}0016}} = 5$	$\log_5(0{,}0016) = -4$
$7^0 = 1$	No aplica	
$3^5 = 243$		$\log_3(243) = 5$

Página 64

¿Cómo voy?

7.
- a. 10
- c. 14
- e. $\frac{3}{2}$
- b. 22
- d. 9
- f. –3

8.
- a. $2p - r$
- c. $-2q$
- e. $\frac{3}{4}(p + q + r)$
- b. $2p + 3q - r$
- d. $\frac{1}{2}p - q - 3r$
- f. $2p + \frac{1}{4}r - \frac{3}{4}q$

9.
- a. 1,33
- c. 1,71
- e. 2,08
- b. 1,74
- d. 1,98
- f. 2,08

Página 65

10.
- a. $10^{-2,3} \approx 0{,}005$
- b. $10^{-0,3} \approx 0{,}5$ Mayor g, menor d.
- c. 14,68

Página 70

¿Qué aprendí?

1.

$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$

2.
- a. $\frac{1}{2} \in Q$
- b. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \in Q^C$
- c. $\frac{5}{2} \in Q$

3.
- a. $c = 2$, $d = \sqrt{5}$
- d. $c = 1$, $d = \frac{\sqrt{6}}{2}$
- b. $c = 3{,}2$, $d = \sqrt{11}$
- e. $c = 6{,}94$, $d = \sqrt{48{,}9}$
- c. $c = 4{,}48$, $d = \sqrt{20{,}5}$
- f. $c = 9{,}95$, $d = \sqrt{99{,}8}$

4.
- a. $3 < \sqrt{12} < 4$
- c. $10 < \sqrt{105} < 11$
- b. $6 < \sqrt{48} < 7$
- d. $14 < \sqrt{216} < 15$

Página 71

5. $D = \sqrt{37}$

6.
- a. F, contraejemplo: π^2
- b. F, contraejemplo: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$
- c. F, en uno existe un término central y en el otro no.
- d. V, $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt{x^{\frac{1}{2}}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$
- e. V, $\sqrt[3]{-x} = \sqrt[3]{-1 \cdot |x|} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{|x|} = -1 \cdot \sqrt[3]{|x|}$ y $\sqrt[3]{|x|} > 0$.

7.
- a. No siempre es un número irracional, ejemplo, si $p = 1$, $q = \sqrt{2}$, entonces $(p + q)(p - q) = -1$.
- b. Siempre es irracional.
- c. No siempre es irracional, ejemplo, si $p = 1$, $q = \sqrt{2}$, entonces, $pq^2 = 2$.

8.
- a. $5\sqrt{3}$
- b. $3\sqrt{2}$
- c. $7\sqrt{2}$
- d. $9\sqrt{2}$

Página 72

9.
- a. $\frac{\sqrt{13}}{13}$
- c. $\frac{\sqrt[4]{4^3}}{2}$
- e. $\frac{8(\sqrt{15} + \sqrt{10})}{5}$
- b. $\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$
- d. $\frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{5}$
- f. $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

10. 5 cm^2

11. $10 + 5\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$ m

12.
- a. $14\sqrt[3]{3}$ m
- b. $10\sqrt[3]{3^2}$ m^2

13. 524 m

14. $2\sqrt{30}$ cm^2

15. $t = 10^{\frac{3}{2}}$

16.
- a. $\sqrt[4]{9}$
- c. $\sqrt[5]{27^2}$
- e. $\sqrt[7]{p^2}$
- b. $\sqrt[5]{12}$
- d. $\sqrt[4]{x^3}$
- f. $\sqrt[n]{81^2}$

Página 73

17.
- a. V, al elevar un número a 1, resulta el mismo número.
- b. V
- c. V, el logaritmo es una función creciente.
- d. F, la base de un logaritmo debe ser positivo.
- e. V, $\log_5(\sqrt{125}) = \log_5\left(5^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\log_5(5) = \frac{3}{2}$
- f. V.

18.
- a. Sí
- b. No
- c. Sí

19.
- a. F, $\log_2(16) = 4$
- c. F, $10^1 = 10$
- b. F, $\log(1000) = 3$
- d. V
- e. F, $\log\left(\sqrt[6]{a} \cdot 2b\right) = \frac{1}{6}\log(a) + \log(2) + \log(b)$
- f. V

20.
- a. $\log\left(\frac{50}{9}\right)$
- c. $\log\left(2^{-\frac{11}{3}}\right)$
- b. $\log\left(\frac{24}{6^{\frac{1}{4}}}\right)$
- d. $\log(a^2 b^5)$
- e. $\log\left(p^7 q^{\frac{3}{2}}\right)$

Página 74

21.
- a. 6,42
- b. 0,0016
- c. 0,001259 ; 0,03162 ; 0,00003162 ; 0,0000003162 ; 0,0000000003
- d. El pH del producto es menor, es –log 4 menos.

22. En la posición 19.

23.
- a. 100
- b. $t = 20$

24.
- a. La herida tarda $t = 28{,}57$ en cicatrizar una tercera parte.
- b. La herida tarda $t = 57{,}14$.

Unidad 2 Álgebra y funciones

Inicio de Unidad

Página 80

1. En la primera columna se ve que a medida que crece la potencia, decrece el resultado. Por el contrario, en la segunda columna, si crece la potencia, crece el resultado.
2.
   a. 1,728 d. 14,19857 g. 0,00194481
   b. 3,375 e. 0,421875 h. 0,4225
   c. 3,24 f. 0,1089 i. 0,8836

Página 81

3.
   a. 12 d. 11 250 g. 48
   b. 1600 e. 262 500 h. 12,5 %
   c. 3750 f. 0,4 i. $0,\overline{6}$ %
4.
   a. $33,3\overline{5}$%
   b. $ 55 000
   c. $ 330 000
   d. 30,942 km/m^2
   e. $ 412 500
   f. 10,71429 %
   g. 24 %
   h. $ 10 710

Lección 3: Cambio porcentual

Página 82

1.
   a. Se va multiplicando por 1,2.
   b. Todos son 1,2.
   c. f(t) = 1,2 f(t – 1)
   d. 1,2
2.
   a. Es una función estrictamente creciente.
   b. 4,97664

Página 83

1.

Enunciado	Iv	Cambio porcentual
	0,7	30 %
	1,028	2,8 %
	0,85	15 %
	0,955	4,5 %
	0,75	25 %
	1,1	10 %

2.
   a. Cada año corresponde al anterior por 1,006, por lo que hay un aumento del 0,6 % en cada año.
   b. h(t) = 1,006 h(t – 1)

Tema 1: ¿Qué se entiende por cambio porcentual?

Página 84

1.
   a. 15 % b. Un aumento.
2.
   a. 12 %; negativo b. 0,88
3.
   a. f(t) = 1,05 f(t – 1)
   b. f(t) = 0,911 f(t – 1)
   c. f(t) = 1,09 f(t – 1)
   d. f(t) = 1,001 f(t – 1)
4.

Tiempo	Energía
	91,6
	98
	104,9
	112,2
	120,1
	128,5

   a. Aumenta; 1,07 b. f(t) = 1,07 f(t – 1);
5.
   a. f(t) = 1,02 f(t – 1)
   b. Sí, de forma recursiva,
   $f(t + n) = 1,07\ f(t + n-1) = ... = 1,07^n\ f(1)$

Página 85

6.
   a. Va aumentando o disminuyendo cada vez más rápido.
   b. Debe ser decreciente.
   c. El crecimiento porcentual tiene un gráfico creciente y el decrecimiento porcentual tiene un gráfico decreciente.
7.
   a. 35 384 b. 2027
8.
   a. $P_n = P_0 \cdot 1,03^n$ b. 2039

¿Qué aprendí hoy?

1. 2343,317
2. Bajo el supuesto de cambio porcentual, sí, ya que podemos calcular el Iv con solo esos dos datos.

Página 86

1.
   a. Banco TyT, porque si bien el Banco KDT tiene un interés levemente mayor, el Banco TyT no tiene costo de mantención.
   b. No, el Banco TyT ofrece un interés a un plazo anual, a diferencia del plazo semestral del Banco KDT.
2.

	0,42 %	0,8 %
	6 meses	12 meses
	$ 1000	$ 0

3. $ 7418
4. $ 8000
5. El Banco TyT, ya que ganaría $ 582 más.

Página 87

1.
   a. 250 000 · 0,015 c. 250 000 · 0,015
   b. 250 000 · 1,015 d. 250 000 · 1,015

253 750	
253 750	257 556,2
257 556,2	261 419,6
261 419,6	265 340,9
265 340,9	269 321
269 321	273 360,8

   a. 6
   b. $250\,000 \cdot 1,015^6$
   c. $MF = CI \cdot (1 + r)^n$; 273 361

Página 88

2.
   a. Propuesta 2, ya que tiene un mayor interés.

b.

$2 500 000	$2 500 000
4 años	4 años
0,75 %	0,9 %
$CF = CI \cdot (1 + 0{,}0075)^4$	$CF = CI \cdot (1 + 0{,}009 \cdot 4)$
2 575 848	2 590 000

c. Se recomienda la Propuesta 2, ya que ganaría más dinero.

Tema 2: ¿En qué se aplica el interés compuesto?

Página 90

1.
a. $63 840 b. $63 933 c. $93

2.
a. 10 b. 16

3.
a. 5 b. 7

4. $348 241

5. La tasa B, tendría que pagar $232 240 menos.

6. Alternativa 3 7. Son iguales. 8. 0,24 % o más.

Página 91

9. $1 150 000 10. $1 666 667 11. 6 años

12.
a. $371 532 b. $2 209 244

13.
a. $CF = CI \cdot (1 + r)^n$
b. Roberto ganó $1978 más.

14.
a. $364 996 b. $440 798

15. Antonio tendrá $3387 más.

¿Qué aprendí hoy?

1. $972 000 2. $973 440 3. $1440

Página 92

¿Cómo voy?

1.

1,52	52 %	Positivo
0,97	3 %	Negativo
0,65	35 %	Negativo
1,12	12 %	Positivo

2. 6561 hectáreas

3.
a.

				506 250	379 687,5

b. $f(t) = 0{,}75\ f(t-1)$ c. Negativo; 0,75

4.

	979,5521
	906,9926
	839,808
	772,6234
	710,8135

5. $f(m) = 0{,}88\ f(m - 1000)$

6. $\frac{7}{6}$, o bien, 1,167, aproximadamente.

Página 93

7.
a. V, si fuera constante, entonces no tendría crecimiento o decrecimiento porcentual.
b. F, por ejemplo, si deposito $p en un banco con una tasa fija, nunca tendré $0, por lo que no pasaría por el origen.
c. V, cada vez se tiene menor valor.
d. V, cada vez se tiene un mayor valor.

8.
a. $280 000 b. $281 475 c. $1475

9.
a. 10 296,16 UF b. 34,32 UF

Lección 4: Ecuaciones cuadráticas

Página 94

1.
a. $x = 1$ c. $x = \frac{23}{3}$ e. $x = \frac{5}{3}$ g. $x = \frac{5}{19}$
b. $x = -1$ d. $x = \frac{8}{3}$ f. $x = \frac{11}{16}$ h. $x = \frac{19}{7}$

2.
a. 3,5 b. 17; 18; 19 c. 130

3.
a. –7 c. 29 e. 0
b. 31 d. 135 f. 1024

Página 95

4.
a. $x^2 - 12x + 35$, dos binomios con término común.
b. $x^2 + 4x - 60$, binomios con término común.
c. $x^2 - 12x + 36$, cuadrado de un binomio.
d. $x^2 - 10x - 11$, binomios con término común.
e. $16x^2 + 36x - 22$, binomios con término común.
f. $x^2 - 6x + 5$, binomios con término común.
g. $x^2 - 144$, suma por diferencia.
h. $4x^2 - 20x + 25$, cuadrado de un binomio.
i. $9x^2 - 9$, suma por diferencia.
j. $x^2 - \frac{1}{4}$, suma por diferencia.
k. $x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{9}{4}$, binomios con término común.
l. $25x^2 - 5x - 12$, dos binomios con término común.

5. Suma por diferencia: d. y e. Cuadrado de un binomio: a. Binomio con término común: b. y g.

6.
a. $(x - 7)(x + 7)$ g. $(x - 2)(x - 5)$
b. $(3x - 1)(3x + 1)$ h. $(x - 10)(x + 16)$
c. $(x - 1)^2$ i. $(x - 5)(x - 6)$
d. $(2x - 1)^2$ j. $(3x - 1)(x - 2)$
e. $(4x + 2)(x - 1)$ k. $(3x + 1)(2x + 1)$
f. $(x - 2)(x - 1)$ l. $(3x - 2)(3x - 1)$

Tema 1: ¿Cuándo se dice que una ecuación es cuadrática?

Página 96

1.
a. Pamela: (18 – 10) 10 = 80. Álvaro: (18 – 8) 8 = 80
b. Ambos.

2.
a. Sí, ya que los dos llegan a posibles lados con los cuales el área da 80 m².
b. Sí, ya que es un problema con dos soluciones por ser una ecuación de segundo grado.

3. $(18 - x)\ x = 80$.
a. No, al tener un término x^2, llegaremos a dos soluciones.
b. $x^2 - 18x + 80 = 0$
c. x está elevado a dos.
d. Respuesta abierta.

Página 97

Paso 1: 49; 0; 10; tiempo.

Paso 2:

a. 2
b. Dos posibles soluciones.
c. Dos.

Paso 3:

a. $t^2 - \frac{49}{5} = 0$
b. $\pm \frac{7}{5}\sqrt{5}$

Paso 4:

a. Podemos reemplazar los valores en la ecuación y ver si se cumple la igualdad.
b. Sí, ya que la ecuación es una parábola que cruza el eje X en dos puntos.
c. No, ya que una de ellas es negativo y desde que se dejó caer un objeto el tiempo es positivo. El objeto se demoró $\frac{7}{5}\sqrt{5}$ s.

Página 98

1. $-5x - 5x^2 + 5 = 0$; $x^2 + 2x^2 + 12 = 0$; $8x^2 = 16$; $200 = x \cdot x - 5x$; $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 3 = 0$
2.
a. Ecuación de tercer grado.
b. Es un polinomio y no una ecuación.
c. Tiene dos incógnitas de primer grado.
d. Ecuación lineal.
e. Ecuación de tercer grado.
f. Es una igualdad de tipo 0 = 0.
3.
a. $x^2 + x = 0$, de segundo grado.
b. $2x - 2 = 0$, de primer grado.
c. $2x - 10 = 0$, de primer grado.
d. $x^2 - 2x = 0$, de segundo grado.
e. $x^2 + 16x + 52 = 0$, de segundo grado.
f. $40x^2 + 200x - 1000 = 0$, de segundo grado.
g. $3x^2 + 3x = 0$, de segundo grado.
4.
a. $a = 1$, $b = 5$, $c = -24$
b. $a = 2$, $b = -6$, $c = 4$
c. $a = 1$, $b = 0$, $c = -25$
d. $a = 1$, $b = 16$, $c = 0$
e. $a = -1$, $b = 5$, $c = -3$
f. $a = 5$, $b = -1$, $c = 6$

Página 99

5.

$x(x + 10) = 50$
$(x + 5)(x - 6) = 0$
$\frac{6x \cdot 8x}{2} = 144$

6.

		5
		–1; 0
		–2
		14
		–7; 5
		0; 2

¿Qué aprendí hoy?

1.
a. Sí, $a = 15$, $b = 12$, $c = 0$
b. Sí, $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$
c. Sí, $a = 1$, $b = 2$, $c = -20$
d. No.
2.
a. No, puede tener dos, una o ninguna solución en los números reales.
b. V

Tema 2: ¿En qué consiste la resolución por factorización?

Página 100

1.
a. Porque al desarrollar la expresión podemos encontrar un x elevado a dos.
b. Habría que probar infinitos valores de x.
c. $4x^2 - 136x + 480 = 0$
d. $x^2 - 34x + 120 = 0$
2. $x^2 - 34x + 120 = 0$; $(x - 4)$; $(x - 30)$;
a. Sí, 4 y 30.
b. Debe ser cero, para que el producto sea 0, al menos uno de los factores debe ser 0.
c. 4 y 30
d. Solo 4, si aceptamos 30 como una solución tendríamos largo y ancho negativo en el cuadro.
3. 10 y 8

Página 101

1.

Paso 1: $90 + 15t - 5t^2 = 0$; $t^2 - 3t - 18 = 0$; Trinomio cuadrado con término común ya que se factoriza en $(t - 6)(t + 3) = 0$

Paso 2: $90 + 15t - 5t^2$; $(t - 6)$; $(t + 3)$; $t - 6$; 6; $t + 3$; –3

Paso 3: 6; 6; –3; –3; No, solo 6, ya que el problema no admite medida de tiempo negativa.

Página 102

2.

Paso 1: $(x + 4)$; $(x + 4)$; $(x + 4)$; $(x + 4)$; $x^2 + 4x - 117 = 0$; Trinomio de cuadrado con término común, ya que se factoriza como $(x + 13)(x - 9) = 0$.

Paso 2: $x^2 + 4x - 117$; $(x + 13)$; $(x - 9)$; $x + 13$; $x - 9$; –13; 9

Paso 3: –13; –13; 9; 9; 9; 13; No, solo 9, ya que no podemos tener una cantidad negativa de filas.

Página 103

3.

Paso 1: $x^2 - 64$; $(x - 8)$; $(x + 8)$; $x - 8$; $x + 8$; 8; –8

Paso 2: 8; el lado del cuadrado mide 8; –8; el lado del cuadrado mide –8; No, solo 8, ya que un lado de un cuadrado no puede tener medida negativa.

Página 104

1.

	$x(x + 4) = 0$	0	–4
	$(x - 7)^2 = 0$	7	
	$(x - 5\sqrt{5})(x + 5\sqrt{5}) = 0$	$5\sqrt{5}$	$-5\sqrt{5}$
	$(x - 7)(x + 4) = 0$	7	–4
	$10x(x - 5) = 0$	0	5
	$6(x + 1)^2 = 0$	–1	
	$16x(2x - 1) = 0$	0	$\frac{1}{2}$
	$4x(4x + 1) = 0$	0	$-\frac{1}{4}$
	$(2x + 3)^2 = 0$	$-\frac{3}{2}$	
	$(2x + 2)(2x + 3) = 0$	–1	$-\frac{3}{2}$
	$(2x - 20)(x - 5) = 0$	5	10
	$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

2.
a. $(4 - 5x)(2x + 3) = 0$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$
b. $(5 - 3x)(2x + 1) = 0$, $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$
c. $(9x - 5)(2x + 3) = 0$, $x_1 = \frac{5}{9}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$
d. $(3x + 4)(2x + 5) = 0$, $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$

Página 105

3.
   a. 11 y 12
   b. 8 cm y 6 cm
   c. Los números son 2 y 3.
   d. 10 m y 17 m
   e. 5 cm y 10 cm
   f. 30
   g. 9 m y 12 m
   h. 6 cm

¿Qué aprendí hoy?

1.
   a. $(x-6)(x+6)=0$, $x=6; -6$
   b. $(x-5)(x+2)=0$, $x=5; -2$
   c. $5(x-2)(x+2)=0$, $x=2; -2$
   d. $(x+2)(x-1)=0$, $x=1; -2$
2. 12 cm

Tema 3: ¿Cuál es el algoritmo para completar el cuadrado?

Página 106

1.
   a. Completar cuadrados.
   b. Sí
   c. Sí, el determinante es 36.
   d. $x=-3; -9$
2.
   a. Para completar cuadrado.
   b. No, se mantiene la igualdad.
   c. $2|-8|$
   d. Para tener en cuenta los distintos signos que puede tener la raíz.
   e. Sí; No.
3.
   a. Determinante negativo.
   b. Al completar cuadrado, el lado derecho de la ecuación negativo.

Página 107

1. $x-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$; $x-\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$; $x=2$; $x=-\frac{1}{2}$

Página 108

1.
   a. Dejar lo que dependa de x al lado izquierdo, y lo que no, al lado derecho.
   b. Dividir por 17.
   c. 4
   d. Lado donde no hay x es negativo, por lo que la ecuación no tiene solución real.
2.
   a. En la cuarta línea suma ambos lados por $\frac{5}{6}$, pero debería sumar por $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Y en la quinta línea, usa raíz solo en el lado izquierdo, por lo que el lado derecho debería quedar $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Las soluciones correctas son 1 y $\frac{2}{3}$.
   b. En la segunda línea resta ambos lados por $\frac{5}{4}$ y debería sumar por ese valor, por lo que el lado derecho quedaría $\frac{5}{4}$ y no $-\frac{5}{4}$. Las soluciones correctas son $\frac{3-\sqrt{14}}{2}$ y $\frac{3+\sqrt{14}}{2}$.

Página 109

3.
   a. -15 y 5
   b. $2\pm\sqrt{3}$
   c. -7 y -1
   d. 2 y 3
   e. No tiene.
   f. $-\frac{3}{2}$
   g. $-\frac{1}{2}$
   h. $\frac{2\pm\sqrt{19}}{3}$
   i. No tiene.

4.
   a. 3 m y 4 m
   b. Los números son 26 y 28.
   c. 10 m y 50 m
   d. 40 personas.
   e. 3 m

¿Qué aprendí hoy?

1.
   a. $-\frac{1}{2}$ y 4
   b. No tiene
2. 7 unidades.

Tema 4: ¿Cómo se aplica la fórmula general?

Página 110

1.
   a. Existen dos fórmulas, una en que se suma esa raíz y, la otra, en que se resta.
   b. No, hay veces que una ecuación cuadrática no tiene solución real.
2.
   a. 2; 5; -3
   b. $\frac{-5\pm\sqrt{5^2+4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}$; 0,5; -3
3.
   a. 0,269; -3,102
   b. 1
   c. No tiene.
4.
   a. No
   b. Respuesta abierta.

Página 111

1.

Paso 1: 2x; 2y; x; y; 2x; 2y; 45 – y; (45 – y)

Paso 2: –1; 45; –1; 45; –500

Paso 3: 25; 20

Paso 4:

	25	20	SI
	20	25	SI

Un lado mide 20 m y el otro mide 25 m.

Página 112

2.
   a. 1,17 s y 2,1 s
   b. 3,27
   c. Nunca

Paso 2:

	–5	16	–12	$\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 5\cdot 12}}{2\cdot 5}$	1,2	2
	–5	16	0	$\frac{-16\pm\sqrt{16^2+4\cdot 5\cdot 0}}{2\cdot 5}$	0	3,2
	–5	16	–80	$\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 5\cdot 80}}{2\cdot 5}$	No tiene	No tiene

Paso 3:

	1,2	2	Ambos, cuando está subiendo y cuando está bajando
	0	3,2	Solo 3,2. Cero es el momento inicial
	No tiene	No tiene	Nunca está a 80 m

Página 114

1.

	1	6	8	$\frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$	-4	-2
	1	-1	-2	$\frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$	-1	2
	2	-5	-3	$\frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$	$-0{,}5$	3
	4	8	3	$\frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4}$	$-1{,}5$	$-0{,}5$
	1	-10	20	$\frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1}$	$5 - \sqrt{5}$	$5 + \sqrt{5}$
	5	0	125	$\frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 5 \cdot 125}}{2 \cdot 5}$	No tiene	
	3	-7	0	$\frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3}$	0	$\frac{7}{3}$
	4	-8	26	$\frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 26}}{2 \cdot 4}$	No tiene	
	12	6	0	$\frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 12 \cdot 0}}{2 \cdot 12}$	$-0{,}5$	0
	1	6	-27	$\frac{-6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2 \cdot 1}$	-9	3
	-100	0	400	$\frac{0 \pm \sqrt{0^2 + 4 \cdot 400 \cdot 100}}{-2 \cdot 100}$	2	-2
	5	-6	-5	$\frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 5 \cdot 5}}{2 \cdot 5}$	$\frac{3 + \sqrt{34}}{5}$	$\frac{3 - \sqrt{34}}{5}$
	9	-6	1	$\frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9}$	$\frac{1}{3}$	

2.
- a. $-220 < 0$ no tiene.
- b. $-\frac{80}{9} < 0$ no tiene.
- c. $53 > 0$, tiene dos.
- d. $-132 < 0$, no tiene.
- e. $81 > 0$, tiene dos.
- f. $-359 < 0$, no tiene.

Página 115

3.
- a. $\frac{-2m \pm \sqrt{4m^2 + 4r^2}}{2} = -m \pm \sqrt{m^2 - r^2}$
- b. $\frac{3m \pm \sqrt{9m^2 - 8m^2}}{4}$ soluciones: $\frac{1}{2}$m y m.

4.
- a. $m > 20$ o $m < -20$
- b. $m = 20$
- c. $m < 20$ o $m > -20$

5. 18 cm. El resultado es una caja con forma de cubo.

¿Qué aprendí hoy?

1.
- a. $\frac{-14 \pm \sqrt{14^2 + 4 \cdot 10 \cdot 2}}{2 \cdot 10} = -0{,}7 \pm 0{,}1\sqrt{69}$
- b. $\frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 12}}{2 \cdot 4}$ No tiene raíces en los números reales.

2. La altura mide 6 cm y la base 18 cm.

Página 117

1. 8 y 9
2. $2\sqrt{2} \pm 1$ cm

Página 118

¿Cómo voy?

1.
- a. F, determinante es -28
- b. V, $x = \pm\sqrt{75}$
- c. V, al desarrollar la expresión vemos x^2.
- d. V, su determinante es -32.
- e. V
- f. V
- g. F, si el determinante es negativo entonces no tiene soluciones en los números reales.
- h. F, el determinante es $b^2 - 4ac$.

2.

	$4x^2 + 12x = 0$	4	12	0
	$x^2 - x + 39 = 0$	1	-1	39
	$3x^2 - 16x + 16 = 0$	3	-16	16
	$8x^2 + 4x = 0$	8	4	0
	$x^2 + 11x - 60 = 0$	1	11	-60
	$x^2 - 9x - 11 = 0$	1	-9	11

3.
- a. Sí
- b. No
- c. No
- d. Sí
- e. Sí
- f. Sí

Página 119

4.

2
8
2; -7
-4; -3
1
0

5.
- a. 9
- b. -5; 3
- c. 6; 3
- d. 6; 7
- e. -13; 12
- f. 15; -2

6.
- a. No tiene
- b. 6 y 5
- c. $-4 \pm 2\sqrt{14}$
- d. $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- e. 4 y $-\frac{1}{2}$
- f. -12 y -6

7.
- a. 20, dos.
- b. -352, ninguna.
- c. 0, una.
- d. -12, ninguna.
- e. -2500, ninguna.
- f. 49, dos.

Página 120

8.
- a. -2; 7
- b. -5; -6
- c. -1; 1,5
- d. $-6 \pm \sqrt{5}$
- e. No tiene
- f. $\frac{4}{3}$; 2

9. 24

10.
- a. 10 cm, 24 cm y 26 cm
- b. x: medida de la hipotenusa.
- c. $x^2 + (34 - x)^2 = 26$

11.
- a. 10 meses.
- b. x: edad del lobo marino.
- c. $\frac{1}{4}x^2 - x + 68 = 83$

12. Jorge tiene 36 años y Francisca tiene 6 años.

13. –5

14.

a. $k > -\frac{1}{20}$

b. $k = -\frac{1}{20}$

c. $k < -\frac{1}{20}$

15.

a. $-x^2 + 54x - 200 = 0$

b. 50 m; 4m

c. Los 2 m de altura se alcanzan en dos puntos, a los 4 m y a los 50 m en horizontal.

Página 121

16.

a. 12 m

b. 2 m y 10 m. Los 3 m de altura se alcanzan a los 2 m y a los 10 m horizontales.

Lección 5: Funciones cuadráticas.

Página 122

1.

a. $x = -2$, $y = 1$

b. $m = \frac{1}{2}$

c. $y = \frac{1}{2}x + 1$

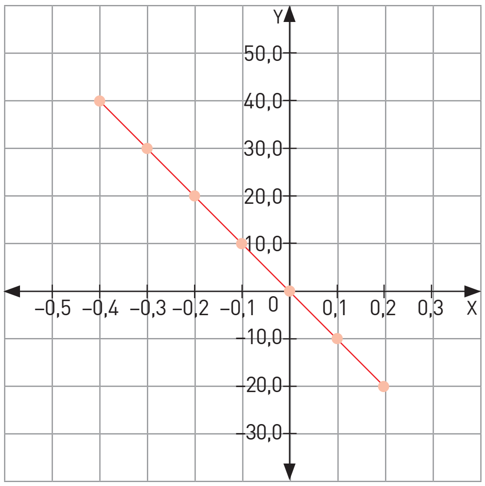
Página 123

2.

a.

x [m]	F(x) [N]
–0,4	40,0
–0,3	30,0
–0,2	20,0
–0,1	10,0
0,0	0,0
0,1	–10,0
0,2	–20,0
0,3	–30,0
0,4	–40,0

b.

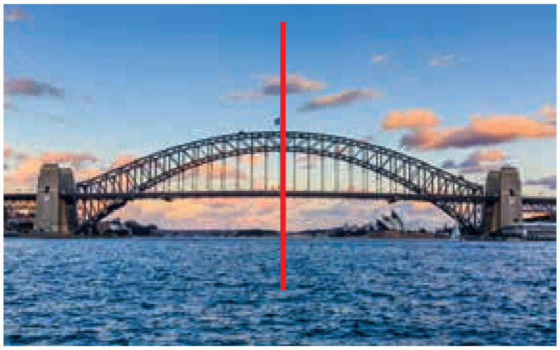


c. Sí, ya que para todo x hay una imagen, y cada elemento de x tiene sólo una imagen.

Tema 1: ¿Cuándo se dice que una función es cuadrática?

Página 124

1. Sí es simétrica la estructura



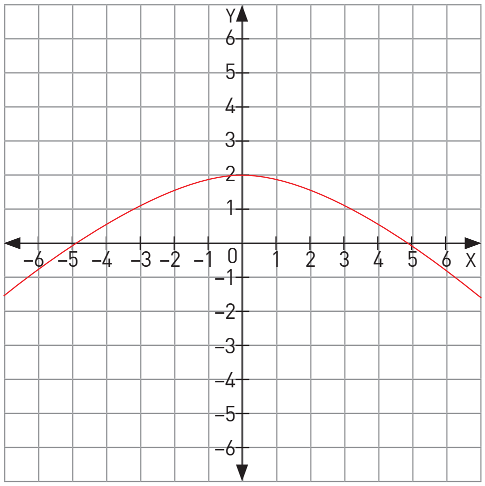
2. El punto más alto del puente corresponde al lugar en donde se encuentra la bandera, y corresponde al eje de simetría.
3. Continuaría de la misma forma en que se ve en la imagen.

Página 125

4.

x	y	f(x)
–6	–1	–0,88
–5	0	0
0	2	2
5	0	0
6	–1	–0,88

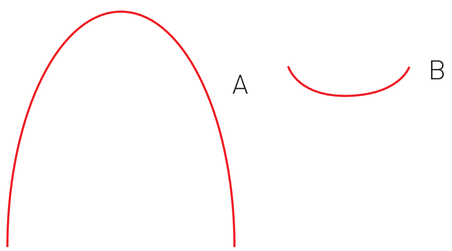
5. Se puede describir como una parábola con concavidad negativa.



6. Se puede relacionar con todos ellos, ya que es una buena función de aproximación de los puntos, pero pasa exactamente por los puntos (–5, 0), (0, 2), (5, 0).
7. Se puede interpretar como el vértice de una parábola de concavidad negativa.

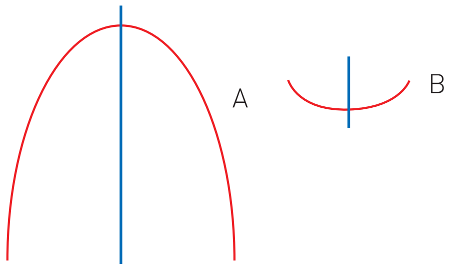
Páginas 126

1.
   a.



   b. A: Convexa B: Cóncava

   c.



   d. En A el vértice es un punto máximo. En B es un punto mínimo.

Página 128

1.

Función	¿cuadrática?	Coeficientes		
		a	b	c
$f(x) = 5x^2$	Sí	5	0	0
$g(x) = x^2 - 2$	Sí	1	0	2
$h(x) = -2x^3 + 2x + 4$	No			
$q(x) = (x + 1)(x - 9)$	Sí	1	−8	−9
$r(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 5)$	No			
$t(x) = (2x + 1)^2 - 4x - 1$	No			

2.
   a. 6
   b. 2
   c. $-\frac{5}{2}$
   d. 2,6
   e. −71
   f. 22

3. Francisca tiene la razón, porque $a = 1$, $b = 5$ y $c = 0$. $a \neq 0$ por lo tanto es cuadrática.
4. Sí, intersecará al eje X y lo hará en 2 puntos.

Página 129

5.
   a. Concavidad positiva o hacia arriba. Vértice es mínimo. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$
   b. Concavidad negativa o hacia abajo. Vértice es máximo. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

¿Qué aprendí hoy?

   a. Sí se le puede relacionar con una función cuadrática.
   b. Concavidad negativa y vértice el punto más alto de la trayectoria.
   c. Corresponden a $f(x) = 0$ siempre que la altura desde la que se colocó la manguera sea a nivel de suelo.
   d. 4 metros.
   e. 4 metros.
   f. El vértice.

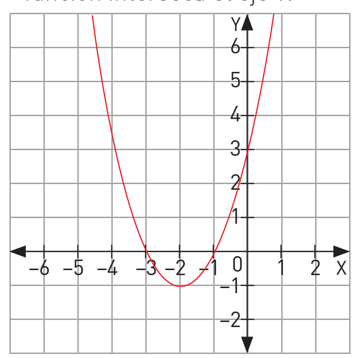
Tema 2: ¿Cómo se interpretan los parámetros?

Página 130

1. Sí son iguales, ya que al desarrollar la expresión de g(x), se obtiene que todos los coeficientes de f(x) son iguales a los de g(x).
2.

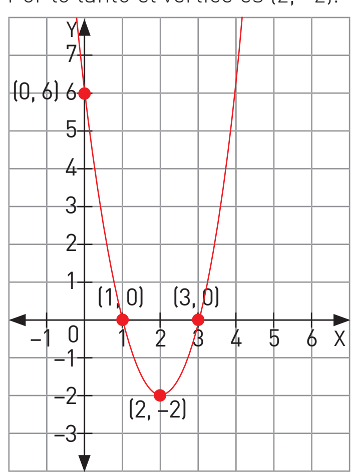
x	f(x)	g(x)
−3	0	0
−1	0	0
0	3	3
1	8	8
2	15	15
4	35	35

3. Son iguales.
4. Sí son iguales.
5. g(x) es más fácil de graficar, ya que el valor de x sólo se evalúa o reemplaza en 1 ocasión.
6. En g(x) los coeficientes tienen relación con la coordenada del vértice y en f(x) c tiene relación con el punto en que la función interseca el eje Y.



Página 131

1.
   a. $f(0) = 0$, entonces el punto es $(0, 6)$.
   b. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, entonces los puntos de intersección con el eje X son $(1, 0)$ y $(3, 0)$.
   c. $a = 2$, $b = -8$ y $c = 6$. $-\frac{b}{2a} = 2$, $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -2$. Por lo tanto el vértice es $(2, -2)$.
   d.



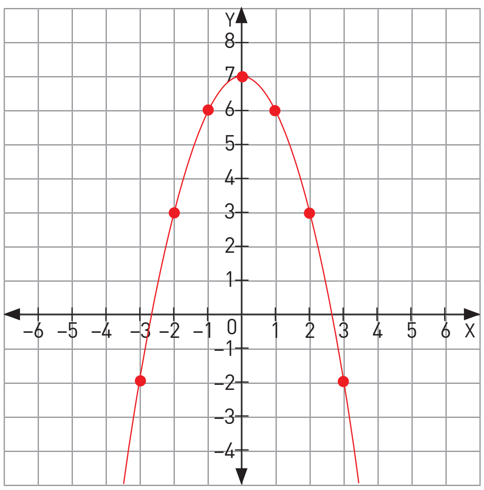
Página 132

2. Ya resuelto como ejemplo.
3. $f(x) = a(x-2)^2 - 5$. Al reemplazar el punto $(-3, 9)$ se obtiene que $a = -4$, por lo tanto $f(x)$ en su forma canónica es: $f(x) = -4(x-2)^2 - 5$, y en su forma general: $f(x) = -4x^2 + 16x - 21$. La función tiene concavidad negativa porque $a < 0$. El eje de simetría corresponde a la recta $x = 2$.

Página 134

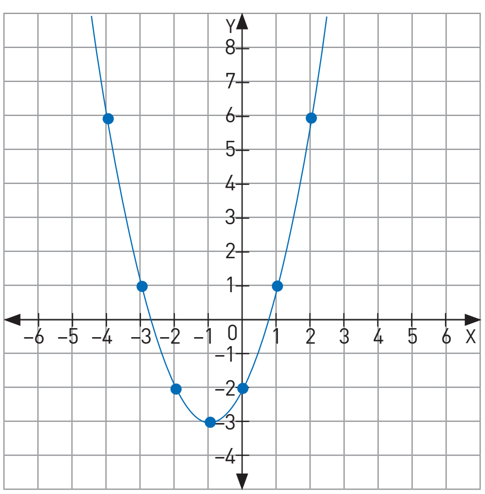
1.
   a. F, si $a < 0$ la función es cóncava hacia abajo y su vértice es máximo.
   b. V
   c. V
   d. F, como el vértice se encuentra en $(0, 3)$ y $a < 0$, por lo tanto es cóncava hacia abajo, intersecará al eje x en 2 puntos.
2.
   a. Positiva.
   b. Negativa.
   c. Negativa.
   d. Negativa.
3.
   a.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	−2	3	6	7	6	3	−2



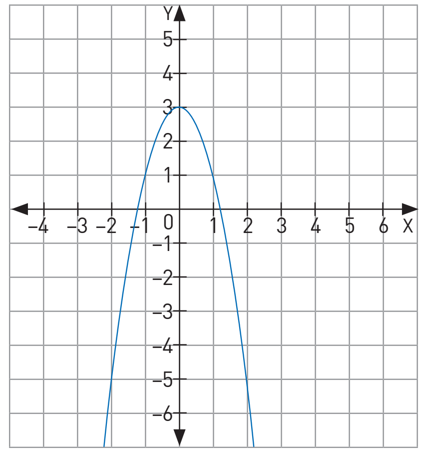
   b.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
g(x)	6	1	−2	−3	−2	1	6

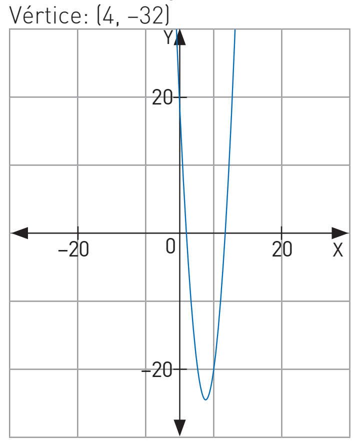


Página 135

4.
   a. Interseca con eje Y: 3; Interseca con eje X: −1,225 y 1,225; Vértice: (0, 3)



   b. Interseca con eje Y: 16; Interseca con eje X: 0,734 y 7,266; Vértice: (4, −32)



5.
   a. $f(x) = 4x^2 + 5$, vértice en $(0, 5)$, eje de simetría en $x = 0$.
   b. $f(x) = -4x^2 + 9$, vértice en $(0, 9)$, eje de simetría en $x = 0$.
   c. $f(x) = 2(x - 0,75)^2 - 15,125$, vértice en $(0,5; -15,125)$, eje de simetría en $x = 0,75$.
   d. $f(x) = (x - 3,5)^2 - 22,25$, vértice en $(3,5; 22,25)$, eje de simetría en $x = 3,5$.
   e. $f(x) = (x + 3)^2$, vértice en $(-3, 0)$, eje de simetría en $x = -3$.
   f. $f(x) = 4(x - 5)^2 + 7$, vértice en $(5, 7)$, eje de simetría en $x = 5$.
6. $k = 8$
7.
   a. No, ya que ambos puntos pasan por la misma línea vertical con $x = 1$.
   b. Se tienen dos valores o imágenes para un mismo elemento del dominio, por lo tanto no es una función o también, $f(1) = 2$ y $f(1) = -1$, lo que no es posible.
8.
   a. Los dos puntos para un mismo valor de x tienen diferentes valores de y.
   b. El primer y tercer punto para un mismo valor de x tienen diferentes valores de y.
   c. Corresponde a la función $f(x) = 5$.
   d. Sí existe una función cuadrática que pase por estos puntos, puede tener la forma $y = 0,0333x^2 - 0,4x + 6,0667$.

¿Qué aprendí hoy?

1. $y = -(x + 1)^2 + 4$
2.
   a. F, tiene concavidad negativa, ya que el coeficiente $a < 0$.
   b. V, evaluando se obtiene $f(0) = -20$.
   c. F, de la expresión canónica se puede ver que su vértice está en $(-4, -4)$.
   d. F, evaluando se obtiene $f(4) = 68$.
   e. F, de su vértice se puede ver que su eje de simetría es la recta $x = -4$.

Tema 3: ¿Cómo cambia la gráfica según cada parámetro?

Página 136

1.
   a. Si, ambas funciones son cuadráticas ya que ambas tienen forma de parábola
   b. Ambas tienen la misma forma pero sus vértices se encuentran en distintos puntos. De otra forma, los coeficientes a son iguales entre ellas, y b y c son diferentes.
2.
   a. f(x) al no tener coeficientes b y c se encuentra con su vértice en el origen. Dados los gráficos se puede deducir que los coeficientes a de todas las funciones son iguales.
   b.

x	f(x)	g(x)	h(x)
–3	9		
–2	4		2
–1	1		–1
0	0		–2
1	1	4	–1
2	4	1	2
3	9	0	
4	16	1	
5	25	4	

   c. Considerando el punto que corresponde al y mínimo, se mueva en las mismas proporciones hacia ambos lados, por lo tanto las formas de las gráficas de las 3 funciones son las mismas.
   d. $g(x) = (x - 3)^2$, $h(x) = x^2 - 2$
3.
   a. Porque no cumple con la función de h(x), $h(1) = -1 \neq 1$.
   b. $y = h(x)$, ya que ambas tienen la misma ecuación.
   c. Son todos los puntos al interior de la parábola, no incluyendo sus bordes. Todos los puntos fuera de la parábola son menores a h(x).

Página 137

1.
   a. Sí
   b. $h(x) = 1{,}5x^2$ se ubicaría entre $y = x^2$ e $y = 2x^2$.
   c. $g(x) = -0{,}8x^2$ se ubicaría entre $y = -0{,}5x^2$ e $y = -x^2$.
   d. Tiene la misma forma que $y = 2x^2$, pero con el vértice desplazado a (1, 1).
2.
   b. De g(x) es (2, 0), de h(x) es (0, 2) y de p(x) es (2, 2).

Página 138

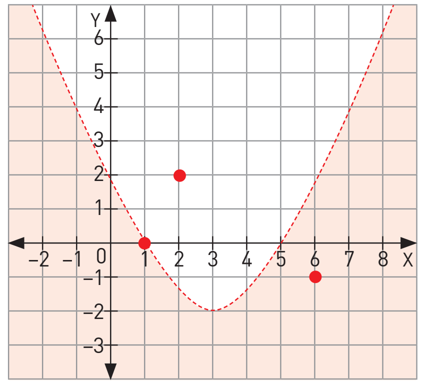
3.

Paso 1. Función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

Paso 2. A = (1, 0); B = (2, 2); C = (6, –1)

Paso 3. A no cumple la desigualdad. B no cumple la desigualdad. C cumple la desigualdad.

Paso 4.



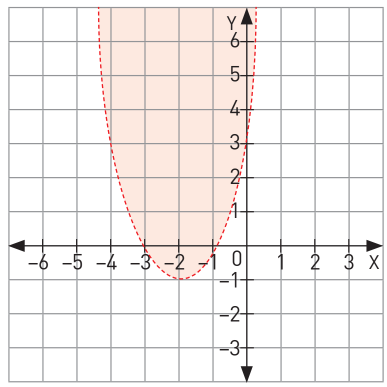
Página 140

2.

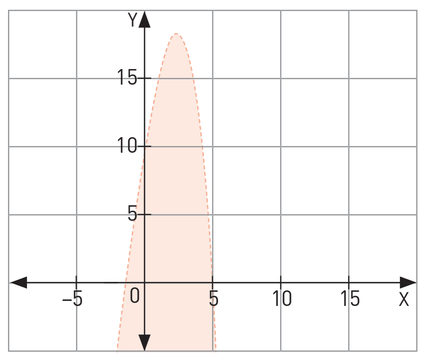
$f(x) = 4x^2$ | $p(x) = 4x^2 - 2$
$g(x) = 4(x + 4)^2$ | $q(x) = 4(x - 3)^2 + 1$
$h(x) = 4(x + 3)^2 - 2$ | $r(x) = 4(x - 4)^2 - 1$

Página 141

3.
   a.



   b.



   c. Se incluirían los puntos sobre las parábolas, por lo que las líneas en los gráficos ya no serían segmentadas, sino que continuas.
4. Respuesta abierta.
5.
   a. $T_1 = (-1, -4)$
   b. $h(x) = 9(x + 1)^2 + 1$

Tema 4: ¿En qué se aplican las funciones cuadráticas?

Página 142

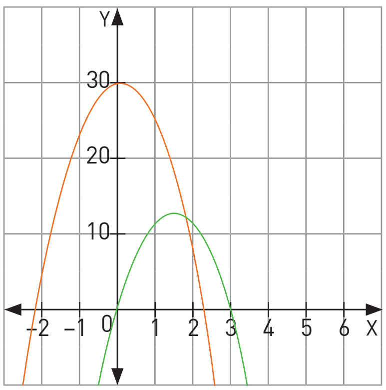
1.
   a. 50 000
   b. 800
   c. Las ganancias seguirían bajando, hasta convertirse en pérdidas. Esto es porque se está a la izquierda del vértice de la parábola que describe G(p).

2.
- a. Dado que $a < 0$, la función tiene un valor máximo, que corresponde al vértice y que se asocia al valor al que deberían venderse las empanadas para obtener la ganancia máxima.
- b. A $875
- c. $53 125

Página 143
- a. $I(v) = -0{,}25v^2 + 600v$
- b. El vértice de la parábola es (1200, 360 000). 1200 es el precio al que se deberían vender sus artesanías para alcanzar un ingreso máximo de 360 000.

Página 144

2.
- a. $A(t) = -5t^2 + 15t$. $B(t) = -5t^2 + 30$.
- b. $t = 1{,}5$ s, que corresponden a 11,25 m.
- c. A llega al suelo en $t = 3$ s. B llega al suelo en $t = 2{,}2495$ s.
- d. Ambos alcanzan la misma altura cuando $A(t) = B(t)$, eso es cuando $t = 2$ segundos y altura = 10 metros.



3.
- a. $A(x) = -x^2 + 10$
- b. Ancho debe ser 5 cm, área máxima 25 cm.
- c. 5 cm
- d. Al maximizar el área, dado el largo dependiendo del ancho, el rectángulo se transforma en un cuadrado.

Página 145

4.
- a. $I(v) = -0{,}6v^2 + 500v$; $C(v) = -36v + 37\,000$
- b. $v = 416{,}667$; $I = 104\,166{,}667$
- c. $G(v) = 0{,}6v^2 + 536v - 37\,000$
- d. $v = 446{,}667$; $G = 8276{,}667$

5.
- a. 112 metros
- b. 10 segundos

6. 1,463 segundos

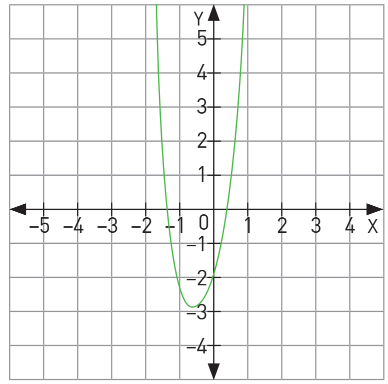
¿Qué aprendí hoy?
- a. 26,667 segundos.
- b. En $t = 13{,}333$ segundos.
- c. A los 5333,333 metros.

Página 146

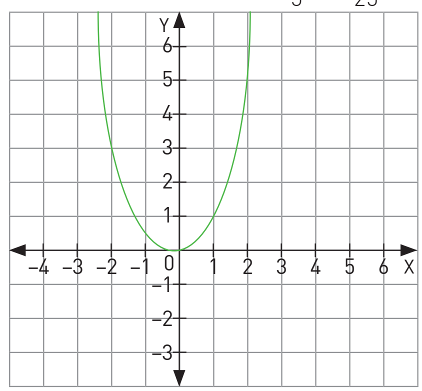
¿Cómo voy?

1.
- a. Sí, con concavidad positiva cuyo vértice es punto mínimo.
- b. No, ya que para cada x en el gráfico hay más de un y.
- c. Sí, con concavidad negativa cuyo vértice es punto máximo.

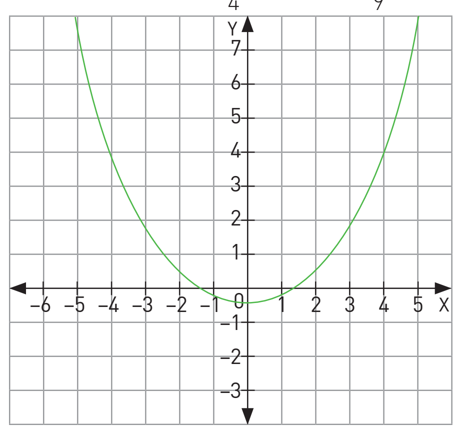
2.
- a. Sí es cuadrática. $a = 5$, $b = 4$, $c = -2$



- b. No es cuadrática.
- c. No es cuadrática.
- d. No es cuadrática.
- e. Sí es cuadrática; $a = 1$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{1}{25}$



- f. Sí es cuadrática. $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$, $c = -\frac{4}{9}$



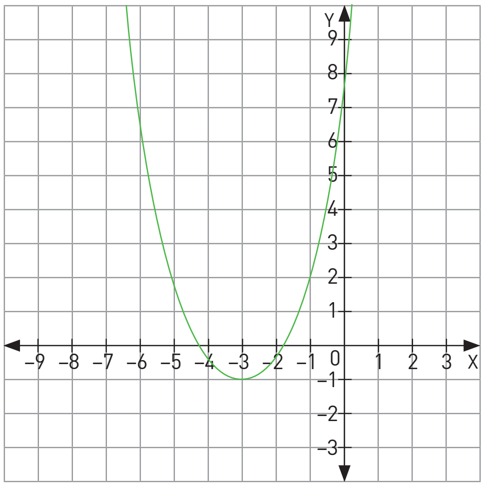
3.
- a. $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 1$
- b. $-5x^2 + 30x - 40 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$
- c. $\frac{1}{4}x^2 - x + 3 = 0$; No tiene solución.

Página 147

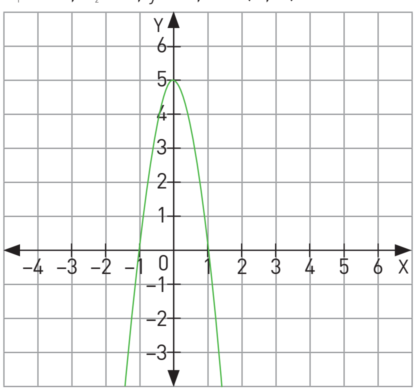
4.
- a. Concavidad negativa, con vértice punto máximo.
- b. Concavidad positiva, con vértice punto mínimo.
- c. Concavidad positiva, con vértice punto mínimo.
- d. Concavidad negativa, con vértice punto máximo.
- e. Concavidad negativa, con vértice punto máximo.
- f. Concavidad positiva, con vértice punto mínimo.

5.

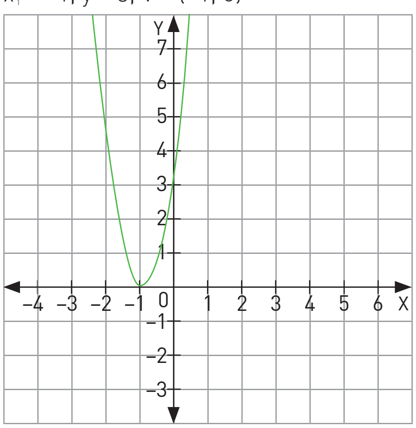
a. $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $y = 8$, $V = (-3, 1)$



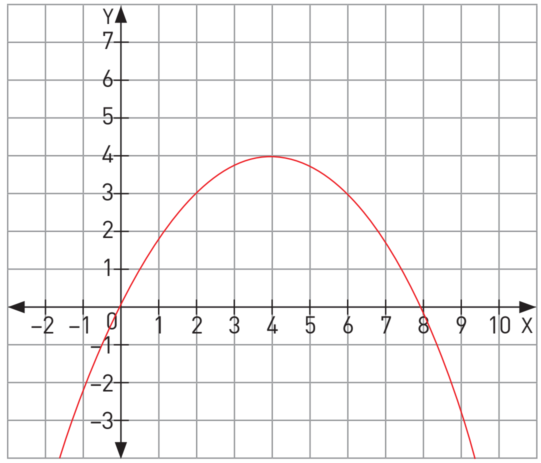
b. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y = 5$, $V = (0, 5)$



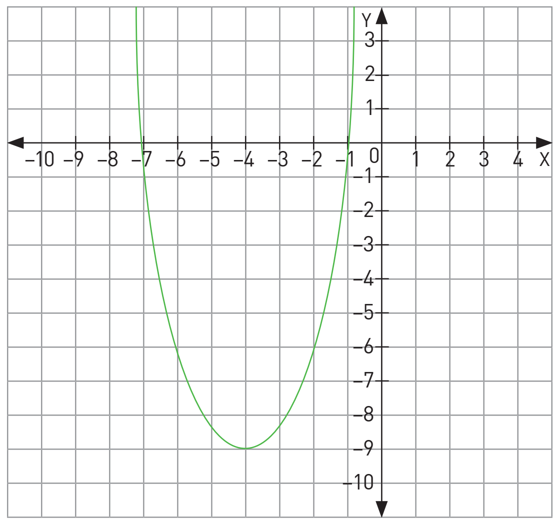
c. $x_1 = -1$, $y = 3$, $V = (-1, 0)$



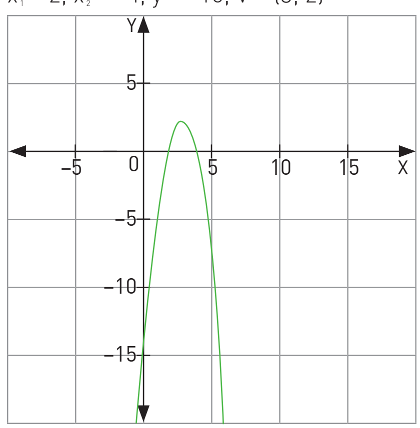
d. $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $y = 0$, $V = (4, 4)$



e. $x_1 = -7$, $x_2 = -1$, $y = 7$, $V = (-4, -9)$



f. $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $y = -16$, $V = (3, 2)$



6.

a. $k = 0{,}1875$

b. $m = 16$

c. $n = 0{,}726$

d. $t = 3$

e. $u = 16$

f. $k < n < t < n, m$

7.

a. $f'(x) = x^2$

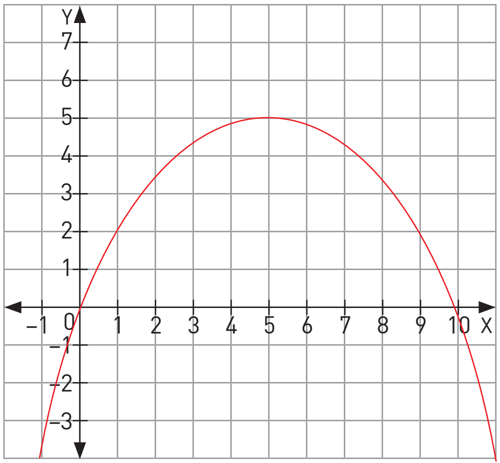
b. $g'(x) = -5(x - 2)^2 + 3$

c. $h'(x) = \frac{1}{8}(x + 1)^2 - 3$

Página 148

8.

a. Tiene forma de parábola con concavidad negativa, dada por la forma cuadrática de la ecuación.
b. 4,2 metros.
c. 5 metros máximo, recorre horizontalmente 5 metros.
d. 10 metros.
e.



9.

a. La posición de A, si es negativo, la posición de B.
b. De acuerdo a la imagen, y asumiendo que en ambos casos se ubiquen en la misma posición, sus vértices y coeficientes serían iguales, con la salvedad que el coeficiente cuadrático sería negativo en el caso de B.
c. Disminuirlo o hacerlo más cercano a cero.

10.

a. $f(x) = \frac{1}{3}(x + 4)^2$
b. (2, 1)
c. No tienen gráficas idénticas, tienen formas idénticas, pero con sus vértices desplazados o en distintos puntos.

11.

a. Sector 2.
b. El otro sector tiene la condición $y \geqslant 3x^2 - 42x + 148$.
c. Sector 2.

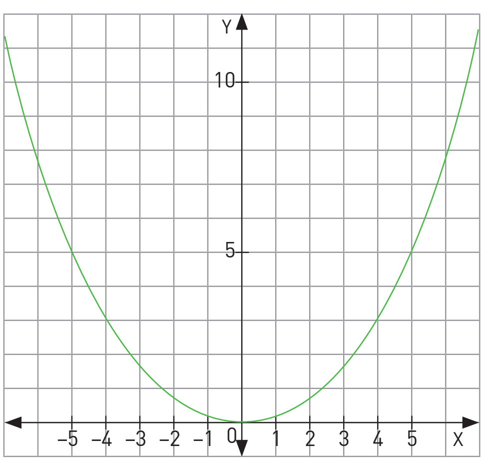
Página 149

12.

a. 300
b. 30 000

13.

a.



b. 7,746 segundos

14.

a. $y(t) = 15 + 10t - 5t^2$
b. la altura máxima de 20 metros se logra trascurrido 1 segundo.
c. En 3 segundos.

Lección 6: Función Inversa

Página 150

1.

a. $x = \frac{4-3y}{5}$, $y = \frac{4-5x}{3}$
b. $x = -4 - 2y$, $y = -\frac{1}{2}x - 2$
c. $x = 9y - \frac{14}{3}$, $y = \frac{1}{9}x + \frac{14}{27}$
d. $x = \sqrt{y-5}$, $y = x^2 + 5$

Página 151

2.

a. $y + x = 2{,}25$; $y + x = 3{,}3$; $y + x = 5{,}75$; $y + x = 7$
b. Todas tienen los mismos coeficientes a = b = 1. Solo cambia c en cada caso.
c. Todas tendrían que tener a = b = 1 y c de tal forma que $2 \leqslant c \leqslant 12$.
d. No, porque los puntos de esa recta solo pasan por los cuadrantes II y IV, y el cuadrado se encuentra solo en cuadrante I.
e. Es el coeficiente que desplaza las rectas hacia arriba o hacia abajo, pues es el que determina en qué punto se corta al eje Y. Así, las rectas estén dentro de los límites del cuadrado, se tiene que cumplir que $2 \leqslant c \leqslant 12$.

Tema 1: ¿Cuándo una función tiene función inversa?

Página 152

1. 23 ºC ó 73 ºF
2.

Grados Celsius	Grados Fahrenheit
–40	–4
18	0
0	32
4	40
15	60
33	90

3.

a. 77 ºF
b. A 22,22 ºC. Se calcula haciendo f(x) = 72 y despejando x.
c. Sí, invirtiendo la ecuación.
d. $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$
e. g(x) corresponde a la función inversa de f(x).

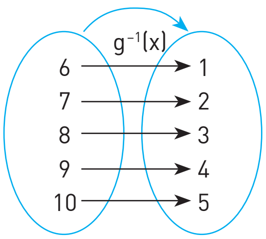
Página 154

2.

Máquina	Función	Función inversa
Automóvil	Avanza 15 km	Retrocede 15 km
Escáner	Reduce a la mitad	Aumenta al doble
Aire acondicionado	Baja 15 ºC la temperatura	Aumenta 15 ºC la temperatura
Cajero automático	Gira $ 50 000	Deposita $ 50 000
Ascensor	Sube la cabina 12 metros	Baja la cabina 12 metros

3.

a.



Página 155

b. Rec g(x) = {6, 7, 8, 9, 10}

Dom $g^{-1}(x)$ = {6, 7, 8, 9, 10}

El dominio de g(x) es equivalente al recorrido de su función inversa, mientras que el recorrido de g(x) es equivalente al dominio de su función inversa.

Dom g(x) = {1, 2, 3, 4, 5}

Rec g(x) = {6, 7, 8, 9, 10}

Tema 2: ¿Cómo se relaciona la gráfica de una función y la de su inversa?

Página 156

1. Respuesta abierta.

2.

a. F

b. V

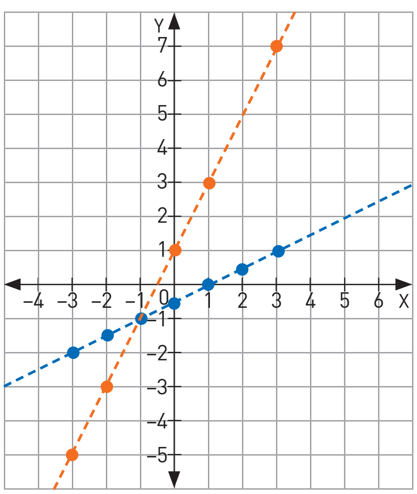
c. V

d. V

e. V

3.

a.



b. $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

c. g(x) es la inversa de f(x). g(x) se puede obtener a partir de despejar x en f(x) y hacer x = g(x) y f(x) = x.

Página 157

4.

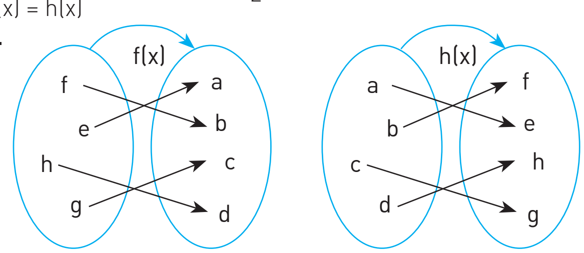
a. Sí tiene inversa, $f(x) = -2x$

b. No tiene inversa, $f(x) = 9$, no es una función.

c. Sí tiene inversa, $h(x) = \frac{x}{2}$

5. g(x) = h(x)

a.



6.

a. Altura a la que se encuentra un cuerpo de 2 kg de masa sobre la superficie terrestre según su energía potencial gravitacional.

b. h(40) = 2. El cuerpo de masa 2 kg se encuentra a 2 metros de altura cuando su energía potencial gravitacional es 40 Joules.

c.

U	0	20	40	60	80	100
h(U)	0	1	2	3	4	5

¿Qué aprendí hoy?

a. $D^{-1}(x) = \frac{1}{26}(x - 300)$

b. $D^{-1}(x) = 11\,538$

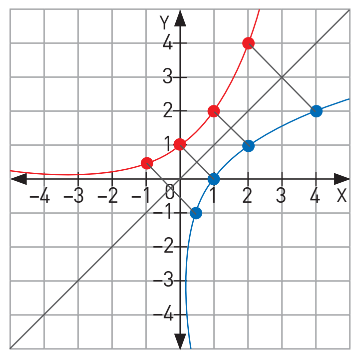
c. La función inversa representa al precio del producto en función de su demanda.

Página 158

1.

x	–1	0	1	2
f(x)	0,5	1	2	4

2.



3.

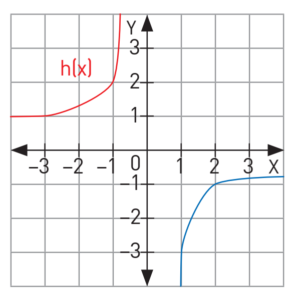
x	0,5	1	2	4
g(x)	–1	0	1	2

4. La función g(x) es la función inversa de f(x).

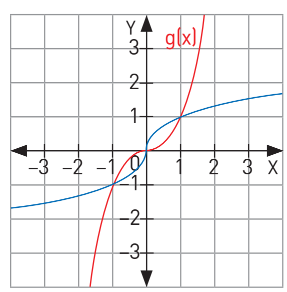
Página 160

1.

a.



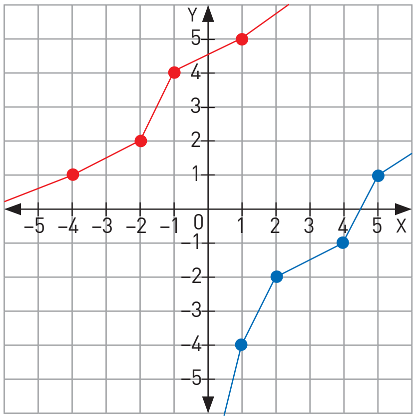
b.



c. Tienen exactamente la misma forma, pero la inversa es la imagen espejo de la función original, tomando la recta f(x) = x como el "espejo".

Página 161

2.



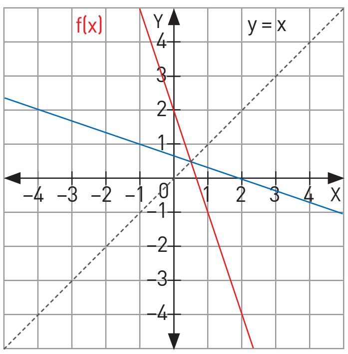
a. A' = (1, −4), B' = (2, −2), C' = (4, −1), D' = (5, 1)

b. (b, a)

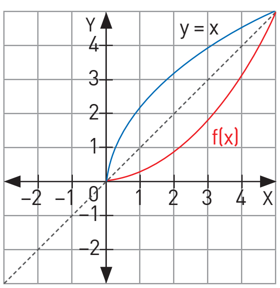
Página 162

1.

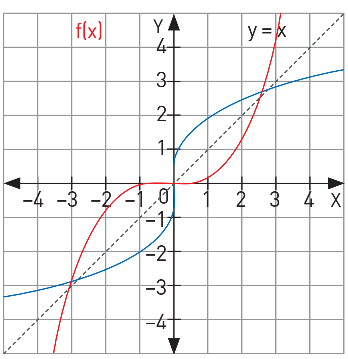
a.



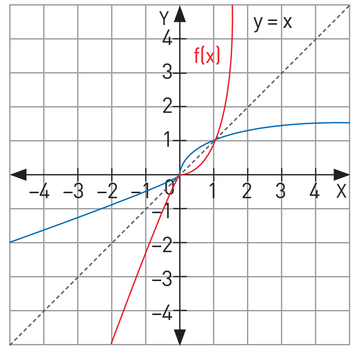
b.



c.



d.



2.

a. Sí son inversas.

b. No son inversas.

Página 163

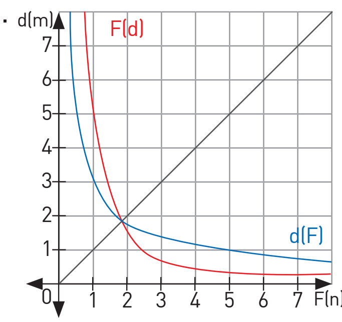
3.

a. Si la distancia aumenta, la fuerza gravitacional disminuye y viceversa.

b. La fuerza gravitacional es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

c. Como la distancia entre dos cuerpos de cierta masa cada uno, dada según su fuerza gravitacional.

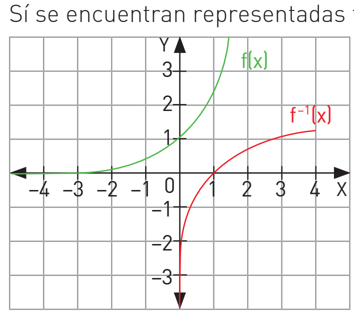
d.



¿Qué aprendí hoy?

a. Sí se encuentran representadas f(x) y $f^{-1}(x)$

b.



Tema 3: ¿Cómo es la función inversa de funciones lineales y afines?

Página 164

a. Sí, son funciones inversas.

b.

x	−3	−1,5	0	1,5	3	4,5
f(x)	0	1	2	3	4	5

x	0	1	2	3	4	5
g(x)	−3	−1,5	0	1,5	3	4,5

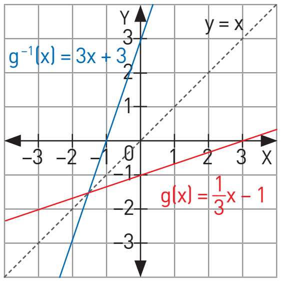
$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ $g(x) = \frac{3}{2}x - 3$

c. Sí se puede afirmar que son funciones inversas, ya que g(x) se puede obtener de cambiar f(x) por x, x por g(x) y despejar g(x).

d. g(x) se puede obtener al cambiar f(x) por x, x por g(x) y despejar g(x).

Página 165

1.



Página 166

1.

a. F, la inversa conserva el signo de la función original.

b. V, si la función tiene la forma $y = ax + b$, con $a = 4$, la pendiente de su inversa será $\frac{1}{a} = \frac{1}{4}$

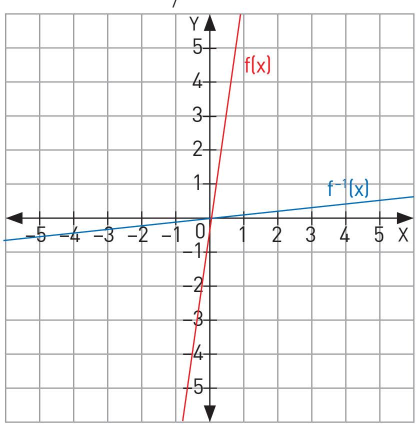
c. F, si la función tiene la forma $y = ax + b$, con punto de intersección b, el punto de intersección de la inversa será $-\frac{b}{a}$

d. F, la inversa de $f(x)$ es $g(x) = \frac{1}{5}x - 2$

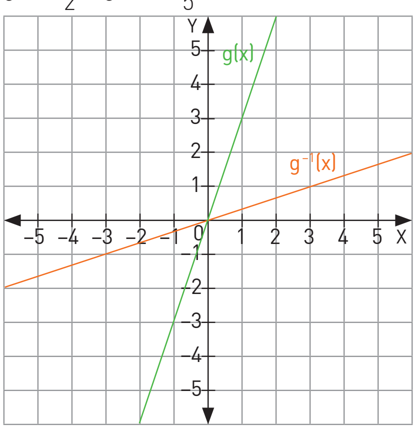
e. V, si la función tiene la forma $y = ax$, su inversa tendrá la forma $y = \frac{1}{a}x$; ninguna tiene coeficiente n, por lo tanto ambas pasarán por el origen.

2.

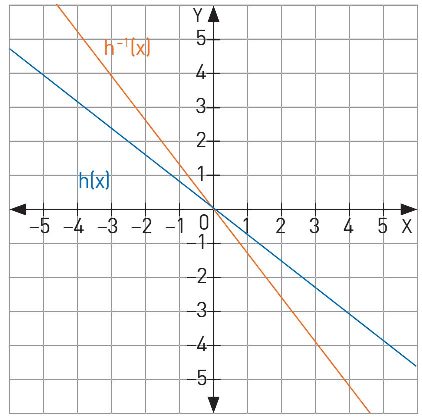
a. $f(x) = 7x$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{7}x$



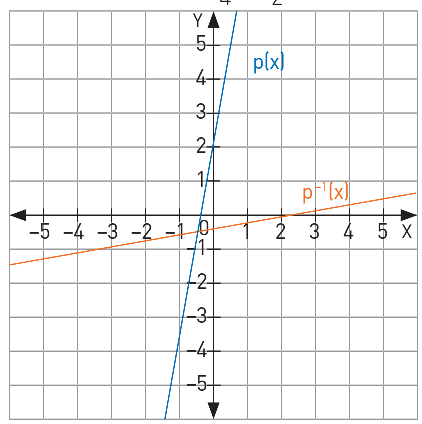
b. $g(x) = \frac{5}{2}x$, $g^{-1}(x) = \frac{2}{5}x$



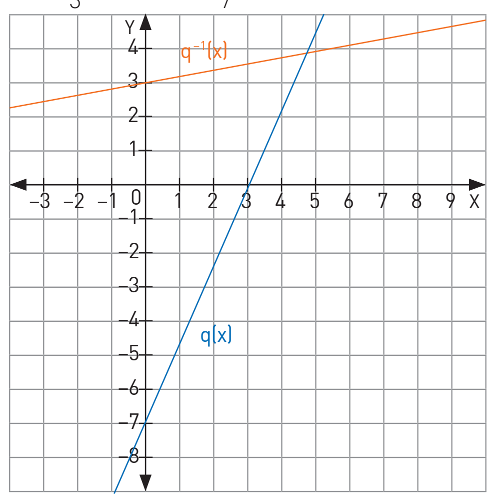
c. $h(x) = -0{,}75x$, $h^{-1}(x) = -\frac{4}{3}x$



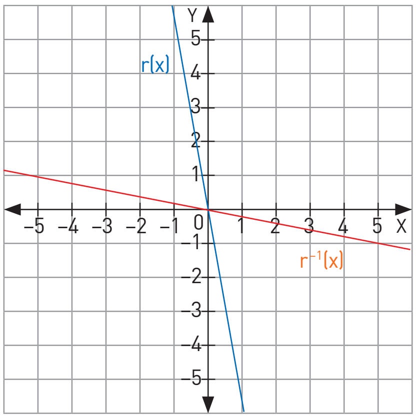
d. $p(x) = 4x + 2$, $p^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$



e. $q(x) = \frac{7}{3}x - 7$, $q^{-1}(x) = \frac{1}{7}x + 3$



f. $r(x) = -4{,}5x - \frac{2}{9}$, $r^{-1}(x) = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{81}$



3.

a. $p = 5$, $q = 4$

b. $p = 5$, $q = 7$

c. $p = \frac{5}{4}$, $q = 2$

d. $p = 2$, $q = -\frac{2}{10}$

Página 167

5.

a. $K(C) = C + 273$

b. $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$

c. A 310 grados Kelvin y a 98,6 grados Fahrenheit.

d. A 303,15 grados Kelvin.

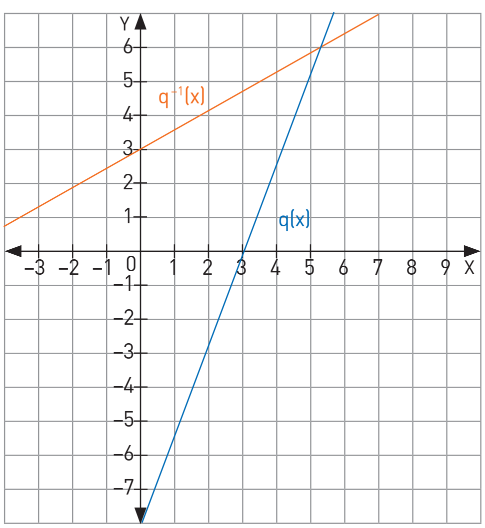
¿Qué aprendí hoy?

1.

a. $f(x) = 7x$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{7}x$

b. $g(x) = \frac{7}{3}x - 7$, $g^{-1}(x) = \frac{3}{7}x + 3$

c.

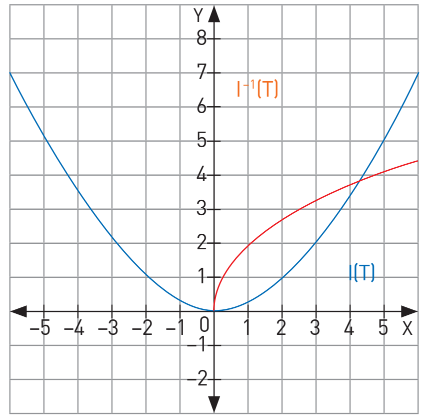


Tema 4: ¿Cuál es la función inversa de la función cuadrática?

Página 168

1. $a = \frac{g}{4\pi^2} = \frac{5}{18}$, $l(T) = \frac{5}{18}T^2$

2. T por ser tiempo, solo puede tomar valores mayores o iguales a cero, por lo tanto, y dada la ecuación de l(T), l también. Lo que es lo mismo $l(T): \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.



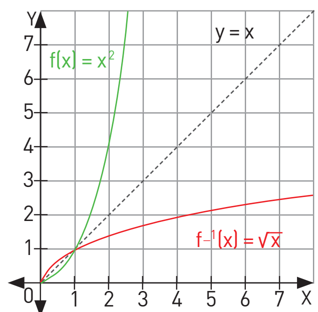
3. T(l) representa al período de oscilación del péndulo dada su longitud.

4. Si se puede determinar de forma algebraica, se hace $l(T) = l$ y $T = T(l)$ y se despeja $T(l)$ $T(l) = \sqrt{\frac{18}{5}l}$

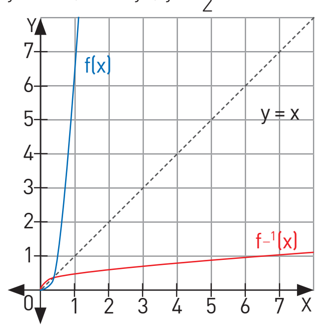
Página 169

1.

a.



b. $y = 4x^2$, $x = 4y^2$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$



Página 170

¿Cómo voy?

1.

a. V, $1^2 = 1 = \sqrt{1}$

b. V

c. V, ambas tienen la condición de $f(x): \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x): \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.

d. F, los puntos de su inversa serían (b, a).

e. F, la inversa sería $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$

2.

a. $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{6}}$

b. $g^{-1}(x) = 2\sqrt{\frac{x}{5}}$

c. $h^{-1}(x) = \frac{5}{3}\sqrt{x}$

d. $p^{-1}(x) = 2{,}5\sqrt{x}$

e. $q^{-1}(x) = \frac{1}{10}x^2$

f. $r^{-1}(x) = \frac{1}{25}x^2$

g. $s^{-1}(x) = \frac{1}{18}x^2$

h. $r^{-1}(x) = \frac{5}{8}x^2$

3.

a. $k = \frac{1}{5}$

b. $k = 6$

c. $k = \sqrt{3}$

d. $k = \frac{2}{5}$

e. $k = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}$

Página 171

4.

a. m(x)

b. u(x)

c. v(x)

d. r(x)

e. n(x)

5.

a. $t(d) = \sqrt{\frac{d}{0,7}}$

b. Tardará 5,976 s en recorrer 25 metros y 11,952 s en terminar la carrera.

6.

a. $d(t) = 80t^2$, equivale a la distancia que se recorre en un tiempo determinado.

b. Ha recorrido 17,778 km.

c. El lugar al que debe llegar se encuentra a 35,556 km.

¿Qué aprendí hoy?

$r(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, donde A es el área del círculo.

Página 172

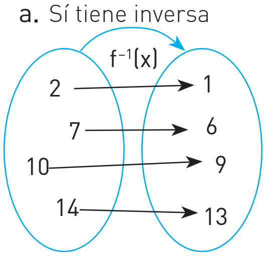
1.

a. a = 6, b = 13, c = 15, d = 7, e = 19, f = 9, g = 21, h = 10

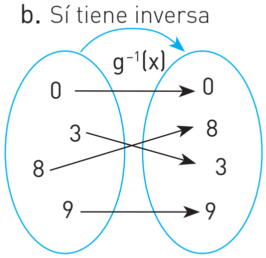
b. a = 1, b = 8, c = 5, d = 4, m = 100, n = 6

2.

a. Sí tiene inversa



b. Sí tiene inversa



c. No tiene inversa

3.

a. No

b. No

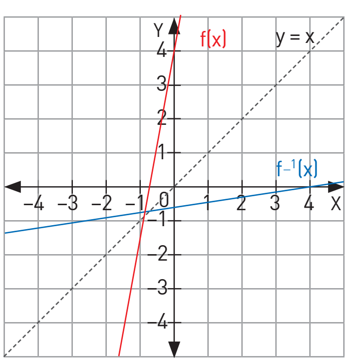
c. No

d. Sí

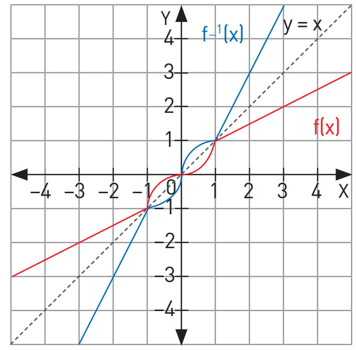
Página 173

4.

a.



b.



5.

a. Si es inversa una de la otra

b. No, g(x) tiene exactamente la misma forma de f(x), pero está desplazada. No es el reflejo de f(x).

6.

a. $f^{-1}(x) = \frac{x}{7} - \frac{3}{7}$

b. $g^{-1}(x) = \frac{3}{8}x$

c. $h^{-1}(x) = \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}$

d. $p^{-1}(x) = \frac{8}{5}x - \frac{24}{5}$

e. $q^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{7}x}$, $q(x): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

f. $r^{-1}(x) = \frac{1}{14}\sqrt{x}$, $r(x): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

g. $t^{-1}(x) = \sqrt{\frac{11}{4}x}$, $t(x): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

h. $r^{-1}(x) = \frac{1}{6}x^2$, $r(x): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

i. $s^{-1}(x) = \frac{49}{2}x^2$, $s(x): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

Página 174

7.

a. $k = \frac{11}{32}$

b.

c. $k = 1$

8.

a. n(x)

b. m(x)

c. t(x)

d. v(x)

e. d(x)

f. u(x)

9. $U(x) = 200x^2$

a. $x(U) = \frac{1}{10}\sqrt{2U}$.

b. $x(4) = \frac{4}{10}$

10. $d(t) = 2t$

a. $t(d) = \frac{1}{2}d$, corresponde a cuánto tiempo tarda en recorrer una distancia d.

b. t(4000) = 2000 segundos

Página 175

11.

a.

$a\left[\frac{m}{s^2}\right]$	2	4	6	8	10
F(a) [N]	10	20	30	40	50

b. F(6) = 30

c. F(a) = 5a

d. Es correcta

e. 100 N

Unidad 3 Geometría

Lección 7: La esfera

Página 190

1.
   a. $A = 16\pi$ cm^2, $P = 8\pi$ cm
   b. $A = 1800\pi$ mm^2, $P = (60\pi + 120)$ cm
2.
   a. $A = 76{,}48\pi$ cm^2, $V = 75\pi$ cm^3
   b. $A = 252\pi$ cm^2, $V = 540\pi$ cm^3
3. 324π m^3
4. 92π m^2

Página 191

5.
   a. 65π cm^2
   b. 100π cm^3
6.
   a. Modelo C
   b. Modelo C
   c. No aplica
   d. Modelo A: 375 latas, Modelo B: 320 latas, Modelo C: 237 latas.

Página 192

1. Esféricos: Globo terráqueo, Júpiter, burbuja.

Página 193

2. Todos son esferas.
3. No aplica
4. Radio, Área, Volumen

Página 194

1.
   a. $A = 64\pi$ cm^2
   b. $r = 8{,}75$ cm, $A = 76{,}65\pi$ cm^2
2.

Barquillo de helado	Cónica
Extintor de incendios	Cilíndrica
Pelota de rugby	Otra
Pompón	Esférica
Embudo	Cónica
Almohada	Otra
Perla	Esférica
Sombrero chino	Cónica
Planeta	Esférica
Moneda	Cilíndrica

Página 195

3. Cilindro, Cono y Esfera
4.
   a. No.
   b. Sí.
   c. No.
   d. Sí.

Página 197

1. Respuesta abierta.
2.
   a. Cilindro, semiesfera y cono.
   b. Mayor volumen: Cilindro. Mayor área rotada.
   c. Cilindro: 64π cm^3, Cono: $21{,}3\pi$ cm^3
   d. $42{,}6\pi$ cm^3

Página 200

1.
   a. $V = 4186{,}6$ cm^3
   b. $V = 635$ m^3
2.
   a. $V = 972\pi$ cm^3
   b. $V = 325{,}5\pi$ mm^3
   c. $7{,}15\pi$ m^3
3.
   a. $r = 3$ cm
   b. $r = 5$ m
4.
   a. Aumenta 8 veces.
   b. Reducirse a la mitad.
   c. $1774{,}6\pi$ cm^3
5. Volumen protón = $7{,}9 \cdot 10^{-46}$ m^3
6. Volumen encerrado = $121\,034{,}6\pi$ cm^3
7.
   a. Sí, el volumen de los cuatro cilindros es 2916π cm^3, y el volumen de las 3 esferas es 2916π cm^3.
   b. Se podrían fabricar 81 esferas de diámetro 6 cm.
8. El diámetro es 12,6 metros.

Página 201

9.
   a. Júpiter sería 1413 veces más grande que la Tierra.
   b. Pelota de fútbol.
10. 381,5 m^3
11.
   a. Invertirá en el modelo de 4,8 cm de diámetro.
   b. El radio debe ser aprox. 4,5 cm.
12. Respuesta abierta.
13.
   a. V total = $315\,814{,}35\pi$ mm^3
   b. Radio = 1,15 cm

Página 204

1. $V = 63\pi$ m^3, Área Ac = 30π m^2, Área As = 18π m^2, Área At = 48π m^2
2. Se necesitan 48,1 litros.
3. Radio esfera 20 cm; Radio esfera 1,5 más grande, 3600π cm^2.

Página 206

1.
   a. 256π cm^2
   b. 576π cm^2
2.
   a. 196π cm^2
   b. 256π cm^2
3.
   a. $r = 2{,}5$ cm, $V = \frac{125}{6}\pi$ cm^3
   b. $r = \frac{1}{20}$ cm, $V = \frac{1}{6\,000}\pi$ m^3
   c. $r = 45$ mm, $V = 121\,500\pi$ mm^3
4.
   a. Balón grande = 1809 cm^2, Balón pequeño = 804 cm^2
   b. Se necesita 41 004 cm^2 para cumplir con el pedido.
   c. Respuesta abierta.
   d. Podría hacer 51 balones.

Página 207

5.
   a. 6373 km
   b. 1,84 m
   c. 42,71 m^2
   d. 362 171 000 km^2
6.
   a. Necesita la misma cantidad para ambas.
   b. Se gastará más en las pantallas cilíndricas.
   c. Radio café = 18,19 cm, Radio naranja = 17 cm

Página 208

1.

Albóndigas	Esférica
Picarones	Otra
Telescopio	Cilíndrico o Cono truncado
Burbujas	Esférica
Lentejas	Otra

2.
  a. Cilindro
  b. Cono
  c. Esfera

3.
  a. $V = \frac{256}{3}\pi$ cm^3, $A = 64\pi$ cm^2
  b. $V = 36\pi$ cm^3, $A = 36\pi$ cm^2

4.
  a. $V = 2304\pi$ cm^3
  b. $\frac{2\,048}{3}\pi$ mm^3
  c. $\frac{1\,372}{3}\pi$ m^3

5. $6,96 \cdot 10^5$ km

Página 209

6.
  a. Se reduce 8 veces.
  b. El área aumenta 9 veces.
  c. El radio disminuye a la mitad.
  d. Aumentó al doble.

7.
  a. Amargo: $546\,875\pi$ mm^3; Blanco: $390\,625$ mm^3, Leche: $468\,750$ mm^3; Almendras: $937\,500$ mm^3
  b. Verde: $614,4\pi$ cm^2; Morado: $921,6\pi$ cm^2 Rojo: $1075,2\pi$ cm^2; Amarillo: $1228,8\pi$ cm^2
  c. 5400π cm^2

Lección 8: Razones trigonométricas

Página 210

1.
  a. Sí
  b. Sí
  c. No

2. $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$

Página 211

3.
  a. $\alpha = 25°$
  b. $\beta = 40°$
  c. $\gamma = 20°$

4. ABC semejante MNO semejante DEF.
5. Respuesta abierta.
6.
  a. $(-28, 7)$
  b. $(8, -2)$
  c. $(-60, 15)$
  d. $(-20, 5)$

Página 213

1.
  a. $\frac{GH}{AB} = 1,8 \quad \frac{GH}{EF} = 1,2$
  b. $tg(\beta) = 0,5333...$ $\quad tg(\gamma) = 0,5333...$
  c. $sen(\alpha) = \frac{28}{53}$ $\quad cos(\alpha) = \frac{45}{53}$

  $sen(\beta) = \frac{45}{53}$ $\quad cos(\beta) = \frac{28}{53}$

  $tg(\alpha) = \frac{28}{45}$ $\quad tg(\beta) = \frac{45}{28}$
  d. Respuesta abierta.

2.
  $sen(\alpha) = \frac{28}{53}$ $\quad cos(\alpha) = \frac{45}{53}$

  $sen(\beta) = \frac{45}{53}$ $\quad cos(\beta) = \frac{28}{53}$

  $tg(\alpha) = \frac{28}{53}$ $\quad tg(\beta) = \frac{53}{28}$

Página 214

  a. $x = 20$ cm
  b. $x = 4,8$ cm
  c. $x = 7,5$ cm

Página 215

5.
  a. $sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg(45°) = 1$
  b. $sen(30°) = \frac{1}{2}$; $sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

  $cos(60°) = \frac{1}{2}$; $tg(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $tg(60°) = \sqrt{3}$

Página 216

1.
  a. $\frac{4}{5}$
  b. $\frac{3}{5}$
  c. $\frac{4}{3}$
  d. $\frac{3}{5}$
  e. $\frac{4}{5}$
  f. $\frac{3}{4}$

2.
  a. $\frac{5}{2}$
  b. 0
  c. $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$
  d. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2}{2}$

3.
  a. AC = 13,8 cm, BC = 8 cm
  b. PR = 0,8 cm, PQ = 0,69 cm

4. Respuesta abierta.

Página 217

5.
  a. Altura = 2,18 m
  b. Área = 127,8 m^2

6.
  a. Altura 9 m
  b. Altura 1,5 m
  c. Sombra 124,7 m
  d. Distancia 5769,7 m
  e. Ángulo 30°
  f. Altura 8,4 m
  g. Distancia 16,17 m

Página 219

1. Altura 1 = 3,25 km; Altura 2 = 5,5 km.
2. Distancia 1 = 5,63 km; Distancia 2 = 2,81 km.

Página 222

$x = 7,14$

Página 223

3. $h = \frac{x + 150}{tg(36°)}$; Altura = 373,5 m

Página 224

1.
   a. 6,25 – 6,5 – 1,8
   b. 25 – 33,3 – 41,7
   c.
   d. 7 – 12 – 13,9
2.
   a. 90° – 63,43° – 26,57°
   b. 90° – 74,05° – 15,95°
   c. 90° – 74,05° – 15,95°
3.
   a. x = 13 cm – α = 30° – β = 60°
   b. α = 59,89° – β = 30,11°
   c. x = 9,19 cm – α = β = 45°
4.
   a. El edificio mide aprox. 4,51 m.
   b. Ángulo de 19,34°

Página 225

5. 108,75 m
6.
   a. Respuesta abierta.
   b. Los ángulos son 60,26° y 75,07°
7.
   a. Están a 5,38 km y 2,15 km de altura respectivamente.
   b. 13,46 km y 5,39 km respectivamente.
8.
   a. 2,2 km de altura
   b. 86,9 km

¿Qué aprendí hoy?
   a. Respuesta abierta.
   b. 15 682 m
   c. Margarita a 12 232 m y Valentín a 3450 m.

Tema 3: ¿Cómo se determinan los componentes de un vector?

Página 226

2.
   a. Respuesta abierta
   b. A = (4, 3), B = (3, 4)
   c. |A| = 5, |B| = 5
   d. Respuesta abierta
3.
   a. V = (100, 173)
   b. Respuesta abierta

Página 227

1.
   a. Respuesta abierta.
   b. G = 750 cos(52°) x^ + 750 sen(52°) y^
   c. Gx = 461,75 N, Gy = 591,01 N
2.
   a. 15,77 km/h
   b. 150,83 km/h

Página 228

3. V = (40, 18); rapidez: 43,86 m/s
4.
   a. $|Vx| = 25\sqrt{3}$ $|Vy| = 25$
   b. $|Wx| = 60$ $|Wy| = 60\sqrt{3}$

Página 229

5.
   a. $|u| = 2\sqrt{5}$, $|v| = \sqrt{17}$
   b. α = 63,43°, β = –14,04°
6.
   a. Respuesta abierta.
   b. Vx = 212,98 km/h, Vy = 149,13 km/h

Página 230

1.
   a. Vx = 100, Vy = 173,2
   b. Tx = –73,6, Ty = 42,5
   c. $Wx = -12,7$, $Wy = -9\sqrt{2}$
   d. $Ux = 45$, $Uy = -45\sqrt{3}$
2.

G	2,4 u	–1,697	1,697
H	1,6 u	0,8	1,385
I	1,3 u	1,22	0,44
J	2,1 u	1,26	–1,68
K	2,7 u	–2,338	–1,35

Página 231

3. Vx = 70,7 km/h, Vy = 84,3 km/h
4. $Vx = Vy = 25\sqrt{2}$
5. $Fx = 3,25$ N, $Fy = \frac{13\sqrt{3}}{4}$ N
6. $Vx = 8,5$ m/s, $Vy = \frac{17\sqrt{3}}{3}$ m/s
7. $Vx = 60\sqrt{3}$ km/h, $Vy = 60$ km/h
8. Vx = 12,03 m/s, Vy = 15,97 m/s
9. |F| = 11,13 N, Fx = 4,88 N

Página 232

¿Cómo voy?

1.
   a. sen(α) = 0,5547, cos(α) = 0,8321, tan(α) = 0,6667
   b. sen(α) = 0,8779, cos(α) = 0,4788, tan(α) = 1,8334
   c. sen(α) = 0,1961, cos(α) = 0,9806, tan(α) = 0,2
2.
   a. a = 5,196 cm, c = 10,392 cm
   b. a = 12,247 cm, b = 21,143 cm
3.
   a. DE = 119,01 cm, DF = 105,01 cm
   b. TV = 50 cm, VU = 52,5 cm
   c. DE = 30,98 cm, DF = 26,83 cm
   d. TV = 2,31 cm, VU = 2,31 cm

Página 233

4.
   a. x = 20,78, y = 10,39
   b. x = 14,14
5. $5\sqrt{3}$
6. Lados 5 cm y 8,66 cm.
7. Altura máx. 3 metros.
8. Distancia de 56 metros.
9. Distancia de 156,91 metros.
10.
   a. Altura = 15 metros
   b. Distancia 1 = $5\sqrt{3}$, Distancia 2 = $15\sqrt{3}$
11. Distancia = 86,07 metros
12.
   a. Respuesta abierta
   b. Altura = 39,97 metros

Página 234

13.
   a. Respuesta abierta.
   b. Altura = 260 metros.
14. 1732 metros
15. Respuesta abierta.
16.
   a. (–4, 2)
   b. (–1, 4)
   c. (2, 6)
   d. (4, –3)
   e. (1, –2)
   f. (–3, –5)

Página 235

17.
- a. Altura triángulo menor = 7 m.
- b. Respuesta abierta.
- c. Respuesta abierta.
- d. Menor: A = 3032 m^2, V = 14 400 m^3, Mayor: A = 9892 m^2, V = 130 400 m^3

Página 240: ¿Qué aprendí?

1.
- a. Sí.
- b. No.
- c. No.
- d. No.

2.
- a. Sí.
- b. No.
- c. Sí.

3.
- a. 457,3π cm^3
- b. 7,49π mm^3
- c. 2,3π m^3

4.
- a. A = 60π cm^2, V = 83,3π cm^3
- b. A = 1860π cm^2, V = 18 000π cm^3

Página 241

5.
- a. V = 288π cm^3
- b. V = 36 000π mm^3

6. V = 9198,1 cm^3

7.
- a. $\text{sen}(\alpha) = \frac{12}{13}$
- b. $\cos(\alpha) = \frac{5}{13}$
- c. $\text{tg}(\alpha) = \frac{12}{5}$
- d. $\text{sen}(\beta) = \frac{5}{13}$
- e. $\cos(\beta) = \frac{12}{13}$
- f. $\text{tg}(\beta) = \frac{5}{12}$

8.
- a. $\text{tg}(\alpha) = \frac{4}{3}$
- b. $\cos(\alpha) = 0{,}6$

9. BC = 3,93 cm

10. AB = 31,18 cm, BC = 15,58 cm

Página 242

11. x = 11,48 m, y = 23,09 m

12. i. V ii. V iii. F

13. Rectángulo de lados 13,5 cm y 23,38 cm

14. $\frac{5}{12}$

15.
- a. $|v| = 3\sqrt{2}$
- b. $|w| = 2{,}5$

16.
- a. O = (–2, 4)
- b. P = (–2, –3)
- c. Q = (5, 2)
- d. R = (1, –2)

Página 243

17.
- a. V = 4,5π m^3
- b. A = 9,36π m^2

18.
- a. Básquetbol = 2304π cm^3; Ping–pong = 10,6π cm^3
- b. Con 216 pelotas de ping–pong.
- c. Básquetbol = 576π cm^2; Ping–pong = 16 cm^2

19.
- a. Sol = 4,495 x $10^{17}\pi$ km^3
- b. Tierra = 3,459 x 10^{11} km^3
- c. La razón aprox. es 1:1 299 494 ~ 1 300 000

20. Respuesta abierta.

21. Ambos usan el mismo espacio.

22.
- a. 132 bolas, volumen total = 3183,468π cm^3
- b. La superficie a pintar en muchísimo menor que el rendimiento de la pintura.
- c. Alonso pintó 2 bolas.

Página 244

23.
- a. Volumen Tierra = 32 993,4 cm^3, Volumen Marte = 4986,4 cm^3, Radio Mercurio = 7,625 cm, Radio Venus = 18,9125 cm, Área Mercurio = 232,56 cm^2, Área Venus = 1430,83 cm^2
- b. Volumen Júpiter = 46 615 951,6 cm^3 Volumen Saturno = 27 931 111,6 cm^3
- c. Radio Urano = 79,9 cm
- d. Respuesta abierta.

24. 8,4 m

25. $Vx = 2\sqrt{2}$, $Vy = 2\sqrt{2}$

26. Sombra • tg(45°) = altura.

27. $\alpha = 60°$, $|T| = 50\sqrt{3}$

Lección 9: Técnicas de conteo

Página 250

1.
   a. Tiene 20 tipos de poleras diferentes.
   b. Habría 40 tipos de poleras diferentes.

Página 251

2.
   a. Pedro tiene 24 posibles elecciones
   b. La posible cantidad de actividades corresponde a la multiplicación de las posibilidades de cada ítem.
3.
   a. Andrea tiene 19 posibles elecciones.
   b. Como puede hacer una u otra opción, no todo el conjunto. La posible cantidad de actividades que se pueden realizar corresponde a la suma de las diferentes posibilidades de cada ítem.
4. Pedro debe elegir una alternativa de cada uno de los ítems, en cambio, Andrea puede elegir ninguna, una o más alternativas de cada conjunto de actividades.
5. Respuesta abierta.

Tema 1: ¿Cuándo se aplica el principio multiplicativo?

Página 252

1. Son 24 posibles resultados, EHMR, EHRM, EMHR, EMRH, ERHM, ERMH, HEMR, HERM, HMER, HMRE, HREM, HRME, MEHR, MERH, MHER, MHRE, MREH, MRHE, REHM, REMH, RHEM, RHME, RMEH, RMHE, donde por ejemplo, RHEM significa que Rubén es primero, Hugo segundo, Emilio tercero y Marcelo cuarto.
   a. Para el primer lugar se tiene como posibilidad a los 4 participantes, para el segundo sólo quedan 3 (uno quedó primero), para el tercer sólo 2 y para el cuarto sólo 1. Por lo tanto el número de posibilidades es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ posibilidades.
   b. En este caso $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
2. Son sólo 2 casos, que Emilio sea segundo y Rubén tercero y viceversa.
3.
   a. Son 6 los resultados posibles.
   b. Para cada posición en la que quede Hugo hay 2 posibilidades, como hay 3 lugares disponibles (2do, 3ro y 4to) hay $2 \cdot 3 = 6$ resultados posibles.
   c. La cantidad de resultados es la misma. Lo único que cambió es la forma de realizar la pregunta.
4. En el problema 1 se tenían 24 posibilidades y en el 3 sólo 6.
5. Los resultados posibles serían $5! = 120$.

Página 253

1.
   a. El número de posibilidades es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
   b. Marcelo primero significa que para el primer lugar hay sólo 1 caso. Finalmente, Hugo último significa que para el cuarto lugar también hay sólo una posibilidad, por lo tanto el número total de posibilidades es $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$.
   c. Si Marcelo gana, en la primera posición solo hay una posibilidad. Para la segunda, hay 3 posibles atletas, para la tercera posición hay 2 posibles atletas, y para la cuarta posición sólo hay un atleta disponible, por lo que hay $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ posibilidades.
   d. Similar a la pregunta a, con $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ posibilidades

Página 254

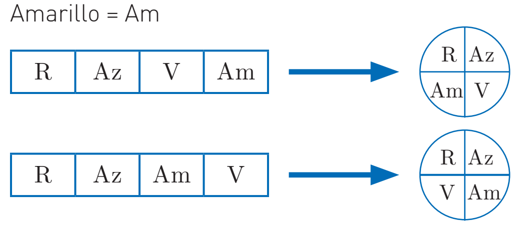
1.

Situación	Tipo de Permutación
Las formas en que se puede distribuir un grupo de 15 trabajadores en 15 puestos de trabajo.	Elementos distintos
Los números que se pueden formar con los dígitos de tres dados de seis caras.	Elementos repetidos
Las maneras en que se pueden ordenar las letras de la palabra INTELIGENCIA.	Elementos repetidos
El orden de llegada a clases de los 30 estudiantes de un curso.	Elementos distintos

2.
   a. $5! = 120$
   b. $7! = 2520$
   c. $12! = 239\,500\,800$
   d. $8! = 20\,160$
3.
   a. $12!$
   b. $32!$
4.
   a. 6 permutaciones con cada letra. 1 letra fija y permutación de 3 letras, lo que equivale a $1 \cdot 3! = 6$.
   b. En 2 de ellas la segunda letra es A. Sí ocurre lo mismo con todas las otras letras, excepto claramente con la A. El número de posibilidades es $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$.
   c. Respuesta abierta.
5.
   a. $7!$ es igual a $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ o lo que es lo mismo, $7 \cdot 6 \cdot 5!$, por lo tanto, simplificando términos semejantes queda que $\frac{7!}{5!} = 6 \cdot 7$
   b. $8!$ es igual a $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ y $9!$ es igual a $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, por lo tanto $8! \cdot 9 = 9 \cdot 8! = 9!$

Página 255

6.
   a. $\frac{10!}{4!}$
   b. $(a + n)!$, tal que n es un número entero positivo.
7.
   a. Por ejemplo, sea Rojo = R, Azul = Az, Verde = V y Amarillo = Am



   b. Sí, porque la mesa es circular básicamente al girar una configuración se tiene lo mismo, pero se tiene una situación diferente al comparar con la fila que entró.
   c. Por cada ordenamiento en la mesa circular hay 3 ordenamientos equivalentes con él.
   d. En la fila hay más ordenamientos posibles que en la mesa circular. En la mesa la posición relativa de todos los lugares es similar, por lo que la colocación de las primeras personas es irrelevante, a diferencia de su colocación en una fila.

8.
   a. $6! = 720$
   b. $7! = 40\,320$
   c. $11! = 39\,916\,800$
   d. $14! = 87\,178\,291\,200$

9.
   a. $2 \cdot 1 \cdot 9! = 725\,760$
   b. $1 \cdot 1 \cdot 9! = 362\,880$

¿Qué aprendí hoy?
   a. Hay 15 combinaciones.
   b. Si se aumenta la primera sección habría 20 combinaciones. Si se aumenta la segunda sección habría 18 combinaciones, por lo tanto conviene aumentar los colores de la primera sección, la que originalmente es la menor.

Tema 2: ¿Qué son las permutaciones y las combinaciones?

Página 256

1.
   a. De $5! = 120$ maneras.
   b. Hubo 60 combinaciones posibles. Sea Ecuador = E, Colombia = C, Brasil = B, Paraguay = P y Chile = Ch. Las posibilidades son:
   c. Hay 60 combinaciones posibles para los primeros 60 lugares. Corresponde a la mitad del total de formas de ordenar el grupo y es equivalente a

   $\frac{5!}{2} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$, donde 5 es el número total de equipos y 3 es la cantidad de equipos que clasifican. Pudieron haber existido 10 combinaciones de equipos clasificados.

1^{er} lugar	2^{do} lugar	3^{er} lugar
E	C	B
E	C	P
E	C	Ch
E	B	P
E	B	Ch
E	P	Ch
C	B	P
C	B	Ch
C	P	Ch
B	P	Ch

   d. Es un sexto de la cantidad obtenida en b. y equivale a

   $\frac{5!}{6 \cdot 2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$

   Habría 10 combinaciones. Es la misma cantidad de equipos clasificados cuando no importa el orden, ya que la forma de calcularlo es la misma y los factores en el denominador son iguales, pero de un origen distinto, $\frac{5!}{2 \cdot (5-2)!} = 10.$

Página 259

2.
   a. V_n^m debe ser siempre mayor que el número de combinaciones posibles que hay, sin importar el orden.
   b. Hay 24 posibilidades.
   c. $V_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{24}{1} = 24$, n es el número total de elementos del conjunto, m es el número de elementos ordenado que elijo del conjunto y (m – n) es la cantidad de elementos que no son elegidos del conjunto.
   d. El valor de 0! debe ser 1, porque como no hay elementos que ordenar o elegir de un conjunto, hay una única forma de ordenarlo.

Página 260

1. 60 directivas posibles.
2. De 3 838 380 maneras.
3. De 120 maneras.
4. De 5 245 786 formas.
5. De 252 maneras.
6. 27 405 boletos.
7.
   a. De 47 040 000 maneras.
   b. De $3{,}6578304 \cdot 10^{11}$ maneras.

Página 261

8. Hay $1{,}478266256 \cdot 10^{24}$ posibles repartos.
9. No, ya que en el caso de Marcelo el denominador de la combinación es menor, haciendo mayor el número de cartones, reduciendo del número de posibilidades.
10. 35 números diferentes.
11. $\binom{p-1}{q-1} + \binom{p-1}{q}$

$$= \frac{(p-1)!}{(q-1)!(p-1-q+1)!} + \frac{(p-1)!}{q!(p-1-q)!}$$
$$= \frac{(p-1)!}{(q-1)!(p-q)!} + \frac{(p-1)!}{q!(p-q-1)!}$$
$$= \frac{q \cdot (p-1)!}{q!(p-q)!} + \frac{(p-q)(p-1)!}{q!(p-q)!}$$
$$= \frac{(q+p-q) \cdot (p-1)!}{q!(p-q)!} = \frac{p \cdot (p-1)!}{q!(p-q)!}$$
$$= \frac{p!}{q!(p-q)!} = \binom{p}{q}$$

12.
   a. A los puntos A, B, C, D, E, F y G.
   b. Al punto A y G puede llegar de sólo una manera a cada uno, a A puede llegar haciendo sólo 6 izquierda y a G 6 derecha; a B y F puede llegar de $P_1^6 = 6$ formas, a B se puede llegar haciendo 5 izq. y 1 der., como importa el orden, corresponde a elegir 1 elemento de entre 6; a C y E puede llegar de $P_2^6 = 30$ formas; a D puede llegar de $P_3^6 = 120$.

¿Qué aprendí hoy?

1.
   a. Se jugarán 66 partidos.
   b. De 1320 formas.
2. De 70 formas diferentes.

Tema 3: ¿En qué se aplican las combinaciones?

Página 262

1. Se jugarán 66 partidos
2. Es posible completarlo en 11 fechas, ya que cada equipo debe jugar con 11 otros equipos diferentes.
3. Por cada fecha se juegan 6 partidos, por lo tanto es posible ordenar los partidos de $6! = 720$ formas.
4. La probabilidad de que se juegue entre las fechas 7 y 9 es de $\frac{3}{11}$.

Página 263

1.
   a. Combinación de 5 elementos entre 5. En total serán 462 maneras.
   b. La probabilidad de que los dos jugadores sean escogidos dentro de los 5 es 0,182.

Página 264

2.
   a. Permutación de 3 elementos escogidos entre 10 720 casos totales.

   $$P = \frac{\binom{8}{1}}{P_3^{10}} = \frac{8}{720} = 0{,}00111$$

   b.

Primer lugar	Segundo lugar	Tercer lugar
Emilia	Florencia	8 corredoras posibles
Emilia	8 corredoras posibles	Florencia
8 corredoras posibles	Emilia	Florencia

   Hay 24 casos favorables

   $P = \frac{24}{720} = 0{,}0333$

Página 265

3. Hay 252 maneras de escoger a los que patearán los penales, lo que se calcula por medio de una combinación de 5 elementos escogidos entre 10. La cantidad de formas en que se pueden elegir los 3 lanzadores restantes, es a través de una combinatoria de 3 elementos escogidos entre 8 = 56

$$P = \frac{2C_3^8}{C_5^{10}} = \frac{\frac{8!}{3 \cdot 5!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} = \frac{4}{9}$$

Página 266

1. $P = \frac{1}{201\,600}$
2. $P = \frac{5}{6}$
3. $P = \frac{6}{7}$
4.
   a. 120 palabras de 5 letras, 120 palabras de 4 letras, 60 palabras de 3 letras, 30 palabras de 2 letras.
   b. $P = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$
   c. $P = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$
   d. $P = \frac{72}{840} = \frac{3}{35}$
5.
   a. Para llegar a A se requieren 4 movimientos.
   Para llegar a B se requieren 4 movimientos.
   Para llegar a C se requieren 7 movimientos.
   Para llegar a D se requieren 8 movimientos.
   Para llegar a F se requieren 11 movimientos.
   b. $P(A) = \frac{1}{16}$, $P(D) = \frac{1}{256}$, $P(B) = \frac{1}{16}$, $P(F) = \frac{1}{2048}$, $P(C) = \frac{1}{128}$

Página 267

6.
   a. $P = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{49} \cdot \frac{1}{48} = \frac{480}{311\,875\,200} = \frac{1}{649\,740}$
   b. $P = \frac{3 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{144}{2\,598\,960} = \frac{3}{54\,145}$
   c. $P = \frac{216}{2\,598\,960} = \frac{9}{108\,290}$
   d. P = 0, no se puede tener un póker de sólo cartas rojas.
   e. $P = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} = \frac{352}{833}$
   f. $P = \frac{1\,020}{2\,598\,960} = \frac{1}{2548}$

¿Qué aprendí hoy?

   a. 5 rojas y 3 blancas
   b. $P = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$
   c. $P = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\right) = \frac{5}{14}$
   d. $P = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) = \frac{3}{28}$

Página 268

1.

Situación	Respuesta
Los números que se pueden formar con los dígitos 3, 5 y 7	Multiplicación
Los números de tres dígitos que se pueden formar con los dígitos 3, 5 y 7, sin repetir	P
Los pares de números que se pueden elegir entre los dígitos 3, 5 y 7	V
Los votos de 10 profesores para elegir al mejor estudiante entre 5 alumnos	C
Las parejas de estudiantes que se pueden formar con 5 alumnos	C
Los rankings de 3 estudiantes, hechos a partir de 5 de ellos	V

2. De $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 = 270$ maneras.
3. $P = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{20}$
4. De 768 formas.
5.
   a. Hay 9 447 840 patentes.
   b. Habría 16 veces más patentes.
6. $C_2^x = 120 \Rightarrow x = 16$
7.
   a. 163 800 comisiones.
   b. 13 104 comisiones.
   c. 10 920 comisiones.
   d. 10 296 comisiones.

Página 269

8.
   a. x = 3
   b. x = 3
   c. x = 8
   d. x = 15
9.
   a. $P = \frac{11}{1105}$
   b. $P = \frac{44}{1105}$
   c. $P = \frac{12}{85}$

10.
   a. P = 0,000182448
   b. Con la tercera sugerencia, P = 0,000010175
   c. Con la primera sugerencia, P = 0,00013904

Lección 10: Variable aleatoria

Página 270

1.
   a. Hay 3 posibilidades de obtener caras.
   b. Sea Dom f(x) = {xxx, xcx, cxx, xxc, xcc, cxc, ccx, ccc};
      Rec f(x) = {0, 1, 2, 3}, donde x representa sale cruz o sello y c representa sale cara.
      f(x): Dom → Rec
      xxx → 0
      xcx, cxx, xxc → 1
      xcc, cxc, ccx → 2
      ccc → 3

Página 271

2.
   a. De 625 maneras.
   b. $\frac{1}{5}$
   c. De 1 · 1 · 4 · 4 · 6 = 96 maneras.
   d. P = 0,0016, se deben considerar los casos en que se tiene 2 respuestas correctas, 3 respuestas correctas y 4 respuestas correctas.

Tema 1: ¿Qué es una variable aleatoria?

Página 272

1.
   a. Tiene 27 ramas.
   b. Por ejemplo, si en la primera partida ganó y en las otras dos empató, tiene 5 puntos.
   c. De 4, 6 y 3 maneras, respectivamente.
2.
   a. Se deben jugar 6 partidas.
   b. 9 puntos.

Página 273

   c. 0 puntos.
   d. No, ya que como sólo juega 3 partidas, no es posible obtener 8 puntos con los puntajes de cada resultado.
   e. 0 puntos, pierde las 3 partidas.
      1 punto, empata 1 partida.
      2 puntos, empata 2 partidas.
      3 puntos, empata 3 partidas o gana 1 partida.
      4 puntos, empata 1 y gana 1 partida.
      5 puntos, empata 2 y gana 1 partida.
      6 puntos, gana 2 partidas.
      7 puntos, gana 2 y empata 1 partida.
      9 puntos, gana las 3 partidas.
   f. No, ya que es la única alternativa de puntaje que se puede obtener a partir de 2 conjuntos de resultados diferentes.

Página 274

1.
   a. X(x) = 1 si bolita es igual a 18, 0 si no.
   b. X(x) = 1 si bolita es número par, 0 si no, o, X(x) = $\frac{n}{2}$ si número es par, 0 si no.
   c. X(x) = 1 si bolita es múltiplo de 3, 0 si no, o, X(x) = $\frac{n}{3}$ si número es múltiplo de 3, o 0 si no.
2.
   a. Sí
   b. Sí
   c. No
   d. Sí
   e. Sí
   f. No

Página 275

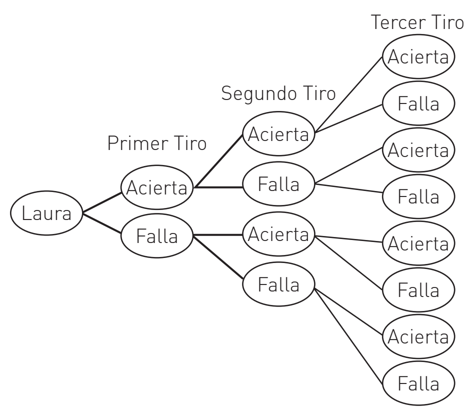
3.
   a. El dominio son los tres posibles resultados = {gana, empata, pierde}
   b. X(gana) = 3; X(empata) = 1; X(pierde) = 0
   c. De 3 maneras.
   d. Respuesta abierta.
   e.

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Posibilidades	1	3	3	4	6	3	3	3	0	1

Tema 2: ¿Cuál es la probabilidad de una variable aleatoria?

Página 276

1.
   a. X puede tomar los valores {0, 1, 2, 3, 4}
   b. Dom = {ssss, sssc, sscs, scss, csss, sscc, scsc, sccs, cscs, ccss, sccc, cscc, ccsc, cccs, cccc}, donde s es sello y c es cara.
   c. {sssc, sscs, scss, csss} son 4 posibles casos.
   d. {sccc, cscc, ccsc, cccs} son los casos en los que sólo se obtiene 1 sello.
   e. Es el subconjunto de los casos en que salen 2 ó 3 sellos.
2.
   a. No es variable aleatoria.
   b. Sí es variable aleatoria, ya que se puede asociar al evento de comprar una caja con 10 ampolletas.
   c. No es variable aleatoria.
   d. Sí es variable aleatoria, pero a la fecha habría que transformarla en un número único, por ejemplo, 04 de junio de 2017, 40617.
3.
   a.



      Hay 8 posibilidades.
   b. De 5 maneras.
4.
   a. X = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
   b. Respuesta abierta.

Página 277

5.
   a. {ARR, RAR, NRR, RNR}
   b. {ANNRA, NANRA, NNARA, NNRAA}
   c. {AAAN, AARN, ARAN, RAAN, ARRN, RARN, RRAN}
6.
   a. 2n – 5, donde n es el número de veces que sale cara o sello. Sí es única.
   b. 0 → –5, 1 → –3, 2 → –1, 3 → 1, 4 → 3, 5 → 5. Tanto el Dom(X) como el Rec(X) tienen 6 elementos cada uno.

¿Qué aprendí hoy?

a.

Pieza de dominó		Total de puntos que contiene pieza de dominó												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	X												
0	1		X											
0	2			X										
0	3				X									
0	4					X								
0	5						X							
0	6							X						
1	1			X										
1	2				X									
1	3					X								
1	4						X							
1	5							X						
1	6								X					
2	2					X								
2	3						X							
2	4							X						
2	5								X					
2	6									X				
3	3							X						
3	4								X					
3	5									X				
3	6										X			
4	4									X				
4	5										X			
4	6											X		
5	5											X		
5	6												X	
6	6													X
Total		1	1	2	2	3	3	4	3	3	2	2	1	1

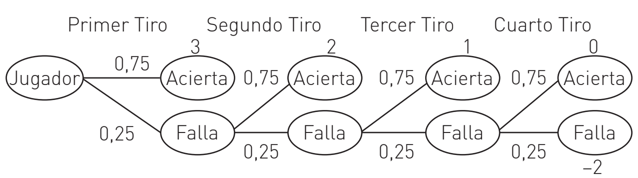
b. De 3 maneras.

c. De 2 maneras.

d. A los casos en que la suma de los elementos de las piezas de dominó es mayor a 8, que corresponde a 6 casos: (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6).

Página 278

1.



2. Dom(X) = {acierta en 1er tiro, acierta en 2do tiro, acierta en 3er tiro, acierta en 4to tiro, no acierta}. Rec(X) = {3, 2, 1, 0, −2}
3. Se recorre el árbol hasta llegar al caso en que obtiene 1 punto: falla 1er y 2do tiro y acierta 3ro. Como la probabilidad de acertar un tiro es 0,75, entonces la probabilidad de no acertarlo es 0,25.
   $P(1) = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 0,046875$.

Página 279

4.
   a. $P = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 0,0469$
   b. $P = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 0,0117$ de que acierte al 4to tiro.
   c. $P = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 = 0,00391$ de que no acierte ninguno de los 4 tiros.
5.
   a. $P(X = 1) = 0,75$
   b. $P(X = 0) = 0,0117$
   c. $P(X = -2) = 0,00391$
6.
   a. $P(X \geqslant 0) = P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = 0,75 + 0,1875 + 0,0469 + 0,0117 = 0,9961$,corresponde a la probabilidad de al menos acertar en el cuarto intento.
   b. $P(X < 3) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) + P(X = -2) = 0,1875 + 0,0469 + 0,0117 + 0,00391 = 0,25$, corresponde a la probabilidad de que no acierte en el primer intento.

Página 280

1.

a.

1	2	3	4	5	6
Fuera	Fuera	Diana	Diana	Diana	Diana

$C^6_4 = 15$

Para la segunda secuencia, la probabilidad es $0,05^2 \cdot 0,95^4$.

$P(Y = 4) = 15 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^4$

b. $P(Y > 3) = C^6_4 \cdot 0,95^4 \cdot 0,05^2 + C^6_5 \cdot 0,95^5 \cdot 0,05^1 + C^6_6 \cdot 0,95^6 \cdot 0,05^0$

Tema 3: ¿Cómo se grafica la distribución de una variable aleatoria?

Página 282

1.
   a. Respuesta abierta.
   b.

X	P(X)	Y	P(Y)	Z	P(Z)
3	0,0046	−4	0,0093	0	0,1389
4	0,0139	−3	0,0231	1	0,0880
5	0,0278	−2	0,0370	2	0,1204
6	0,0602	−1	0,0556	3	0,0648
7	0,0833	0	0,0787	4	0,1204
8	0,1065	1	0,0972	5	0,0648
9	0,1204	2	0,1157	6	0,0833
10	0,1204	3	0,1204	8	0,0556
11	0,1204	4	0,1157	9	0,0046
12	0,1065	5	0,1065	10	0,0463
13	0,0880	6	0,0833	12	0,0694
14	0,0602	7	0,0648	15	0,0324
15	0,0417	8	0,0463	16	0,0185
16	0,0278	9	0,0278	18	0,0278
17	0,0139	10	0,0139	20	0,0278
18	0,0046	11	0,0046	24	0,0185
				25	0,0093
				30	0,0093

   c. $P(X > 15) = 0,0463$
   d. $P(Y \leqslant 5) = 0,6528$
   e. $P(Z \geqslant 12) = 0,213$
2.
   a. $P = 0,00034$
   b. $P = 0,017$
   c. $P = 0,000345$

3.

a. Y = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

b. $P(Y = 0) = \frac{39}{7192}$; $P(Y = 1) = \frac{325}{5394}$; $P(Y = 2) = \frac{1235}{5394}$;

$P(Y = 3) = \frac{3705}{9889}$;$P(Y = 4) = \frac{20995}{79112}$; $P(Y = 5) = \frac{646}{9889}$

c. $P(1 \leqslant Y \leqslant 3) = \frac{6565}{9889}$

d. $P(Y \leqslant 2) = \frac{2119}{7192}$

4.

a. Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

b. $P(Z = 5) = \frac{1}{33\,264}$

Página 283

5.

a. $P(X = 1) = \frac{1}{5}$; $P(X = 2) = \frac{1}{5}$; $P(X = 4) = \frac{3}{5}$

b. $P(X \leqslant 2) = \frac{2}{5}$

6.

a. X(x = 0) = 0; X(x = 1) = 200; X(x = 2) = 400: X(x = 3) = 600; X(x = 4) = 800, donde x es la cantidad de veces que se repite el número apostado.

b. $P(X \geqslant 400) = P(X = 400) + P(X = 600) + P(X = 800) = \frac{31}{1296}$

c. $P = \frac{1}{27}$

7. Representa a la probabilidad de obtener de que el experimento sea exitoso, independiente de cuántas repeticiones.

Página 284

1.

Dado 1	Dado 2	X	Dado 1	Dado 2	X
1	1	2	4	1	5
1	2	3	4	2	6
1	3	4	4	3	7
1	4	5	4	4	8
1	5	6	4	5	9
1	6	7	4	6	10
2	1	3	5	1	6
2	2	4	5	2	7
2	3	5	5	3	8
2	4	6	5	4	9
2	5	7	5	5	10
2	6	8	5	6	11
3	1	4	6	1	7
3	2	5	6	2	8
3	3	6	6	3	9
3	4	7	6	4	10
3	5	8	6	5	11
3	6	9	6	6	12

2. X = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

3. $P(X = 12) = \frac{1}{36}$; $P(X = 8) = \frac{5}{36}$

4. $P(X = 2) = \frac{1}{36}$, $P(X = 3) = \frac{2}{36}$, $P(X = 4) = \frac{3}{36}$,

$P(X = 5) = \frac{4}{36}$, $P(X = 6) = \frac{5}{36}$, $P(X = 7) = \frac{6}{36}$, $P(X = 8) = \frac{5}{36}$,

$P(X = 9) = \frac{4}{36}$, $P(X = 10) = \frac{3}{36}$, $P(X = 11) = \frac{2}{36}$, $P(X = 12) = \frac{1}{36}$

5. $P(X \leqslant 6) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X + 6)$

$= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

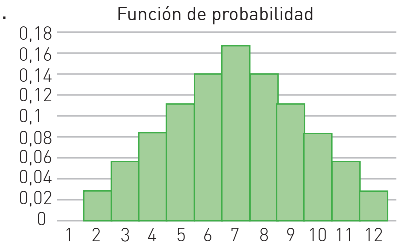
6. $P(X \leqslant 2) = \frac{1}{36}$, $P(X \leqslant 3) = \frac{3}{36}$, $P(X \leqslant 4) = \frac{6}{36}$, $P(X \leqslant 5) = \frac{10}{36}$,

$P(X \leqslant 6) = \frac{15}{36}$, $P(X \leqslant 7) = \frac{21}{36}$, $P(X \leqslant 8) = \frac{26}{36}$, $P(X \leqslant 9) = \frac{30}{36}$,

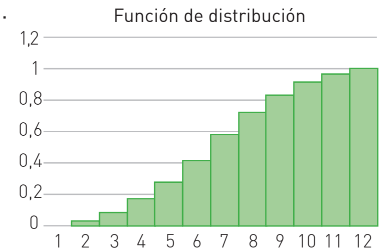
$P(X \leqslant 10) = \frac{33}{36}$, $P(X \leqslant 11) = \frac{35}{36}$, $P(X \leqslant 12) = 1$.

7.

a.



b.



Página 285

1.

a. {1, 3, 5, 6}

b. P(Y = 5) = 0,2

c. Sí, para Y = 1 e Y = 7.

2.

a. 0,08

b. 0,04

Página 288

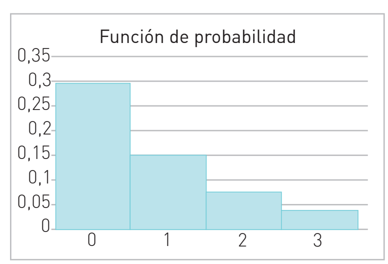
1.

a. $\frac{1}{3}$

b. $P(1) = \frac{4}{27}$, $P(2) = \frac{2}{27}$

c. $P(0) = \frac{8}{27}$, $P(1) = \frac{4}{27}$, $P(2) = \frac{2}{27}$, $P(3) = \frac{1}{27}$

d.



2.

a. La cantidad de ofertas de trabajo a las que se postula.

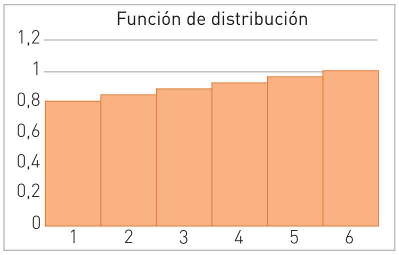
b. 0,3

c. 0,05

3.

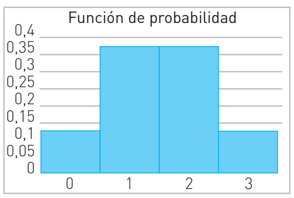
Página 289

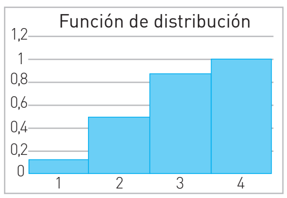
4.
   a. P(1) = 0,25, P(2) = 0,19, P(3) = 0,4, P(4) = 0,16
   b. P(3) = 0,15, P(4) = 0,17, P(5) = 0,25, P(6) = 0,23, P(7) = 0,2
   c. P(3) = 0,25, P(4) = 0,1, P(5) = 0,15, P(6) = 0,4, P(7) = 0,1
   d. P(3) = 0,50, P(4) = 0,1, P(5) = 0,05, P(6) = 0,23, P(7) = 0,12
5.
   a. Como la primera columna abarca el 80 % del total de la suma de todos los valores, el resto de columnas son casi imperceptibles versus el primer ítem.
   b. Prácticamente todas las columnas serán iguales a la primera.



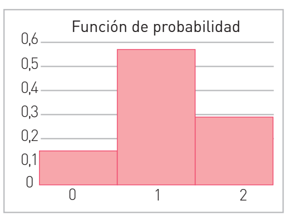
¿Qué aprendí hoy?

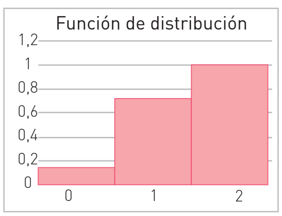
1.
   a. $P(0) = \frac{1}{8}$, $P(1) = \frac{3}{8}$, $P(2) = \frac{3}{8}$, $P(3) = \frac{1}{8}$
   b.





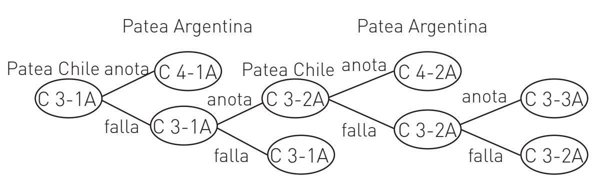
2.
   a. $P(0) = \frac{3}{21}$, $P(1) = \frac{4}{7}$, $P(2) = \frac{2}{7}$
   b.





Página 290

1.
   a. Por ejemplo, cantidad de bolitas con número par, suma de los números de las dos bolitas.
   b. 1 ⟶ {(1, 1)}
      2 ⟶ {(1, 2) (2, 2)}
      3 ⟶ {(1, 3) (2, 3) (3, 3)}
      4 ⟶ {(1, 4) (2, 4) (3, 4) (4, 4)}
      5 ⟶ {(1, 5) (2, 5) (3, 5) (4, 5) (5, 5)}
      6 ⟶ {(1, 6) (2, 6) (3, 6) (4, 6) (5, 6) (6, 6)}
2.
   a.



   b. Gana Chile y empata Chile con Argentina.
   c. Había 3 posibilidades para que ganara Chile y 1 para que empatara Argentina.

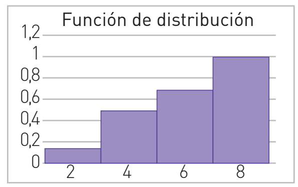
3.
   a. Cantidad de hogares con televisión por cable en la cuadra.
   b. Respuesta abierta
4.
   a. Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
   b. $P = \frac{7}{64}$
   c. $P = \frac{127}{128} = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$

Página 291

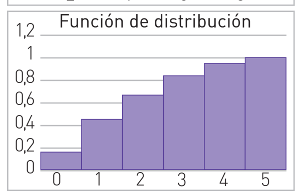
5.
   a. $P(X = 3) = \frac{2000}{6561}$
   b. $P(X < 4) = \frac{6305}{6561}$, $P(Y = 3) = \frac{1280}{6561}$
   c. $P(X > 2) = P(X \geq 3) = \frac{2625}{6561}$, $P(1 \leq Y \leq 3) = \frac{5680}{6561}$
6.
   a. Respuesta abierta.
   b. P(X = 1) = 0,8, P(X = 2) = 0,6, P(X = 3) = 0,75, P(X = 4) = 0,4.

Página 292

7.
   a.



   b.



8.
   a. No, ya que, P(3) > P(0).
   b. A la columna correspondiente a F(3) se le resta el valor de F(2), para obtener el valor de P(3). A la columna correspondiente a F(2) se le resta el valor de F(1), para obtener el valor de P(2), el valor de las otras 2 probabilidades se obtiene de la misma forma.

Página 293

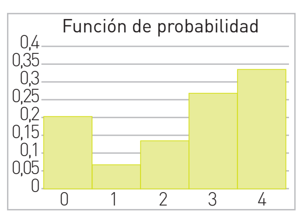
9.
   a. $n = \frac{1}{15}$
   b.

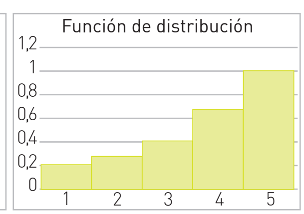
X	0	1	2	3	4
P(X)	0,2	0,0667	0,1334	0,2668	0,3335

   c.

X	0	1	2	3	4
$P(X \leq x)$	0,2	0,2667	0,4001	0,6669	1

   d.





Lección 11: Probabilidades

Página 294

1.
   a. Alta b. Baja c. Alta d. Baja
2. Poco probable, ya que Carolina no vive en aquella ciudad y conoce poca o no conoce gente ahí.

Página 295

3.
   a. No, las probabilidades de que salgan esos números son independientes de cuánto los ha jugado.
   b. Sí, ya que al ser combinaciones extrañas, es más probable que si gana sea el único ganador.
4.
   a. La probabilidad de que salga es $\frac{1}{6}$, por lo tanto, de que salga 10 veces es $\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{1}{60\,466\,176}$
   b. Sí, ya que dado que la probabilidad de que salga 4 (o de cualquier número) es baja, es posible pensar que hay algo anormal en su ocurrencia. Como la probabilidad de que salga 4 es la misma que los demás números, es casi indiferente si lo juega o no.

Tema 1: ¿Cómo se aborda la probabilidad en los medios de comunicación?

Página 296

1.
   a. Temperatura a la que cada jugador está más acostumbrado, ya que se puede incomodar y hasta cansar más rápido si no está habituado a un determinado rango de temperaturas.
   Tipo de cancha que prefieren jugar, ya que el tipo de cancha afecta a velocidad de la pelota, y por lo tanto la velocidad a la que el jugador acostumbra jugar.
   Altitud del lugar donde reside un jugador, ya afecta la capacidad de oxigenación de una persona.
   Si el jugador es diestro o zurdo, lo que en el caso de los zurdos es importante y marca diferencia.
   b. Respuesta abierta.
   c. Las ventajas son principalmente el tipo de cancha, la altura y el clima. Las desventajas habría que evaluarlas en función del rival.
   d. Respuesta abierta.

Página 297

1.
   a. No, ya que la información meteorológica se basa en modelos históricos. Así, un 3 % de probabilidad de lluvia implica que en el 3 % de los casos ha llovido teniendo las mismas condiciones.
   b. La probabilidad de lluvia es un cálculo que se realiza en función de las condiciones predichas y la información histórica, considerando velocidad y dirección del viento, humedad, rango de temperaturas, presión atmosférica, etc.
   c. Sí es posible, pero sólo en función de los promedios históricos para esa fecha.
2. Respuesta abierta.
3.
   a. Sí, el clima principalmente. En climas secos desérticos, la probabilidad de lluvia es casi nula.
   b. Sólo factores a nivel personal/físico, ya sea por enfermedad o lesión. Los aspectos con respecto al clima tienen que ver con información y estadística.

Página 298

4.
   a. La probabilidad de que un hijo sea hombre o mujer es del 50 %, sin embargo, con hijos, la gente no considera las permutaciones que hay que considerar, las personas tienden a generalizar la estimación de un hijo para los demás casos, esa es la paradoja.
   b. No, sólo indica que la probabilidad de tener dos hijos de cada sexo. Por las permutaciones, la probabilidad de tener 3 de 4 hijos varones es del 25 %.
   c. De acuerdo al conjunto mostrado, hay 8 posibles casos de 3 de 4 hijos del mismo sexo de un total de 16 casos posibles, por lo tanto la probabilidad de tener 3 de 4 hijos del mismo sexo es del 50 %.

Página 299

5.
   a. Durante todo el día la probabilidad de que llueva es menor al 50 %, por lo que es más probable que no llueva.
   b. 65 %.
   c. 0 %.
6. Respuesta abierta.

Página 300

1. Respuesta abierta.
2.
   a. En B, ya que requiere el reconocimiento directo de un acto ilícito.
   b. Al estar formuladas de manera diferente, no es posible relacionar ni comparar las respuestas entre sí, menos comparando el robo con las 2 situaciones descritas en la encuesta.
3. Respuesta abierta.

Página 301

4. Respuesta abierta.

¿Qué aprendí hoy?

   a. Los resultados de las Empresas 1 y 3 son parecidos, ya que las preguntas son similares, denotando preferencias personales. Los resultados de la Empresa 2 son diferentes porque tienen que ver con la percepción del individuo a nivel social del candidato.
   b. Las empresas 1 y 3, ya que reflejan lo que piensa cada persona de forma individual, no la "sensación" de la gente en general.
   c. Las probabilidades en promedio de las empresas 1 y 3, 42,5 % a A, 31,5 % a B, 21 % a C, 5 % a NS/NR.

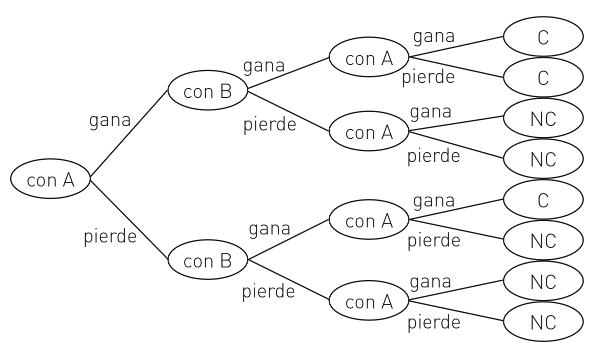
Tema 2: ¿Cómo se aplica la probabilidad en la toma de decisiones?

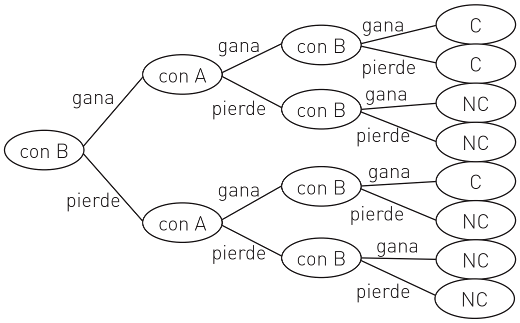
Página 302

1. 0,0476
2. 0,8227
3. 0,0004
4. Respuesta abierta.

Página 303

1.
   a.





b.

	Comenzando	
	Contra A	Contra B
Ganar las dos primeras peleas	P = p · q	P = q · p
Perder la primera y ganar las otras dos	P = (1 – p) · q · p	P = (1 – q) · p · q

Comenzando contra B: $P = p \cdot q \cdot (2 - q)$

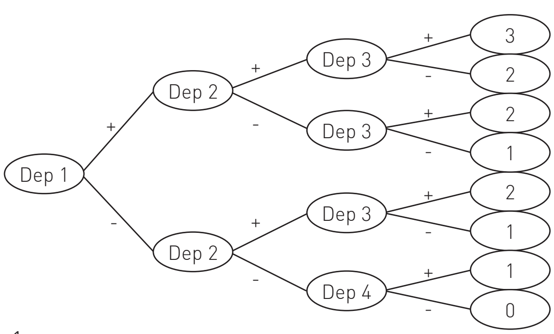
c. Si $p = q$, entonces $P = 2p^2 - p^3$
d. Si $p < q$, entonces le conviene comenzar con A, ya que el término entre paréntesis es mayor para ese caso, haciendo mayor la probabilidad de clasificar.
e. No, ya que siempre si $p < q$, $(2 - p) > (2 - q)$, haciendo a la probabilidad de clasificar comenzando contra A mayor (el otro término es igual en ambos casos, $p \cdot q$).

Página 304

1.
   a. 14,29 % b. 70 %
2.
   a. 18 % b. 8 % c. 11,55 %
3.
   a. 32 % b. 87 % c. 63 %

Página 305

4.
   a.



   b. $\frac{1}{14}$
   c. $\frac{13}{14}$
   d. $\frac{1}{14}$

¿Qué aprendí hoy?

a. 0,25
b. 0,1875
c. 3 penales.
d. Sí, cambia a 1 penal, ya que cambian tanto la probabilidad de anotar a 0,6 como la de no a 0,4, entonces cambian los valores de todas las opciones, siendo al de solo anotar un penal la mayor.

Tema 3: ¿Cómo puede interpretarse la probabilidad?

Página 306

1. Tomar varios grupos de piedras, un puñado cada vez por ejemplo, de distintos sectores del camión y contar las piedras claras y las oscuras.
2. Al color "promedio" de la superficie del camión. No es razonable su conclusión, porque la superficie no tiene por qué representar lo que hay a mayor profundidad de la carga.
3. La cantidad de piedras que hay de cada color en el camión. No es factible conocer esta información si no viene desde el origen.
4. Se tiende a encontrar lo que busca, por lo que si se hace la estimación de forma visual, siempre se asumirá una probabilidad mayor.

Página 307

1.
   a. Respuesta abierta.
   b. Los datos estadísticos son lo más relevante, lo menos relevante es la apreciación de los televidentes.
   c. La información de los televidentes, porque son hechas en base sólo a apreciaciones del momento y no a datos concretos como las otras dos.
   d. Si ha perdido el 5% de los tiros en los últimos 2 minutos, significa que ha acertado el 95%, habiendo perdido el primero, la probabilidad disminuye en un 60%, eso sobre el 95%, implica que tiene un 43% de posibilidades de anotar.

Página 308

1.
   a. Subjetiva. No existe información como para calcular la probabilidad, sólo estimaciones en base a tendencia del momento, las que pueden cambiar.
   b. Clásica, asociada a números de eventos y proyectado o extrapolado para elaborar una predicción.
   c. Subjetiva, de acuerdo a experiencia.
   d. Frecuencial, ya que es un hecho que sucede todos los años.
2.
   a. Sí permiten determinar la probabilidad en forma teórica.
   b. No es posible determinar la probabilidad.
   c. No es posible determinar la probabilidad, ya que no es posible determinar a partir de los datos cuál va a ser la interacción entre ellos.

Página 309

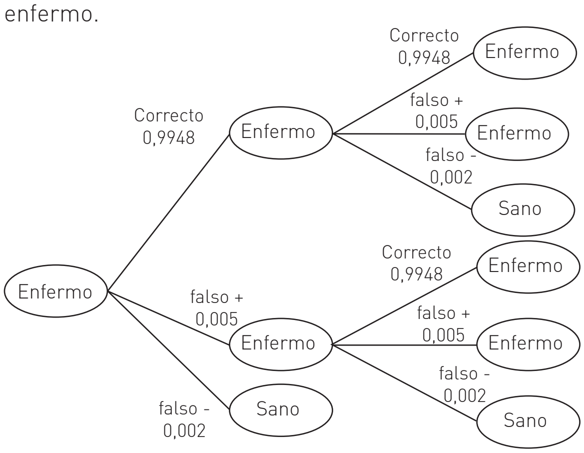
3.
   a. La de la empresa 4, ya que es la que incorpora la mayor cantidad de fuentes de información y los datos de las empresas 1 y 2, ya que a nivel de gobierno lo que importa es el bienestar de la gente.
   b. La de la empresa 3, ya que el resto tiene que ver con individuos o incluyen datos relacionados a personas, y estos datos es más probable que tengan que ver con casas o afines.
   c. La de la empresa 4, ya que son todos los casos posibles que pueden requerir asistencia.
   d. La de la empresas 3 y 4, ya que son las más concretas y comprobables de las cuatro, por lo tanto para elaborar estadísticas y probabilidades es la elección más correcta.

Página 311

1. Una temperatura entre 8 ºC y 18 ºC.
2. El martes.

Página 312: ¿Cómo voy?

1.
   a. Es poco frecuente un resultado con tal diferencia de goles, menos en equipos profesionales. Aunque está mal utilizada la terminología de imposible, sí que tiene una probabilidad muy baja de ocurrir.
   b. Sí, primero porque le había ganado Colombia a Chile por 7 - 0, y segundo porque a nivel profesional es muy poco frecuente. La probabilidad de ocurrencia de este caso debería ser muy baja, pero no improbable.
   c. Respuesta abierta.
2.
   a. Si el paciente está enfermo, hay un 99,96 % de probabilidades de que le digan que está enfermo. Si está sano hay un 0,0025 % de que le digan que está enfermo.



   b. De 0,0004.

Página 313

3. Respuesta abierta.
4.
   a. 92,05 %
   b. 7,95 %
   c. Habría que elegir la ruta B, porque aunque los atrasos son de mayor duración cuando suceden, su probabilidad es más baja y también es menor la cantidad de formas de atrasarse.
5. 0,98

Página 314

6.
   a. A Argentina, ya que el factor a pagar por su victoria era menor.
   b. Las estadísticas de los encuentros previos entre ambas selecciones (muy favorables a Argentina) y su *ranking* en la FIFA.
   c. Respuesta abierta.
   d. Respuesta abierta.
7.
   a. En enero, febrero, marzo, abril, octubre, noviembre y diciembre.
   b. 2 meses.
   c. Sólo en febrero, ya que es el tercer mes respecto a diciembre y enero en que la probabilidad de lluvia por 10 días o más es menor al 7 %.

Página 315

8.
   a. Aumenta levemente, ya que si bien existe un patrón asociado a la forma de lanzar los penales de un jugador, es un factor subjetivo al momento específico.
   b. Porque el jugador era un buen pateador de tiros libres y de tiros a larga distancia, y justamente que no había estadísticas de él, la probabilidad de que el arquero atajara su lanzamiento eran menores.
9.
   a. Sí.
   b. Auto: Edad del conductor, tipo de automóvil, tipo de acompañantes al momento del accidente.
      Araña: La zona geográfica donde sucedió, el nivel socioeconómico de la familia, el tipo de vivienda.

Página 320

Evaluación final

1. De 224 maneras.
2. 115 parejas.
3. 12
4. 24
5. Con los 4 dígitos se pueden formar 24 números de 4 cifras.
6.
   a. Determinan 10 rectas que pasan por 2 puntos.
   b. 21 rectas que pasan por 2 puntos.
   c. 5 en un pentágono, y 14 en un heptágono.
   d. $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$
7. De $\dfrac{11!}{(11-4)!} = 7920$ formas

Página 321

8.

Situación	Respuesta
Los números que se pueden formar con los dígitos 3, 5 y 7	Variación
Los números de tres dígitos que se pueden formar con los dígitos 3, 5 y 7	Variación
Los pares de números que se pueden elegir entre los dígitos 3, 5 y 7	Permutación
Los votos de 10 profesores para elegir al mejor estudiante entre 5 alumnos	Combinación
Las parejas de estudiantes que se pueden formar con 5 alumnos	Combinación
Los *rankings* de 3 estudiantes, hechos a partir de 5 de ellos	Permutación

9.
   a. $P = \dfrac{361}{320\,000}$
   b. $P = \dfrac{1853}{1\,600\,000}$
10.
   a. $P = \dfrac{36}{343}$
   b. $P = \dfrac{6}{343}$
   c. $P = \dfrac{12}{343}$
11. $P = \dfrac{1}{1\,248\,000}$

12.

a. $P = \frac{1}{759}$

b. $P = \frac{280}{759}$

c. $P = \frac{206}{759}$

Página 322

13.

a.

b. La probabilidad de llegar a A y B es de $\frac{1}{3125}$, la probabilidad de llegar a C es de $\frac{4}{3125}$.

14. $P(X = 300) = \frac{4}{20}$, $P(X = 700) = \frac{12}{20}$, $P(X = 1100) = \frac{4}{20}$

15. $P(0 \text{ blancas}) = \frac{8}{27}$, $P(1 \text{ blanca}) = \frac{4}{9}$, $P(2 \text{ blancas}) = \frac{2}{9}$, $P(3 \text{ blancas}) = \frac{1}{27}$

16.

a. $Rec(X) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18\}$

b.

Dado	Moneda		X
1	C	3	3
1	S	2	2
2	C	3	6
2	S	2	4
3	C	3	9
3	S	2	6
4	C	3	12
4	S	2	8
5	C	3	15
5	S	2	10
6	C	3	18
6	S	2	12

c. Para 6 y 12

d.

Dado	Moneda		X (Suma)	X (Potencia)
1	C	3	4	1
1	S	2	3	1
2	C	3	5	8
2	S	2	4	4
3	C	3	6	27
3	S	2	5	9
4	C	3	7	64
4	S	2	6	16
5	C	3	8	125
5	S	2	7	25
6	C	3	9	216
6	S	2	8	36

X: suma de los valores del dado y la moneda.
X: Valor del dado elevado al valor de la moneda.

Página 323

17.

a. $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$, $B \rightarrow E$

b. $A \rightarrow C$, $A \rightarrow D$

c. $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$

18. $P(\text{ganancia}) = \frac{3}{4}$

20.

a. $P(0) = 0{,}0432$, $P(1) = 0{,}1056$, $P(2) = 0{,}1856$, $P(3) = 0{,}256$, $P(4) = 0{,}4096$

b. $P(3) = 0{,}256$

c. No es posible determinar una expresión para $P(X = x)$ en función de p.

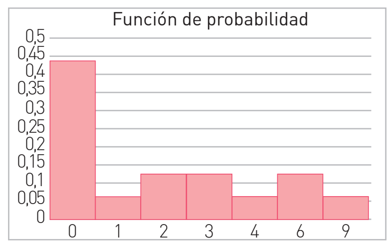
Página 324

21.

a. Multiplicación de los valores obtenidos en los 2 dados.

b. No ya que no hay ninguna otra en la que se tenga la misma frecuencia de ocurrencia con los mismos valores del recorrido de la función.

c.



d. Corresponde a la probabilidad de que la multiplicación de los valores de los 2 dados sea menor o igual 4.

e. $P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}1875$, probabilidad de que la multiplicación de los valores de los 2 dados sea menor a 3 y mayor que 0.
$P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}1875$, probabilidad de que la multiplicación de los valores de los 2 dados sea menor a 5 y mayor que 2.

22. $P(3 \leq Z < 5) = 3\,f(2) + 0{,}6 = 0{,}6$

23. El valor repetido es 2, ya que la probabilidad de que salga 4 es la más alta, lo que se puede ver en que la mayor diferencia entre las columnas de la función de distribución es entre 3 y 4, lo que corresponde al valor de P(4).

24.

a. A partir de la información histórica se puede encontrar una tendencia comparable con la situación al momento de la publicación, por lo que se puede proyectar una cierta cantidad de enfermos, obteniéndose el aumento de la probabilidad.

b. No, ya que no sólo influye eso, sino que también factores climáticos, socioeconómicos, etc.

Página 325

25. Respuesta abierta.

GLOSARIO

A

Abscisa: valor que se representa en el eje horizontal o eje X en el plano cartesiano.

Altura: segmento perpendicular trazado desde un vértice de un polígono hasta el lado opuesto o hasta su prolongación.

Amplificar: en fracciones, multiplicar el numerador y denominador de una fracción por un mismo término.

Ángulo: región del plano encerrada por dos semirrectas con un origen en común.

Ángulo de depresión: es aquel formado por la visual a un punto y la horizontal cuando el punto se encuentra bajo el observador.

Ángulo de elevación: es aquel formado por la visual a un punto y la horizontal cuando el punto se encuentra sobre el observador.

Aproximar: encontrar un número con las cifras pedidas que esté muy próximo al número dado. Se puede aproximar por redondeo o por truncamiento.

B

Binomio: expresión algebraica compuesta por dos términos.

Bisectriz de un ángulo: rayo que parte del vértice y divide al ángulo en dos ángulos de igual medida.

C

Cateto: lado opuesto a un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

Cilindro recto: cuerpo geométrico obtenido al rotar un rectángulo en torno a uno de sus lados, o bien, al trasladar un círculo.

Círculo: región o área del plano delimitada por una circunferencia.

Circunferencia: curva cerrada cuyos puntos están a igual distancia de un punto común llamado centro.

Clausura: propiedad de algunas operaciones definidas en conjuntos. Esta se refiere a que al realizar dicha operación con elementos de un conjunto su resultado se mantiene en el conjunto.

Codominio: conjunto de llegada de una función. Contiene al recorrido de la función.

Coeficiente: constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Coeficiente de posición: ordenada del punto (0, n) que pertenece a una función afín y que indica su intersección con el eje Y.

Combinación: subconjunto de r elementos tomados de un conjunto de n objetos sin considerar el orden.

Conjetura: afirmación que se plantea a partir de la observación de regularidades, con las cuales resulta evidente, pero que aún no ha sido demostrada.

Conjunto: colección de objetos.

Conjunto vacío: conjunto que no posee elementos.

Cono recto: cuerpo geométrico obtenido al rotar un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.

Cuadrado de binomio: es un binomio multiplicado por sí mismo, o sea, elevado a dos.

Cubo de binomio: es un binomio elevado a tres.

D

Datos: cantidades o medidas obtenidas de la observación, comparación y/o aplicación de encuestas.

Decimal finito: expresión decimal cuyas cifras decimales son finitas.

Decimal periódico: expresión decimal cuya parte decimal tiene una cifra o un grupo de cifras que se repite indefinidamente.

Demostración: secuencia lógica basada en definiciones, postulados o axiomas y teoremas que permite determinar nuevos resultados matemáticos.

Desigualdad: relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es mayor o cuál es menor.

Diagrama de árbol: representación que muestra todos los posibles resultados de un experimento.

Dirección de un vector: está asociada al ángulo que forma la recta que contiene al vector con el eje horizontal.

Dominio: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente de una función.

E

e (número de Euler) : número irracional cuyo valor es $e = 2{,}7182818\ldots$

Ecuación: igualdad entre dos expresiones algebraicas en la cual aparecen incógnitas.

Eje de simetría: recta que divide una figura en dos partes que coinciden exactamente.

Equiprobabilidad: de igual probabilidad. Dos eventos de un experimento son equiprobables si tiene la misma probabilidad de ocurrencia.

Escalar: elemento de un conjunto numérico; se usa, en particular, cuando se le quiere distinguir claramente de los vectores.

Esfera: cuerpo geométrico obtenido al rotar un semicírculo en torno a su diámetro.

Espacio muestral: conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento: subconjunto del espacio muestral.

Experimento aleatorio: experimento del cual no se puede prever el resultado.

Expresión algebraica: es un conjunto de uno o más términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición o sustracción.

Exponente: número que indica la cantidad de veces que se multiplica la base en una potencia.

F

Factorial: se denota por !, se define para un número natural n como el producto de los números enteros positivos desde 1 hasta n. El factorial de 0 se define como 1.

Factorización de un número: expresión de un número como el producto de otros.

Factorización de un polinomio: descomposición de un polinomio como producto de expresiones algebraicas.

Factorizar: expresar un número o una expresión algebraica como producto de dos o más números o expresiones algebraicas, llamados factores

Función: regla de correspondencia entre dos conjuntos llamados dominio y recorrido, en la cual se le asigna a cada elemento del dominio un único elemento del recorrido.

Función afín: función de la forma $f(x) = mx + n$, donde m corresponde a la pendiente y n al coeficiente de posición de la recta que la representa. Su gráfica es una línea recta que corta al eje Y en el punto (0, n).

Función creciente: función cuyos valores aumentan a medida que los valores de su dominio crecen.

Función de probabilidad: aquella que relaciona cada valor de una variable aleatoria con su probabilidad.

Función decreciente: función cuyos valores disminuyen a medida que los de su dominio crecen.

Función inversa: una función g es la inversa de una función dada f, si el recorrido de g es el dominio de f y para todo $x \in \text{dom } f$, $f(x) = b$ si y solo si $f^{-1}(b) = x = g(b)$.

Función lineal: función de la forma $f(x) = mx$, donde m corresponde a la constante de proporcionalidad (o pendiente) de las variables involucradas. Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

G

Generatriz: curva o figura plana cuya rotación alrededor de una recta fija genera un sólido de revolución.

Gráfica de una función: dibujo en el plano cartesiano que indica la relación entre dos variables.

H

Hipotenusa: lado mayor en un triángulo rectángulo y opuesto al ángulo recto.

Hipótesis: en un teorema o proposición matemática es lo que se supone cierto y no se debe demostrar ya que corresponde a una definición, axioma o teorema ya demostrado.

I

Identidad: igualdad de expresiones algebraicas que es siempre verdadera para cualquier valor de las variables.

Imagen de una función: son los elementos del recorrido de una función.

Incógnita: cada una de las variables que aparecen en una ecuación o inecuación, que son desconocidas.

Inconmensurable: que no puede medirse.

Inecuación: desigualdad en la que intervienen una o más incógnitas.

Intersección: conjunto formado por los elementos comunes de dos o más conjuntos.

L

Logaritmo: exponente al que se debe elevar una base para obtener un número dado, llamado argumento.

Longitud: magnitud física que expresa la distancia entre dos puntos.

M

Magnitud de un vector: gráficamente corresponde a la longitud del vector.

Media aritmética: promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

Módulo de un vector: es la longitud del segmento determinado por el vector.

N

Números enteros: conjunto numérico que incluye a los números naturales, al cero y a los inversos aditivos de los números naturales.

Números racionales: conjunto formado por los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

Número irracional: aquel que no se puede escribir como un cociente entre dos números enteros.

Números reales: conjunto que tiene todos los números racionales e irracionales. Se simboliza por medio de la letra $\mathbb{R}$.

O

Ordenada: valor que se representa en el eje vertical (eje Y) en el plano cartesiano.

Origen: punto en el que se intersecan los ejes que conforman el plano cartesiano. Se representa con la coordenada (0, 0).

P

Par ordenado: en el plano cartesiano corresponde a una dupla formada por dos elementos, el primero indica la abscisa y el segundo la ordenada.

Parámetros: valores que definen a una expresión determinada. En el caso de las funciones, corresponden a sus coeficientes y términos libres.

GLOSARIO

Pendiente de la recta: es la inclinación de una recta con respecto al eje X. Cuando la representación algebraica de la recta está en la forma $y= mx + n$, m corresponde a la pendiente.

Permutación: ordenamiento de un conjunto de objetos.

Período: en un número decimal infinito periódico o semiperiódico, está ubicado en la parte decimal y corresponde al patrón que se repite en forma infinita.

Pi (π): número irracional que corresponde a la razón entre el perímetro (P) y el diámetro de un círculo.

Plano cartesiano: es el plano provisto de un sistema de coordenadas en el que se distinguen dos ejes perpendiculares (rectas numéricas) que determinan cada punto en el plano.

Polígono inscrito: polígono cuyos vértices son todos tangentes a una circunferencia.

Polinomio: expresión algebraica que consta de uno o más términos algebraicos.

Potencia: multiplicación de un factor repetidas veces por sí mismo. El factor repetido se denomina base y el número que indica la cantidad de veces que se repite se llama exponente.

Principio de Cavalieri: dos cuerpos de la misma altura, con base de igual área y cuyas secciones paralelas a las bases son siempre de igual área tienen el mismo volumen.

Probabilidad: medida para cuantificar la ocurrencia o no de eventos en un experimento aleatorio. Toma valores entre 0 y 1.

Producto notable: productos cuyo desarrollo se conoce por simple observación.

R

Racionalizar: proceso de amplificación de una fracción algebraica para obtener otra equivalente sin raíces en el denominador.

Recorrido: conjunto formado por las imágenes obtenidas al establecer una función.

Recta numérica: recta donde se representa un determinado conjunto de números, de tal forma que a cada punto de la recta, le corresponde un único número.

Rectas paralelas: líneas rectas que tienen la misma pendiente y no se cortan en ningún punto.

Rectas perpendiculares: líneas rectas que forman cuatro ángulos rectos en el punto que se intersecan.

Reducción al absurdo: argumento de demostración en el que se supone que la proposición que se quiere demostrar no es cierta, y con ello se llega a una contradicción. Así, se concluye que la proposición es verdadera.

Reflexión: transformación isométrica en el plano que consiste en reflejar una figura respecto de una recta llamada eje de reflexión (simetría axial), o respecto de un punto, en el caso de la simetría central.

Regla de Laplace :forma de calcular la probabilidad de un evento (asumiendo que los resultados posibles o eventos simples son equiprobables), obteniendo el cociente entre los casos favorables y los casos totales del experimento aleatorio.

S

Sentido de un vector: está determinado por la punta de flecha del vector y corresponde a las orientaciones opuestas de una misma dirección.

Simplificar: en fracciones, dividir ambos términos de ella por una misma expresión distinta de 0.

Solución pertinente: solución que es coherente con el contexto de un problema.

Sólido de revolución: sólido que se obtiene al hacer girar una región del plano o una curva en torno a un eje.

Solución: valores de las incógnitas de una ecuación que la satisfacen.

T

Teorema: proposición matemática que está demostrada.

Tesis: en un teorema o proposición matemática es lo que se debe demostrar a partir de las hipótesis.

Traslación: transformación isométrica en el plano que consiste en desplazar una figura especificando la magnitud, dirección y sentido del desplazamiento. De esta manera, la traslación está asociada a un vector.

U

Unión: conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto.

V

Variable: cantidad que puede tomar distintos valores.

Variable aleatoria: función en la que a cada suceso elemental de un experimento aleatorio le corresponde un único valor numérico.

Variable aleatoria discreta: puede tomar una cantidad finita de valores.

Variable dependiente: variable cuyo valor depende de los valores que se asignen a la variable independiente.

Variable independiente: variable a la cual se le asignan valores arbitrarios en una función.

Variación: conjunto de objetos escogidos considerando el orden.

Vector: objeto matemático representado generalmente por un segmento de recta direccionado (flecha) caracterizado por tener magnitud, dirección y sentido.

Volumen: medida del espacio que ocupa un cuerpo.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, R. (2013). *Conjuntos numéricos y aritmética*. Medellín: Universidad de Medellín.

Araneda, A., Chandía, E. y Sorto, M. (2013). *Recursos para la formación inicial de profesores de Educación Básica. Datos y azar.* Santiago: Ediciones SM.

Araya, R. (2000). *Inteligencia Matemática*. Santiago: Editorial Universitaria.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Baker, A. (1986). *Breve introducción a la teoría de números.* Madrid: Editorial Alianza.

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Burdeos, Francia: Universidad de Burdeos I.

Cantoral, R., ET AL. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México D.F.:Trillas.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Aique.

Chuaqui, R. (1980). *¿Qué son los números?* Santiago: Editorial Universitaria.

Freund J., Miller I. y Miller M. (2000). *Estadística matemática con aplicaciones.* Madrid: Editorial Prentice Hall.

Godino, J. (2002). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros.* Granada, España: Proyecto Edumat-Maestros, Gami.

Innocenti G., Villanueva F., y Masjuan G. (1980). *Geometría elemental del espacio*. Santiago: Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales*. Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

Miranda, H. y Moya, M. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos*. Santiago: Universidad de Santiago de Chile, Centro Comenius.

Oteíza, F., Zamorano A., y Baeza, O. (2008). *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

Portus, L. (1998). *Introducción a la estadística*. Bogotá: Mc Graw Hill.

Rey Pastor, J. (2000). *Historia de la matemática*. Barcelona: Ediciones Gedisa.

Saavedra E. (2003). *Cálculo de Probabilidades*. Santiago: Editorial Universidad de Santiago.

LINKS DE INTERÉS

Ministerio de Educación: www.mineduc.cl

OCDE-Pisa: www.oecd.org

Mamut Matemáticas: www.mamutmatematicas.com/

Programa Explora Conicyt: www.explora.cl

Icarito: www.icarito.cl

Simce: www.simce.cl

Ministerio de Salud: www.minsal.cl

Portal de la junta de Andalucía: www.juntadeandalucia.es/

El paraíso de las matemáticas: www.matematicas.net

Instituto Nacional de Estadísticas: www.ine.cl

Educación: www.educarchile.cl

GeoGebra: www.geogebra.org

El portal de las matemáticas: www.sectormatematica.cl

Real Academia Española de la Lengua: www.rae.es

mifuturo.cl
Infórmate antes de elegir

ISBN 978-9563632958

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

EDICIÓN ESPECIAL PARA EL
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

sm