

TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA

Fabiola Iturra Quijada • Catalina Manosalva Iturriaga
• Madelaine Ramírez Aguiar • David Romero Durán

7^o
Básico



EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN



7°

básico

MATEMÁTICA

TEXTO DEL ESTUDIANTE

Fabiola Iturra Quijada

Profesora de Educación General Básica con mención en Matemática

Catalina Manosalva Iturriaga

Profesora de Educación General Básica con mención en Matemática

Madelaine Ramírez Aguiar

Licenciada en Ciencias con mención en Matemática

David Romero Durán

Profesor de Educación General Básica con mención en Matemática

En el desarrollo del Texto del estudiante de **Matemática 7° básico** SM, participó el siguiente equipo:

Dirección editorial

Arlette Sandoval Espinoza

Coordinación área Matemática

Carla Frigerio Cortés

Edición

Catalina Manosalva Iturriaga

Ayudante de edición

Patricia Vidal Oyarzo

Autoría

Fabiola Iturra Quijada

Catalina Manosalva Iturriaga

David Romero Durán

Madelaine Ramírez Aguiar

Consultoría pedagógica

Daniela Bravo Valdivia

Katherine Morales Valderrama

Tomás Bralic Muñoz

Johanna Camacho González

Corrección de estilo y prueba

Víctor Navas Flores

Desarrollo de solucionario

Manuel Rebolledo Hernández

Katherine Morales Valderrama

José Antonio Romante Flores

Tomás Bralic Muñoz

Patricia Vidal Oyarzo

Dirección de arte y diseño

Carmen Gloria Robles Sepúlveda

Coordinación de diseño

Gabriela de la Fuente Garfias

Iconografía

Vinka Guzmán Tacla

Diseño de portada

Estudio SM

Diseño y diagramación

Karina Riquelme Riquelme

Ilustraciones

Francisco Arratia Salazar

Tomás Reyes Reyes

Fotografías

Carlos Johnson Muñoz

Shutterstock

Wikimedia Commons

Banco de imágenes SM

Jefatura de planificación

Andrea Carrasco Zavala

Gestión de derechos

María Loreto Ríos Melo

Este texto corresponde al Séptimo año de Educación Básica y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 614/2013, del Ministerio de Educación de Chile.

ISBN: 978-956-363-726-7 / Depósito legal: 309741

©2019 – SM S.A. – Coyancura 2283 piso 2 – Providencia

Se terminó de imprimir esta edición de 243.868 ejemplares en el mes de Enero del año 2020. Impreso por RR. Donnelley.

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

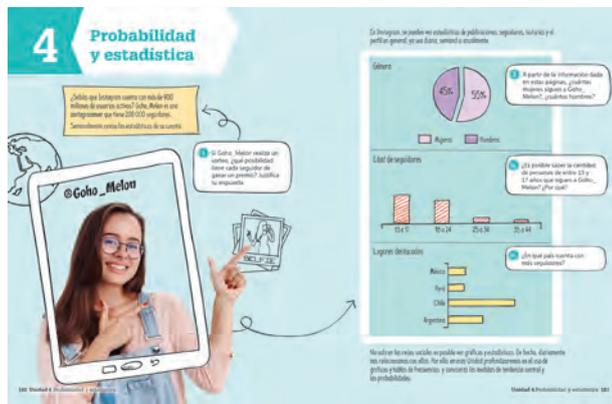
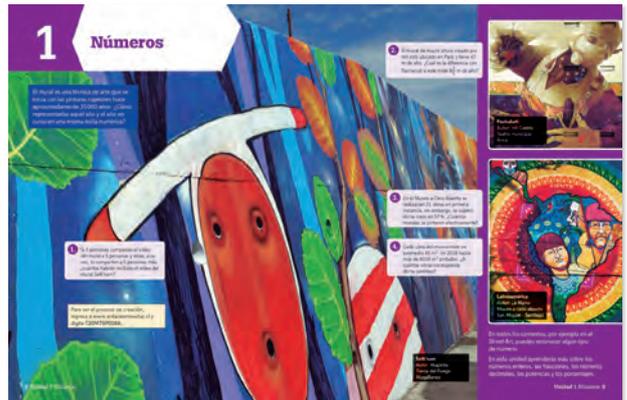
En este libro se utilizan de manera inclusiva términos como "los niños", "los padres", "los hijos", "los apoderados", "profesores" y otros que refieren a hombres y mujeres. De acuerdo con la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos de cada sexo que formen parte del conjunto. Este uso evita además la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

En este texto se utilizaron las siguientes familias tipográficas: Aspira nar, Glypha y JollyGood Proper.

Presentación

Te damos la bienvenida a tu Texto de Matemática

Aquí podrás seguir conociendo esta disciplina y descubriendo cómo está presente en tu vida cotidiana y cómo recurres a ella en diversas situaciones.



Presentación del texto

Inicio de Unidad

1 Números

1 Si 5 personas comparten el valor del mural a 5 personas y ellas, a su vez, lo comparten a 3 personas más, ¿cuántas habrán recibido el valor del mural 500 km?

Para ver el proceso de creación, ingresa a www.embaembomedi.cl/digital/20M7BPO6A.

2 El mural de mayor altura creado por arte en el mundo se encuentra en París y tiene 47 m de alto. ¿Cuál es la diferencia con Pichabull si este mide $4\frac{1}{2}$ m de alto?

3 En el Museo de Cero Alberto se exhiben 23 obras en primera instancia, sin embargo, se suelen exhibir entre 5 y 7. ¿Cuántas obras se pintaron efectivamente?

4 Cada obra del museo mide en promedio 80 cm. En 2018 había más de 6000 m² pintados. ¿A cuántas obras corresponde dicho cantidad?

5 ¿Has estado en una situación similar a la del cálculo de la temperatura mínima de los géiseres del Tatio Comantá?

Describe el procedimiento que seguiste para obtener la temperatura mínima de cada lugar. ¿Cuál te generó problema?, ¿cómo lo resolviste?

En parejas, comparen sus respuestas.

¿Has estado en una situación similar a la del cálculo de la temperatura mínima de los géiseres del Tatio Comantá?

Describe el procedimiento que seguiste para obtener la temperatura mínima de cada lugar. ¿Cuál te generó problema?, ¿cómo lo resolviste?

En parejas, comparen sus respuestas.

Los números enteros (Z) corresponden a los números naturales (N), los números negativos (-), los números positivos (+) y el cero (0).

Los enteros positivos son siempre antecedido por un signo positivo (+), mientras que los positivos pueden o no llevar el signo +.

Pichabull
Autor: Luis Carrero
Título: Mural de Pichabull
Año: 2018

Latinoamérica: Alberto
Autor: Luis Carrero
Título: Mural de Alberto
Año: 2018

En todos los contextos, por ejemplo en el Street Art, puedes reconocer algún tipo de número.

En esta unidad aprenderás más sobre los números enteros, los fracciones, los números decimales, las potencias y los porcentajes.

Unidad 1 Números 8

Evaluación diagnóstica

Activo lo que sé
Realiza las siguientes actividades para recordar lo que has aprendido anteriormente.

Números enteros
1. Ubica los números en una recta numérica. Luego, escríbelos en orden descendente.
3750 - 250 - 7800 - 1500 - 500 - 9250

2. Resuelve:
a. $72468 + 52699$
b. $78563 + 177 : 3 - 1852 \cdot 9$

3. Descompon de forma aditiva multiplicativa:
a. 1083016
b. 20498420

Números decimales
4. Compara los siguientes pares de números usando los signos >, < o =.
a. 1,003 y 0,993
b. 17,36 y 17,65

5. Resuelve las siguientes operaciones:
a. $46,942 - 34,425$
b. $9,03 + 58,49$
c. $7,25 - 9$
d. $55,76 \cdot 4$

Fracciones y números decimales
6. Resuelve las operaciones y expresa el resultado como fracción irreducible:
a. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$ c. $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$
b. $\frac{3}{10} - \frac{1}{20}$ d. $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}$

Reflexión
• ¿Qué actividades te resultaron más fáciles de realizar?
• ¿Qué temas crees que debes reforzar para enfrentarte a esta Unidad?

18 Unidad 1 Números

Reflexión

Reflexión

- ¿Qué actividades te resultaron más fáciles de realizar?
- ¿Qué temas crees que debes reforzar para enfrentarte a esta Unidad?

Unidad 1 Números

Desarrollo de Unidad

Inicio y desarrollo de Lección

1 Números enteros

Números enteros (Z)

¿Qué tipo de sistemas tenemos?

¿Por qué es importante saber operaciones y propiedades de los sistemas?

Clase de Chile

1. Lee y observa la información. Luego, realiza las actividades propuestas.

Decide el límite norte del país hasta Valdivia (Región de los Ríos) de acuerdo al clima que se presenta en cada zona.

Clima de Chile

• En la zona norte, la temperatura puede bajar a menos de 0°C.

Clima de Chile

• En la zona sur, la temperatura puede bajar a menos de 0°C.

Si en todos los lugares la oscilación térmica fue de 30°C, ¿cuál fue la temperatura mínima de cada uno?

Describe el procedimiento que seguiste para obtener la temperatura mínima de cada lugar. ¿Cuál te generó problema?, ¿cómo lo resolviste?

En parejas, comparen sus respuestas.

¿Has estado en una situación similar a la del cálculo de la temperatura mínima de los géiseres del Tatio Comantá?

Describe el procedimiento que seguiste para obtener la temperatura mínima de cada lugar. ¿Cuál te generó problema?, ¿cómo lo resolviste?

En parejas, comparen sus respuestas.

Los números enteros (Z) corresponden a los números naturales (N), los números negativos (-), los números positivos (+) y el cero (0).

Los enteros positivos son siempre antecedido por un signo positivo (+), mientras que los positivos pueden o no llevar el signo +.

Metacognición

- ¿Has estado en una situación similar a la del cálculo de la temperatura mínima de los géiseres del Tatio Comantá?
- Describe el procedimiento que seguiste para obtener la temperatura mínima de cada lugar. ¿Cuál te generó problema?, ¿cómo lo resolviste?
- En parejas, comparen sus respuestas.
- ¿Has estado en una situación similar a la del cálculo de la temperatura mínima de los géiseres del Tatio Comantá?
- Describe el procedimiento que seguiste para obtener la temperatura mínima de cada lugar. ¿Cuál te generó problema?, ¿cómo lo resolviste?
- En parejas, comparen sus respuestas.

Lección 4 Operaciones combinadas

¿Cuáles son las precedencias para operar con fracciones?

¿Cómo resolver operaciones con decimales?

1. En parejas, escogen una vía de resolución del ejercicio representando todos los números como decimal o todos como fracción. Luego, responden:
 $2,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot (1,2 - \frac{1}{5})$

• ¿Usaste alguna diferencia en el resultado? ¿Por qué?
 • ¿Qué aspectos debes considerar al momento de resolver ejercicios que consideren muchas operaciones?
 • Resolver con otra pareja y comparen sus respuestas. Luego, complementenlas.

Para resolver operaciones combinadas entre fracciones y números decimales:

1.° De ser necesario, representa las fracciones como números decimales o viceversa.

2.° Si la expresión tiene parentesis, resuelve lo 0 las operaciones contenidas en ellos desde adentro hacia afuera hasta que ya no queden parentesis.

3.° Resuelve las multiplicaciones o divisiones de izquierda a derecha.

4.° Una vez que solo queden adiciones o sustracciones, resuélvelas de izquierda a derecha.

2. Analiza la información y resuelve.

La tacha que te permite trabajar con fracciones es $\frac{1}{2}$. Si quieres resolver $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 0,5$, basta con digitar las siguientes teclas:
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 0,5 = 0,15$
 Observa cómo resultó 0,3.

Practica con los resultados de las actividades de las páginas anteriores.

1

Para resolver $(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}) \cdot \frac{1}{2}$, basta con digitar las siguientes teclas:
 $(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}) \cdot \frac{1}{2} = 0,55$

Esta vez, el resultado será $\frac{1}{2}$.

a. $(4,7 - 3,2) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{5})$ b. $(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) \cdot (0,75 - \frac{1}{2})$

3. Resuelve las siguientes operaciones combinadas de fracciones y decimales. Guíate por el ejemplo.

$(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{5})$
 $= (\frac{1}{2} + \frac{3}{5}) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{5})$
 $= (\frac{1}{2} + \frac{3}{5}) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{5})$
 $= (\frac{1}{2} + \frac{3}{5}) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{5})$
 $= 0,55$

• Resuelve las operaciones combinadas de fracciones y decimales.
 • Resuelve las operaciones combinadas de fracciones y decimales.
 • Resuelve las operaciones combinadas de fracciones y decimales.

4. Observa a los ciclistas. Si 1 pedal son aproximadamente $\frac{33}{100}$ m, ¿cuántas vueltas recorrieron entre los benchmarks?

Para concluir

a. Martín recibió 15,5 USD de su abuelo y 20,8 USD de su mamá. Si guardó 12,4 USD y el resto lo cambió a pesos chilenos (1 USD = 505,48 con cuántos pesos chilenos quedó Martín? Explica tu procedimiento.

b. ¿Qué importancia tiene el orden de la resolución al desarrollar ejercicios combinados? Justifica tu respuesta.

c. ¿Qué estrategias empleaste en la resolución de problemas? Compartan las en parejas.

Cierre de Tema

Para concluir

- a. Martín recibió 15,5 USD de su abuelo y 20,8 USD de su mamá. Si guardó 12,4 USD y el resto lo cambió a pesos chilenos, ¿cuántos pesos chilenos quedó Martín? Explica tu procedimiento.
- b. ¿Qué importancia tiene el orden de la resolución al desarrollar ejercicios combinados? Justifica tu respuesta.
- c. ¿Qué estrategias empleaste en la resolución de problemas? Compartan las en parejas.

Cierre de Lección

Evaluación intermedia

Antes de continuar 3

Realiza las siguientes actividades. Luego, responde las preguntas dispuestas en la sección Reflexión.

1. Observa la información y calcula la longitud de la circunferencia máxima de cada planeta. Luego, anótalos de mayor a menor según esta medida.

Planeta	Radio (en km)	Área (en km ²)	Temperatura (en °C)
Marte	3395	144,500	21
Saturno	59,720	378,680,000	-178
Júpiter	69,911	1,492,850,000	-108
Uranio	25,362	407,698,000	-197

Nota: Selecciona un eje apropiado en las imágenes de la superficie del planeta y mide su circunferencia máxima.

2. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras. Considera que las figuras están formadas por cuadrados, semicírculos y cuartos de círculo.

3. En unas bóvedas cónicas que se encuentran en construcciones, se instalan arpilleras en la parte central del techo, las que alamboran ópticamente en un radio de 2.5 m y 3.2 m. Si el área del piso del galpón tiene 240 m² y el otro tiene una medida lateral de 21 m.

a. ¿Cuántos metros cuadrados logra iluminar cada arpillera?
 b. ¿Cuántos metros cuadrados no recibe la luminosidad necesaria?

Reflexión

- ¿Qué temas debes reforzar para avanzar en buenas condiciones en esta Unidad?
- Haz un listado de tus debilidades y realiza un plan de mejora para cada una.

Evaluación de estrategias y plan de mejora

Reflexión

- ¿Qué temas debes reforzar para avanzar en buenas condiciones en esta Unidad?
- Haz un listado de tus debilidades y realiza un plan de mejora para cada una.

Cierre de Unidad

Evaluación de Unidad

Síntesis 3

¿Qué es un diagrama de flujo?

Es un organizador gráfico, similar a una red conceptual, que se va expandiendo con preguntas cuya respuesta es sí o no. Las preguntas definen un flujo en el diagrama.

El sentido de armarlo se escoge un tema central y las ideas principales se formulan como afirmaciones y se las conecta de forma coherente.

Observa el diagrama de flujo creado para reconocer polígonos y clasificarlos.

```

    graph TD
        Q1{¿Es una figura cerrada?} -- Sí --> Q2{¿Tiene al menos tres lados?}
        Q1 -- No --> R1[No es una figura]
        Q2 -- Sí --> Q3{¿Tiene al menos tres vértices?}
        Q2 -- No --> R2[No es un triángulo]
        Q3 -- Sí --> Q4{¿Tiene al menos tres ángulos interiores?}
        Q3 -- No --> R3[No es un triángulo]
        Q4 -- Sí --> Q5{¿Tiene al menos tres lados?}
        Q4 -- No --> R4[No es un triángulo]
        Q5 -- Sí --> R5[Es un triángulo]
        Q5 -- No --> Q6{¿Tiene al menos cuatro lados?}
        Q6 -- Sí --> Q7{¿Tiene al menos cuatro vértices?}
        Q6 -- No --> R6[No es un cuadrilátero]
        Q7 -- Sí --> R7[Es un cuadrilátero]
        Q7 -- No --> Q8{¿Tiene al menos cinco lados?}
        Q8 -- Sí --> R8[Es un pentágono]
        Q8 -- No --> R9[No es un pentágono]
    
```

Ahora, hazlo tú

- Continúa el diagrama en tu cuaderno desde el recuadro "Es un triángulo". Pienso en las preguntas necesarias para la clasificación de triángulos y formo el diagrama.
- Integra la circunferencia en el diagrama.
- En pares, compartan y analicen sus diagramas. ¿Cuál se les ocurrió cada uno para crear su síntesis? ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre sus mapas?
- Desafío Crea un diagrama con los elementos notables de un triángulo.

Repaso 3

Realiza las siguientes actividades.

Lección 10: Polígonos

- Determina cuánto suman los ángulos interiores de los siguientes polígonos. Luego, calcula la medida de uno de sus ángulos exteriores.
 - Hexágono regular.
 - Decágono regular.
 - Polígono regular de 17 lados.

Lección 11: Áreas de polígonos

- Calcula el área de los siguientes polígonos.
 - Paralelogramo con base 6 m y altura 4 m.
 - Triángulo con base 10 dm y altura 3 dm.
 - Triángulo con base 2 m y altura 2 m.

Lección 12: Círculo y circunferencia

- Estima el área y el perímetro de los siguientes círculos/circunferencias.
 - Considera $\pi = 3,14$.
 - Circunferencia de radio 3,2 cm.
 - Circunferencia de diámetro 12,6 dm.
- ¿Cuál es el área del sector azul?
 - Considera $\pi = 3,14$.

Lección 13: Posición y desplazamiento

- Determina las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos.

Lección 14: Bariles y congruencia

- Dibuja un segmento \overline{PQ} en cualquier posición. Luego, construye una recta paralela y una recta perpendicular que pase por el punto A, que es punto medio.

Lección 15: Elementos notables del triángulo

- Dibuja el triángulo respetando sus medidas. Luego, determina las mediatrices, bisectrices, alturas y transversales de equidistancia con sus puntos de intersección.

¿Qué aprendí? 3

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades:

Práctica

- Realiza las actividades a partir de la imagen principal.
- Calcula el área coloreada de cada figura.
- Calcula el área de las superficies blancas de cada figura.
- Calcula el área total de cada figura.
- ¿Cómo son los áreas de las figuras entre sí? ¿Por qué sucede esto?
- ¿Cuál otra figura puedes formar utilizando el triángulo? ¿Cuál ocurre a con su área?

Realiza las actividades propuestas a continuación.

- Indica cuánto suman las medidas de los ángulos interiores en las siguientes figuras:
 - Triángulo
 - Cuadrado
 - Pentágono
 - Hexágono
 - Heptágono
 - Octógono
 - Nonágono
 - Decágono
- Calcula el área (da) de cada polígono dadas las coordenadas de sus vértices.
 - A: $(-5, -1)$, B: $(-5, -2)$, C: $(-1, -3)$, D: $(-1, -1)$
 - E: $(-3, -1)$, F: (-4) , G: (-1) , H: $(-2, -1)$
- Indica el vector de traslación.
 - A: $(2, 3)$ y $(1, 1)$
 - B: $(-1, -2)$ y $(2, 7)$
- Calcula el área (da) de cada polígono dadas las coordenadas de sus vértices.
 - A: $(-5, -1)$, B: $(-5, -2)$, C: $(-1, -3)$, D: $(-1, -1)$
 - E: $(-3, -1)$, F: (-4) , G: (-1) , H: $(-2, -1)$
- Comprime un triángulo escaleno acutángulo y luego traza las circunferencias de cada lado, las bisectrices, las transversales de equidistancia y las alturas. Finalmente, dibuja las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo.
- Observa la imagen y responde según lo solicitado.
 - ¿Cuál relación existe entre las rectas AB y CD?
 - ¿Cuál relación existe entre las rectas GH y JK?
- ¿Cuál recta no son paralelas ni perpendiculares?
- ¿Cuál relación existe entre las rectas AB y CD?
- ¿Cuál relación existe entre las rectas GH y JK?

Reflexión

- ¿Qué fortalezas y debilidades detectaste al rendir esta evaluación?
- ¿Tuvieron buenos resultados tus planes de mejora propuestos en las evaluaciones intermedias?
- ¿Qué tan interesante te resultó esta Unidad? ¿Para qué crees que es útil aprender sus contenidos?

Reflexión

- ¿Qué fortalezas y debilidades detectaste al rendir esta evaluación?
- ¿Tuvieron buenos resultados tus planes de mejora propuestos en las evaluaciones intermedias?
- ¿Qué tan interesante te resultó esta Unidad? ¿Para qué crees que es útil aprender sus contenidos?

Reflexión

Presentación del texto 3

1

Números 8

Activo lo que sé 10

Lección 1: Números enteros 11

Tema 1: Números enteros (\mathbb{Z}) 11

Tema 2: Valor absoluto 14

Tema 3: Orden y comparación en \mathbb{Z} 16

Antes de continuar 18

Lección 2: Adición y sustracción en \mathbb{Z} 19

Tema 1: Adición en \mathbb{Z} 19

Tema 2: Sustracción en \mathbb{Z} 23

Tema 3: Ejercicios combinados
y aplicaciones en \mathbb{Z} 27

Antes de continuar 29

Lección 3: Números decimales 30

Tema 1: Multiplicación y división
de números decimales 30

Tema 2: Equivalencia entre
decimales y fracciones 34

Antes de continuar 37

Lección 4: Fracciones 38

Tema 1: Multiplicación de fracciones 38

Tema 2: División de fracciones 42

Tema 3: Operaciones combinadas 46

Antes de continuar 48

Lección 5: Porcentajes 49

Tema 1: Representación de porcentajes 49

Tema 2: Cálculo de porcentaje 52

Tema 3: Resolución de problemas
que impliquen porcentajes 56

Antes de continuar 58

Lección 6: Potencias 59

Tema 1: Potencias de base y
exponente natural 59

Tema 2: Descomposición de un número
utilizando potencias 62

Tema 3: Notación científica 64

Antes de continuar 67

Síntesis 68

Repaso 69

¿Qué aprendí? 70

2

**Álgebra
y funciones** 72

Activo lo que sé 74

Lección 7: Lenguaje algebraico 75

Tema 1: Lenguaje algebraico 75

Tema 2: Expresiones algebraicas 78

Tema 3: Valorización de expresiones
algebraicas 80

Tema 4: Reducción de expresiones
algebraicas 82

Antes de continuar 84

Lección 8: Relaciones proporcionales 85

Tema 1: Razones y proporciones 85

Tema 2: Proporcionalidad directa 88

Tema 3: Proporcionalidad inversa 92

Tema 4: Aplicaciones de
proporcionalidad 96

Antes de continuar 98

Lección 9: Ecuaciones e inecuaciones 99

Tema 1: Ecuaciones 99

Tema 2: Inecuaciones 102

Antes de continuar 105

Síntesis 106

Repaso 107

¿Qué aprendí? 108

3 Geometría 110

Activo lo que sé	112
Lección 10: Polígonos.....	113
Tema 1: Polígonos	113
Tema 2: Ángulos en polígonos	116
Antes de continuar	119
Lección 11: Áreas de polígonos.....	120
Tema 1: Área de paralelogramos.....	120
Tema 2: Área de triángulos.....	124
Tema 3: Área de trapeacios.....	128
Antes de continuar	131
Lección 12: Círculo y circunferencia.....	132
Tema 1: Círculo y circunferencia	132
Tema 2: Perímetro del círculo.....	134
Tema 3: Área del círculo	138
Tema 4: Área de figuras compuestas.....	142
Antes de continuar	145
Lección 13: Posición y desplazamiento.....	146
Tema 1: Plano cartesiano.....	146
Tema 2: Vectores.....	150
Antes de continuar	152
Lección 14: Rectas y congruencia.....	153
Tema 1: Rectas paralelas y perpendiculares.....	153
Tema 2: Segmentos y figuras congruentes	156
Antes de continuar	159
Lección 15: Elementos notables del triángulo.....	160
Tema 1: Simetral o mediatriz	160
Tema 2: Bisectriz.....	164
Tema 3: Alturas	168
Tema 4: Transversal de gravedad	172
Antes de continuar	175
Síntesis	176
Repaso	177
¿Qué aprendí?	178

4 Probabilidad y estadística 180

Activo lo que sé	182
Lección 16: Organización y representación de datos	183
Tema 1: Población y muestra.....	183
Tema 2: Tablas de frecuencia	186
Tema 3: Uso de gráficos	190
Tema 4: Encuestas.....	196
Antes de continuar	198
Lección 17: Medidas de tendencia central ...	199
Tema 1: Media aritmética y rango.....	199
Tema 2: Moda.....	202
Tema 3: Mediana.....	204
Tema 4: Aplicaciones de medidas de tendencia central	206
Antes de continuar	208
Lección 18: Probabilidad	209
Tema 1: Experimentos aleatorios	209
Tema 2: Probabilidades y frecuencia relativa.....	211
Tema 3: Cálculo de probabilidades.....	214
Tema 4: Comparación de probabilidades.....	218
Antes de continuar	221
Síntesis	222
Repaso	223
¿Qué aprendí?	224

Glosario.....	226
Solucionario.....	228
Bibliografía y sitios web	256

1

Números

El mural es una técnica de arte que se inicia con las pinturas rupestres hace aproximadamente 35 000 años. ¿Cómo representarías aquel año y el año en curso en una misma recta numérica?

1. Si 5 personas comparten el video del mural a 5 personas y estas, a su vez, lo comparten a 5 personas más, ¿cuántas habrán recibido el video del mural *Selk'nam*?

Para ver el proceso de creación, ingresa a www.enlacesmineduc.cl y digita T20M7BP008A.

2. El mural de mayor altura creado por Inti está en París y tiene 47 m de alto. ¿Cuál es la diferencia con Pachakuti si este mide $8\frac{2}{5}$ m de alto?



Pachakuti
Autor: Inti Castro
Teatro municipal
Arica

3. En el Museo a Cielo Abierto se realizarían 21 obras en primera instancia, sin embargo, se superó dicha meta en 57%. ¿Cuántos murales se pintaron efectivamente?

4. Cada obra del museo mide en promedio 85 m^2 . En 2018 había más de 6000 m^2 pintados. ¿A cuántas obras corresponde dicha cantidad?



Latinoamérica
Autor: La Mano
Museo a cielo abierto
San Miguel - Santiago

Selk'nam
Autor: Alapinta
Tierra del Fuego
Magallanes

En muchos contextos, por ejemplo en el *Street Art*, puedes reconocer algún tipo de número.

En esta unidad aprenderás más sobre los números enteros, las fracciones, los números decimales, las potencias y los porcentajes.

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para recordar lo que has aprendido anteriormente.

Números naturales

- Ubica los números en una recta numérica. Luego, escríbelos en orden descendente.
 $3750 - 250 - 7500 - 1500 - 500 - 9250$
- Resuelve.
 - $725\,468 + 52\,699$
 - $78\,563 + 177 : 3 - 1852 \cdot 9$
- Realiza una descomposición de forma aditiva multiplicativa.
 - $1\,082\,016$
 - $20\,698\,630$

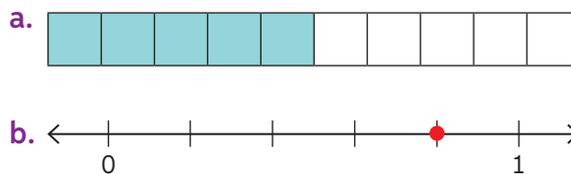
Números decimales

- Compara las siguientes parejas de números usando los signos $>$, $<$ o $=$.
 - $1,003$ y $0,093$.
 - $17,96$ y $17,89$.
- Resuelve las siguientes operaciones:
 - $68,942 - 56,425$
 - $9,03 + 586,49$
 - $7,25 \cdot 9$
 - $35,78 : 4$

Fracciones y números decimales

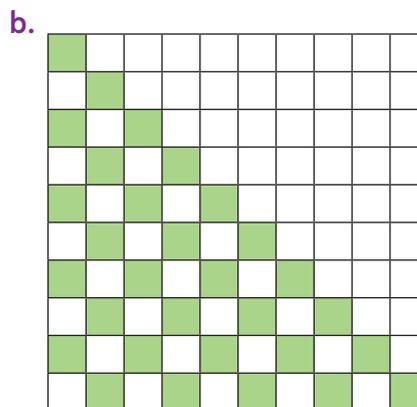
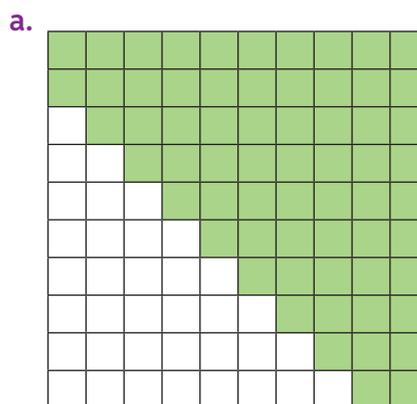
- Resuelve las operaciones y expresa el resultado como fracción irreducible.
 - $\frac{3}{15} + \frac{8}{15}$
 - $\frac{9}{10} - \frac{5}{10}$
 - $\frac{5}{6} + \frac{7}{15}$
 - $\frac{11}{12} - \frac{3}{8}$

- Identifica la fracción y el número decimal representado.



Razones y porcentajes

- Expresa las siguientes representaciones como razón y porcentaje. Considera el color verde con respecto al total de casillas.



Reflexiono

- ¿Qué actividades te resultaron más fáciles de realizar? Fundamenta tu respuesta.
- ¿Qué temas crees que debes reforzar para enfrentarte a esta Unidad?

Números enteros (\mathbb{Z})

Objetivo: Reconocer, en contextos cercanos, el conjunto de los números enteros y su relación con los naturales.

¿Qué tipos de números conoces?

¿Por qué es importante saber operatoria y propiedades de los números?

Climas de Chile

1. Lee y observa la información. Luego, realiza las actividades propuestas.



Desierto de Atacama
T° máx. **40 °C**



Cachiyuyo
T° máx. **30 °C**



Géiseres del Tatio
T° máx. **20 °C**

Desde el límite norte del país hasta Vallenar (Región de Atacama) se presenta el clima desértico normal.

Clima desértico normal

- Gran oscilación térmica diaria: alrededor de 30 °C.
- Escasas precipitaciones.
- En la noche, la temperatura puede bajar a menos de 0 °C.

- a. Si en todos los lugares la oscilación térmica fue de 30 °C, ¿cuál fue la temperatura mínima de cada uno?
 - b. Describe el procedimiento que seguiste para obtener la temperatura mínima de cada lugar: ¿cuál te generó problemas?, ¿cómo lo resolviste?
 - c. En parejas, comparen sus respuestas.
- ¿Has estado en una situación similar a la del cálculo de la temperatura mínima de los géiseres del Tatio? Describe la situación y fundamenta tu respuesta.

← *Oscilación térmica: corresponde a la diferencia entre las temperaturas máxima y mínima.*

En la vida se presentan situaciones como la anterior, que no pueden resolverse con los números naturales y el cero. Por ello, surgieron los números enteros.

Los números enteros (\mathbb{Z}) corresponden a los números naturales (enteros positivos), los enteros negativos y el cero.



Los enteros negativos son siempre precedidos por un signo negativo (-), mientras que los positivos pueden o no llevar el signo +.

5. Escribe una situación relacionada con cada imagen utilizando los números que la acompañan. Luego, comparen sus respuestas en parejas.

a.

25 000 y $-12\,500$

b.

 -20 y 140

c.

 -200 y -80

- ▶ ¿Por qué creen que sus respuestas no son las mismas?
- ▶ ¿Qué dificultades han tenido hasta el momento con los números enteros?, ¿cómo las han solucionado?

6. En tu cuaderno, determina si cada saldo mensual es positivo o negativo anteponiendo el signo + o $-$ según corresponda.

En enero la cuenta estaba con saldo a favor.

Durante tres meses seguidos la cuenta quedó con saldo en contra.

En junio, a pesar de no tener mucho dinero, la cuenta terminó con saldo a favor.

Gracias a un depósito, en febrero quedé con un saldo a favor.

Mes	Saldo
Enero	• \$15 000
Febrero	• \$25 000
Marzo	• \$10 000
Abril	• \$5 000
Mayo	• \$12 500
Junio	• \$2 000

Para concluir

- a. Analiza la siguiente situación y responde.

La temperatura de una ciudad bajó $12\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- ¿Qué número entero representa la variación de la temperatura? Representalo en una recta numérica.
 - Explica con tus palabras cómo reconociste el número entero. ¿Podrías haberlo hecho de otra forma?
- b. ¿Qué contenidos aprendiste al terminar el desarrollo de este tema? Descríbelos con tus palabras.
- c. ¿Qué estrategias usaste para desarrollar las actividades propuestas? Comparte con un compañero argumentando por qué las utilizaste.



6

Valor absoluto

Objetivo: Comprender el concepto de valor absoluto de un número entero y aplicarlo en diversos contextos.

- ¿Puede ser negativa una distancia?
- ¿Qué entiendes por valor absoluto?

1. Representa en una misma recta numérica los elementos descritos.

Un pelícano vuela a cinco metros de altura.	Un pulpo está a un metro bajo el nivel del mar.	
Una estrella de mar está a cuatro metros de profundidad.	El ancla del barco está a cinco metros de profundidad.	Un pez está a un metro de profundidad.
Una gaviota vuela a tres metros de altura.	Un barco al nivel del mar.	

- a. Según la recta numérica, ¿a qué distancia del nivel del mar se encuentra el pelícano?
- b. Según la recta numérica, ¿a qué distancia del nivel del mar se encuentra el ancla del barco?



En la situación anterior, el ancla se encuentra a cinco metros de profundidad, lo que se podría representar con el número entero -5 . Se dice, entonces, que la distancia desde el ancla a la superficie es de 5 m. Observa que este valor no considera el signo negativo.

- c. ¿Qué número entero se relaciona con la profundidad a la que se encuentra la estrella de mar? ¿Cuál es la distancia que la separa del nivel del mar?

El **valor absoluto** de un número entero ($|z|$) es el valor que representa la distancia entre este y el cero, por lo que el valor absoluto siempre es positivo o cero.

$|-3| = 3$ $|3| = 3$

$|-3| = |3| = 3$

2. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

- | | | | |
|-----------|------------|----------|-----------|
| a. $ -4 $ | c. $ -10 $ | e. $ 7 $ | g. $ -8 $ |
| b. $ 12 $ | d. $ -12 $ | f. $ 8 $ | h. $ 10 $ |

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

a. $|2| + |-3|$

e. $|132 - 64|$

b. $|65 - 23|$

f. $3 - |-3|$

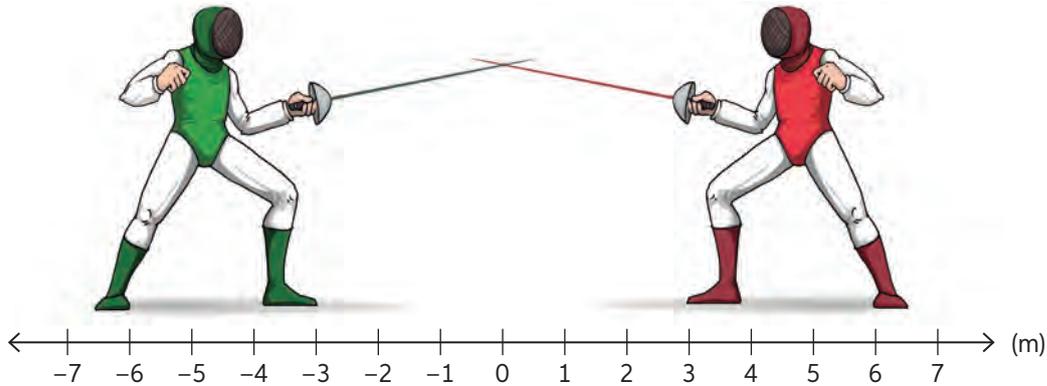
c. $|-123| - |45|$

g. $5 \cdot |-12|$

d. $|62| \cdot |-6|$

h. $|-18| \cdot |0|$

4. Interpreta la siguiente situación y responde las preguntas.



a. ¿Cómo se representa la posición del esgrimista de la izquierda utilizando números enteros? Guíate por la posición de la punta del pie que está adelante.

b. ¿Cómo se representa la posición del esgrimista de la derecha utilizando números enteros?

c. ¿A qué distancia se encuentran los esgrimistas con respecto al cero?

d. ¿Cuál es el valor absoluto de -3 y 3 ?

5. Resuelve los siguientes problemas:

a. Un vehículo sale del estacionamiento y se desplaza 40 m al norte. Luego, se devuelve sobre la misma calle y se traslada 70 m hacia el sur y luego 20 m más en la misma dirección. ¿Cuántos metros recorrió en total el vehículo?

b. Un pájaro en el aire y un buzo sumergido en el mar se encuentran a la misma distancia del nivel del mar y alineados verticalmente. ¿A qué altura se encuentra el pájaro y a qué profundidad el buzo si los separan 86 m?

Para concluir

a. Utilizando un diagrama, explícale a un compañero qué es el valor absoluto de un número. Luego, inviertan los papeles.

b. ¿Qué contenidos aprendiste al terminar el desarrollo de este tema? Descríbelos con tus palabras.

c. ¿Qué estrategias usaste para desarrollar las actividades propuestas? Comparte con un compañero argumentando por qué las escogiste.



7

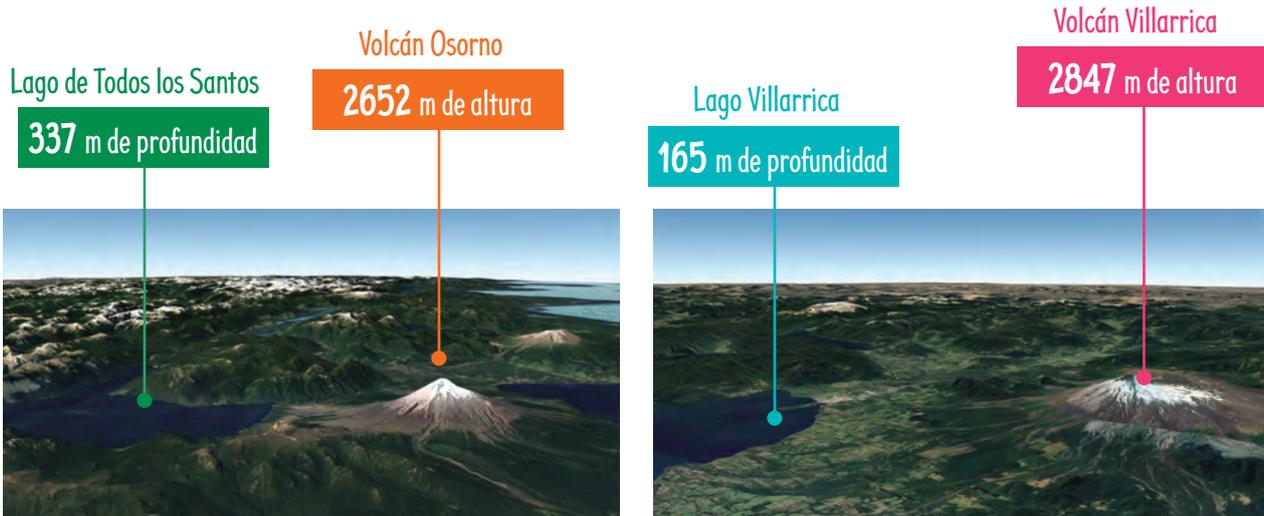
Orden y comparación en \mathbb{Z}

Objetivo: Comparar, ordenar y posicionar números enteros.

- ¿Qué estrategia usas para comparar números naturales?
- ¿Qué debes considerar al ubicar números en la recta numérica?

Geografía de Chile

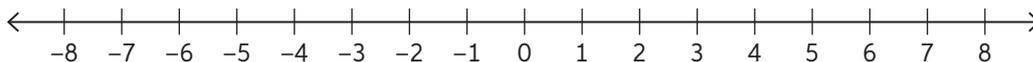
1. En parejas, analicen la información y realicen las actividades.



^ Región de Los Lagos.

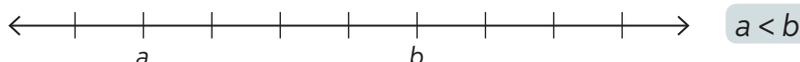
^ Región de la Araucanía.

- Representen con números enteros las profundidades y alturas.
 - Ordenen intuitivamente las magnitudes de menor a mayor.
 - Si el nivel del mar se representa con el número 0, ¿entre qué números del orden anterior lo ubicarían?
2. Dada la siguiente recta numérica, responde.



- ¿Cómo son los números situados a la izquierda del cero?
- ¿Cómo son los que están a la derecha del cero?
- ¿Cómo crees que es un número situado a la derecha del cero con respecto a uno que está situado a la izquierda? Explica.

Para comparar y ordenar números enteros, puedes utilizar la recta numérica. Recuerda que un número que se encuentra ubicado a la derecha de otro es siempre mayor.



- ¿Qué diferencias hay entre el orden de números naturales y el de números enteros en una recta numérica?

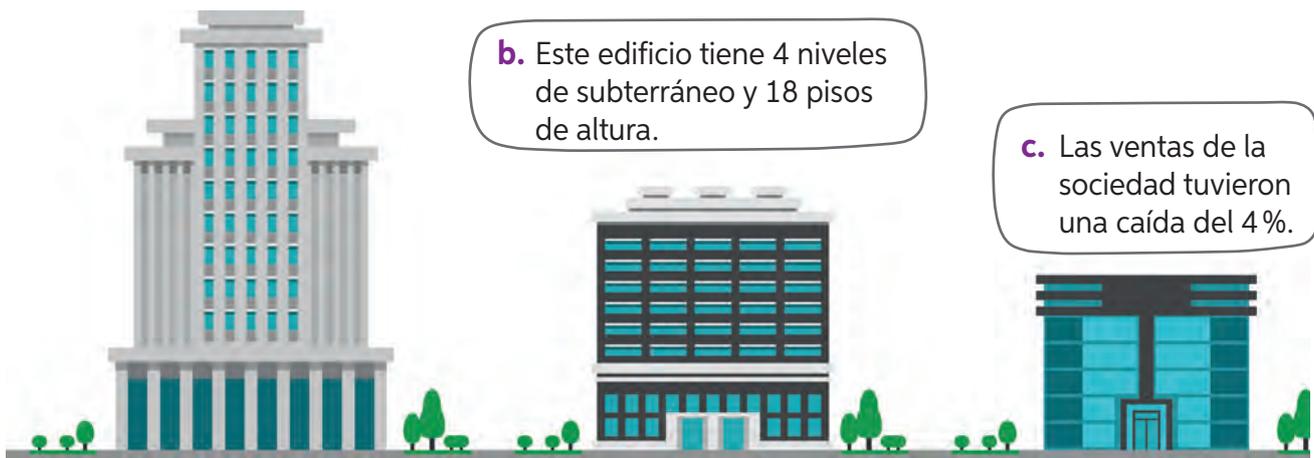
Realiza las actividades dispuestas a continuación. Luego, responde las preguntas de la sección “Reflexiono”.

1. Representa cada enunciado con números enteros.

a. El balance de la empresa arrojó una pérdida de \$10 000 000.

b. Este edificio tiene 4 niveles de subterráneo y 18 pisos de altura.

c. Las ventas de la sociedad tuvieron una caída del 4%.



2. Representa los siguientes eventos en la misma recta numérica.

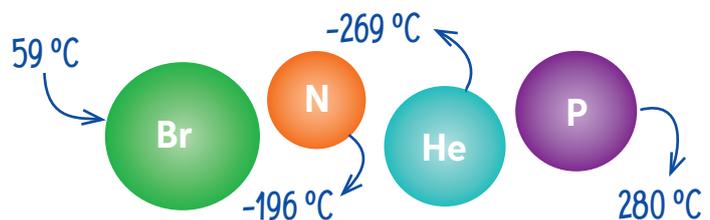
- a. En el año 776 a.C. se celebraron los primeros Juegos Olímpicos en Olimpia, Grecia y en 2020 en Tokio, Japón.
- b. En 1913 se registró la temperatura más alta en la Tierra: 56 °C en California, Estados Unidos. La temperatura más baja se registró en 1983 en la Base Vostok en la Antártica: aproximadamente 89 grados bajo cero.

3. Ordena los números de forma creciente.

- a. -5, 3, -4, 0, -11, 12
- b. 12 300, -1200, -1201, 12 303, -11 328

Química

4. Ordena de mayor a menor los elementos bromo (Br), helio (He), nitrógeno (N) y fósforo (P) según su punto de ebullición. Luego, escribe el valor absoluto de cada punto de ebullición.



Reflexiono

- ¿Qué conceptos de la lección entendiste bien? ¿Cómo lo podrías demostrar?
- ¿Qué conceptos debes reforzar? Realiza un listado y vuelve a las páginas correspondientes para analizar el contenido que debes reforzar.



Adición en \mathbb{Z}

Objetivo: Representar y resolver adiciones de números enteros.

¿Qué estrategia usas comúnmente para resolver adiciones?

¿Cómo representarías gráficamente una adición de números naturales?

1. Analiza el ejercicio resuelto:

Marcos, un distribuidor de sal de mar, tenía una deuda de 3 sacos en un almacén. Al entregar 9 sacos a dicho local, paga su deuda y cubre el pedido. ¿De cuántos sacos era el pedido del almacén?



➤ ¿Cómo se expresa con números enteros la deuda de Marcos en el almacén?

Consigue los materiales y sigue las instrucciones para resolver el problema con material concreto.

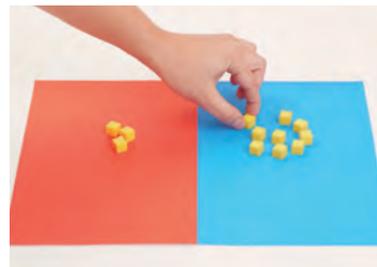
Materiales

- 2 cartulinas de distinto color.
- Bloques base 10 o cualquier elemento similar.

Paso 1: Ubica en la parte izquierda, que contendrá los números negativos, el primer sumando de la adición (-3).



Paso 2: Ubica en la parte derecha, que contendrá los números positivos, el segundo sumando (9).



>>

>> **Paso 3:** Cancela los cubos que puedas asociando uno negativo con uno positivo y retirándolos del tablero, como se muestra en la imagen.



Paso 4: Cuenta los cubos que quedaron en el tablero y asícialos con el signo que corresponda según su ubicación. Así, obtendrás el resultado de la adición.



Por lo tanto, el pedido del almacén fue de 6 sacos, ya que $-3 + 9 = 6$.

2. Resuelve las siguientes adiciones utilizando la estrategia anterior.

a. $9 + (-5)$

d. $7 + (-10)$

b. $-2 + 5$

e. $5 + 4$

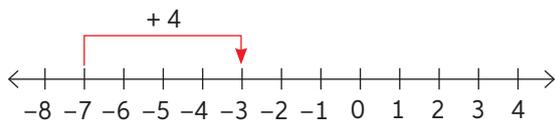
c. $6 + (-6)$

f. $-6 + (-3)$

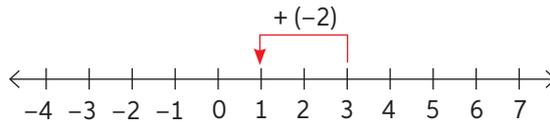
► ¿Cómo representaste las adiciones de las actividades e y f? En parejas, comenten y comparen sus estrategias. Luego, redacten el procedimiento para sumar enteros del mismo signo de forma concreta.

Puedes sumar números enteros con la estrategia inicial, o bien ubicarlos en la recta numérica y avanzar o retroceder en la misma según el signo del sumando. También puedes seguir el algoritmo descrito a continuación.

$-7 + 4 = -3$

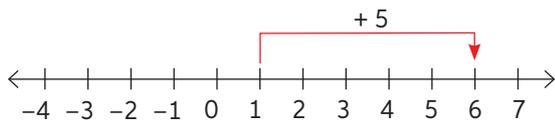


$3 + (-2) = 1$

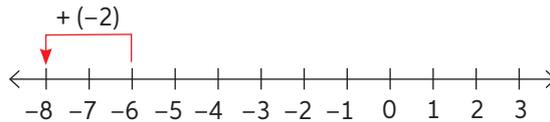


Para sumar números enteros de distinto signo, se restan los valores absolutos de los sumandos y se conserva el signo del número con mayor valor absoluto.

$1 + 5 = 6$



$-6 + (-2) = -8$



Para sumar números enteros de igual signo, se suman los valores absolutos y se mantiene el signo de los sumandos.

Para resolver adiciones, es importante conocer las **propiedades de la adición**. Algunas de ellas son:

Propiedad	Definición	Algebraicamente
Conmutativa	El orden de los sumandos no altera la suma.	$a + b = b + a$
Asociativa	La forma en que se agrupan los sumandos no altera la suma.	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Clausura	Al sumar números enteros, siempre resultará un número entero.	$a \wedge b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$
Elemento neutro	Es aquel número que, al ser operado con otro, da como resultado este último. En el caso de la adición es el cero.	$a + 0 = 0 + a = a$
Elemento opuesto o inverso aditivo	Es aquel número que, al sumarse con otro, da como resultado el elemento neutro. Además, un número y su inverso aditivo tienen el mismo valor absoluto.	$a + (-a) = (-a) + a = 0$

7. **Desafío matemático** Se sabe que el inverso aditivo de 8 es -8 . Si se realiza una adición de un número y su inverso $(8 + (-8) + 8 + (-8) \dots)$ con 100 sumandos, ¿cuál será la suma total? Y si fueran 101 sumandos manteniendo las mismas condiciones, ¿cuál será el resultado?
8. Realiza un diagrama para organizar la información. Luego, resuelve.
 - a. Un delfín que se encuentra a 12 metros bajo el nivel del mar desciende 5 metros y posteriormente asciende 8 m. ¿Qué número entero representa la profundidad a la que queda el delfín?

Historia universal

- b. El filósofo Platón nació en el año 427 antes de nuestra era y su discípulo, Aristóteles, nació el año 384 antes de nuestra era. ¿Qué edad tenía Platón cuando nació Aristóteles?

Para concluir

- a. Resuelve considerando los contenidos vistos. Luego, describe tu procedimiento.
 - $-6 + (-12) + 4 + (-12) + (-1)$
 - $-8 + 15 + (-8) + (-5) + 7 + (-13)$
- b. ¿Cuál es la importancia de estos contenidos en tu vida cotidiana? ¿En cuáles te gustaría profundizar?
- c. ¿Qué estrategia usaste para resolver adiciones? ¿Por qué escogiste esa?



Sustracción en \mathbb{Z}

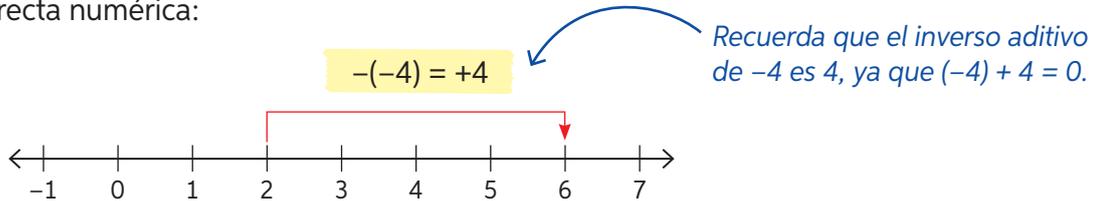
Objetivo: Representar y resolver sustracciones en \mathbb{Z} .

¿Qué estrategias utilizas para resolver sustracciones?

¿Qué diferencias y semejanzas crees que existen entre la sustracción de números naturales y la de números enteros?

Para resolver sustracciones de números enteros, debes sumar al minuendo el inverso aditivo del sustraendo, es decir, $a - b = a + (-b)$. Por ejemplo: $2 - (-4)$.

En la recta numérica:



Simbólicamente: $2 - (-4) = 2 + 4 = 6$

1. Analiza el problema resuelto:

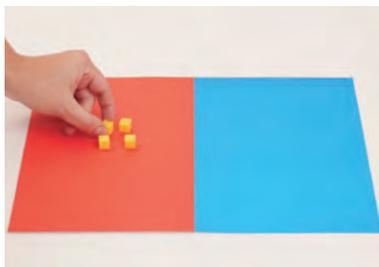
Si cierto día en la parte chilena del lago General Carrera, las temperaturas máxima y mínima fueron $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $-14\text{ }^{\circ}\text{C}$ respectivamente, ¿cuál fue la variación de temperatura?

La variación de temperatura es la diferencia entre las temperaturas máxima y mínima.

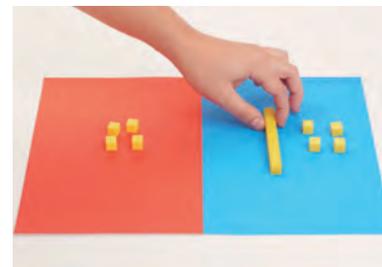


^ Lago General Carrera. Región de Aysén, Chile.

Paso 1: Determinar la operación $(-4 - (-14))$ y representar el minuendo de esta.



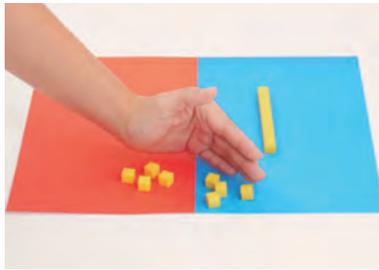
Paso 2: Representar el sustraendo de la operación.



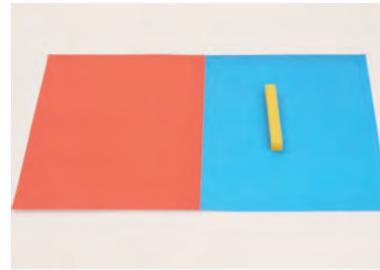
>>

➤ En el paso 2, ¿por qué el sustraendo se ubica en la zona de los números positivos?

>> **Paso 3:** Realizar la cancelación necesaria.



Paso 4: Contar las unidades que quedaron y responder.



Luego, la variación de la temperatura en el lago General Carrera fue de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ese día.

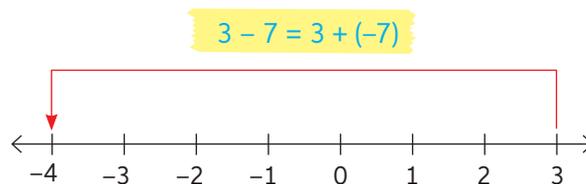
► ¿Es correcto decir que la sustracción en enteros es igual a la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo? Explica.

2. Calcula la variación de temperatura de cada día utilizando el material concreto.

Día	Temperatura mínima	Temperatura máxima
Martes	$1\text{ }^{\circ}\text{C}$	$4\text{ }^{\circ}\text{C}$
Jueves	$-5\text{ }^{\circ}\text{C}$	$1\text{ }^{\circ}\text{C}$
Sábado	$-8\text{ }^{\circ}\text{C}$	$-2\text{ }^{\circ}\text{C}$

Recuerda que:
 $a - b = a + (-b)$

3. Resuelve utilizando la recta numérica. Luego, comprueba usando el algoritmo. Observa el ejemplo.



$3 - 7 = -4$

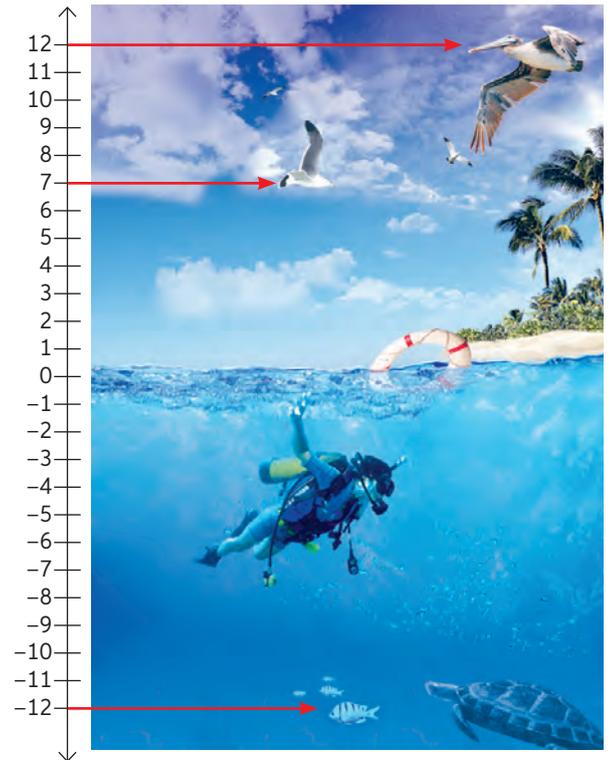
- | | | |
|-----------------|--------------------|--------------------|
| a. $17 - 19$ | c. $15 - 24$ | e. $-15 - (-19)$ |
| b. $28 - (-15)$ | d. $(-19) - (-16)$ | f. $-500 - (-200)$ |

► ¿Obtendrías el mismo resultado si aplicas la conmutatividad en cada sustracción? ¿Por qué? En parejas, comenten sus respuestas.

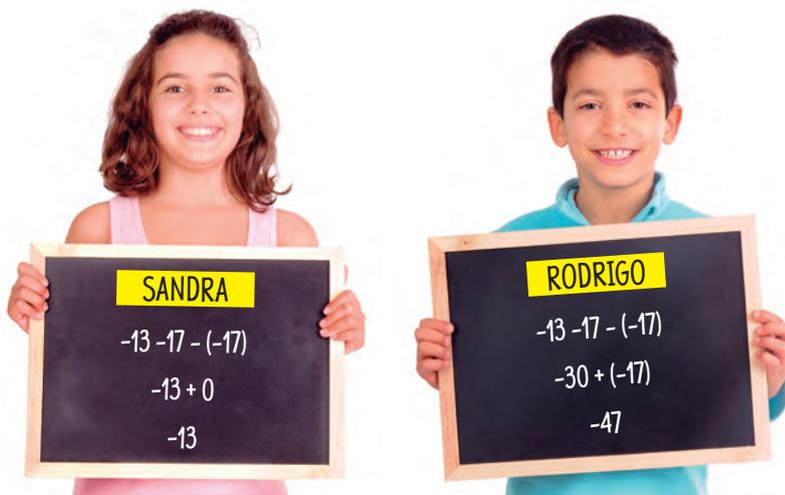
4. Resuelve las siguientes sustracciones utilizando la estrategia que prefieras.

- | | |
|------------------|-----------------------|
| a. $4 - (-8)$ | d. $-19 - 28$ |
| b. $-17 - (-25)$ | e. $28 - (-19)$ |
| c. $6 - 32$ | f. $135 - (-28) - 63$ |

5. Analiza la imagen y responde.
- ¿Cuál es la diferencia entre la altura de la gaviota y el nivel del mar?
 - ¿Cuál es la diferencia entre la altura de la gaviota y la del pelicano?
 - ¿Cuál es la diferencia entre la profundidad del pez y el nivel del mar?
 - ¿A qué distancia se encuentra la gaviota del pez? Resuelve utilizando una sustracción.
 - ¿Existen distancias negativas? Justifica tu respuesta.



6. Lee cada afirmación, indica cuál o cuáles de ellas son falsas y corrégelas.
- La sustracción en el conjunto de los enteros cumple con la propiedad de clausura.
 - Si a y b son números enteros positivos con $a > b$, entonces $(b - a)$ es un número entero positivo.
 - La sustracción en los números enteros cumple con la propiedad conmutativa.
 - Al restar un entero negativo a un entero positivo, el resultado es positivo.
 - Al restar un número negativo a cero, el resultado es negativo.
7. Sandra y Rodrigo resolvieron un ejercicio, pero no llegaron al mismo resultado. Observa el desarrollo realizado por cada uno e indica quién está en lo correcto. Luego, justifica.



- ¿Cómo reconociste el error en la resolución?
- ¿Qué contenidos aprendidos utilizaste en la justificación?
- ¿Qué puedes hacer para evitar errores como el visto en esta actividad?

8. Analiza la siguiente información y responde.

COPA DE BARRIO



Bases del campeonato:

- I. La puntuación corresponde a 3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate.
- II. Los equipos juegan todos contra todos y el ganador será el que obtenga mayor puntaje.
- III. En caso de que dos o más equipos tengan igual puntaje, se priorizará a aquel que obtenga mejor diferencia de goles (goles a favor menos goles en contra).
- IV. El equipo que tenga el último lugar no participará del próximo campeonato.

Resultados Copa del Barrio							
Equipo	Partidos jugados	Partidos ganados	Partidos empatados	Partidos perdidos	Puntaje	Goles a favor	Goles en contra
The Queens	4	0	1	3	1	6	12
Las Rosas	4	3	0	1	9	10	10
Leonas	4	0	1	3	1	7	14
Angry girls	4	3	0	1	9	13	7
Amigas F.C.	4	3	0	1	9	12	5

- a. ¿Qué equipo obtuvo la **Copa del Barrio**?
- b. ¿Cuál fue la diferencia de goles entre el equipo campeón y el que obtuvo el segundo lugar?
- c. ¿Qué equipo no jugará el próximo torneo?
- d. ¿Cuántos goles le faltó por anotar al equipo que finalizó último para no quedar eliminado del próximo campeonato?

Para concluir

- a. Realiza las siguientes actividades:
 - Explica con tus palabras cómo resolver una sustracción de enteros.
 - Crea un problema con la sustracción $(-15) - 18$. Luego, resuélvelo usando la recta numérica.
- b. ¿Qué estrategia usaste para resolver los problemas? Explícasela a un compañero y cuéntale por qué utilizaste dicha estrategia.
- c. ¿Qué fue lo que más te costó comprender?, ¿por qué crees que ocurrió esto?



13 y 14

Ejercicios combinados y aplicaciones en \mathbb{Z}

Objetivo: Resolver ejercicios combinados y problemas que impliquen adiciones y sustracciones con números enteros.

¿Cómo se resuelven adiciones y sustracciones en el conjunto de los números enteros?

¿Qué debes considerar al resolver un ejercicio que tenga distintas operaciones?

1. ¿Cómo resolverías el siguiente ejercicio de adiciones y sustracciones con números enteros? Analiza las siguientes estrategias y responde las preguntas a continuación.

$$4 - 8 + (-6) - 7 + 2 - (-5) + 3 - (-1) + 3$$

Estrategia 1

$$4 - 8 + (-6) - 7 + 2 - (-5) + 3 - (-1) + 3$$

Sumamos de dos en dos, de izquierda a derecha:

$$\begin{aligned} &= -4 + (-6) - 7 + 2 - (-5) + 3 - (-1) + 3 \\ &= -10 - 7 + 2 - (-5) + 3 - (-1) + 3 \\ &= -17 + 2 - (-5) + 3 - (-1) + 3 \\ &= -15 - (-5) + 3 - (-1) + 3 \\ &= -10 + 3 - (-1) + 3 \\ &= -7 - (-1) + 3 \\ &= -6 + 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Estrategia 2

$$4 - 8 + (-6) - 7 + 2 - (-5) + 3 - (-1) + 3$$

Representamos todas las restas como la suma del opuesto:

$$= 4 + (-8) + (-6) + (-7) + 2 + 5 + 3 + 1 + 3$$

Agrupamos positivos y negativos:

$$= 4 + 2 + 5 + 3 + 1 + 3 + (-8) + (-6) + (-7)$$

Sumamos positivos y negativos por separado:

$$= 18 + (-21)$$

Realizamos la suma final:

$$= -3$$

- a. Analiza y describe las estrategias con tus propias palabras.
- b. ¿Cuál crees que te llevaría a cometer menos errores?, ¿por qué?
- c. ¿Cómo resolverías el ejercicio inicial?, ¿utilizarías otra estrategia? Descríbela.

Para resolver ejercicios que involucren varias adiciones y sustracciones de números enteros, puedes seguir alguna de las dos estrategias mostradas inicialmente o bien alguna estrategia propia que respete las propiedades y características de la adición y la sustracción de números enteros.

- a. ¿Qué propiedades de la adición utilizas en las estrategias vistas en la primera actividad? Explica.

2. Resuelve utilizando la estrategia de operar de izquierda a derecha.

- a. $6 - 4 + (-1) - 0 + 2 + (-5) + 9 - (-1)$
- b. $-5 - (-4) - (-1) - 10 - 2 + (-5) + 9 - (-1)$

3. Resuelve utilizando la estrategia de agrupar y luego sumar.

- a. $6 - 4 + (-1) - 0 + 2 + (-5) + 9 - (-1)$
- b. $-5 - (-4) - (-1) - 10 - 2 + (-5) + 9 - (-1)$

4. La tabla muestra los movimientos en la cuenta corriente de Luis durante un día.

Para que al finalizar el día el saldo sea 0, ¿cuánto dinero se debe sacar o agregar a su cuenta si el saldo inicial era de \$10 000?

Hora	08:00	12:00	14:00	17:00	19:00	20:00	23:00
Movimiento	-\$3000	\$5500	-\$12 000	\$10 000	-\$11 000	-\$6000	-\$7000

5. Resuelve utilizando la estrategia que prefieras.

- a. $(-21 - 54) - (76 + (-13))$
- b. $35 - 213 + (-23)$
- c. $12 - (24 - (-12)) + (-8) + 18) - 6$
- d. $87 - (-12) - (-19) + 67$
- e. $(-65 - 21) + (32 - 56)$
- f. $35 - (-21 - 15) + (-40 + (-74))$
- g. $|-65| - |-76| + (-54 - (-7))$
- h. $|-1 + (-76 + 65 - (-3) - 4)|$

← Recuerda que la utilización de paréntesis en los ejercicios matemáticos permite indicar la prioridad de la operatoria por realizar. Así, las operaciones que se encuentran entre los paréntesis que están al interior de otros se deben resolver primero.

6. **Desafío** Analiza la siguiente situación y responde.

Un ascensor baja dos pisos. Si a representa el número del piso inicial y b el del piso de destino, ¿con qué expresión matemática puedes modelar la situación?

- a. Si el piso inicial es el 5, ¿a qué piso llegas? ¿Sirvió tu modelo?
- b. Si el piso inicial es el -1 , ¿a qué piso llegas? ¿Sirvió tu modelo?
- c. Si el piso inicial es el 1, ¿a qué piso llegas? ¿Sirvió tu modelo?
- d. ¿Cuáles son las limitaciones de tu modelo?

Para concluir

- a. La temperatura inicial de un material es de -1 °C. En la primera etapa de un experimento, su temperatura aumentó 11 °C; en la segunda, disminuyó 15 °C y en la tercera, subió abruptamente 12 °C.
 - ¿Cuál es la temperatura final del material?
 - Explica paso a paso la resolución del problema.
- b. A propósito de las estrategias de resolución de ejercicios combinados, ¿con cuál te quedas? ¿Por qué?
- c. ¿Qué has aprendido en este tema? ¿Cómo evidencias dicho aprendizaje?



15 y 16

Antes de continuar

Evaluación intermedia

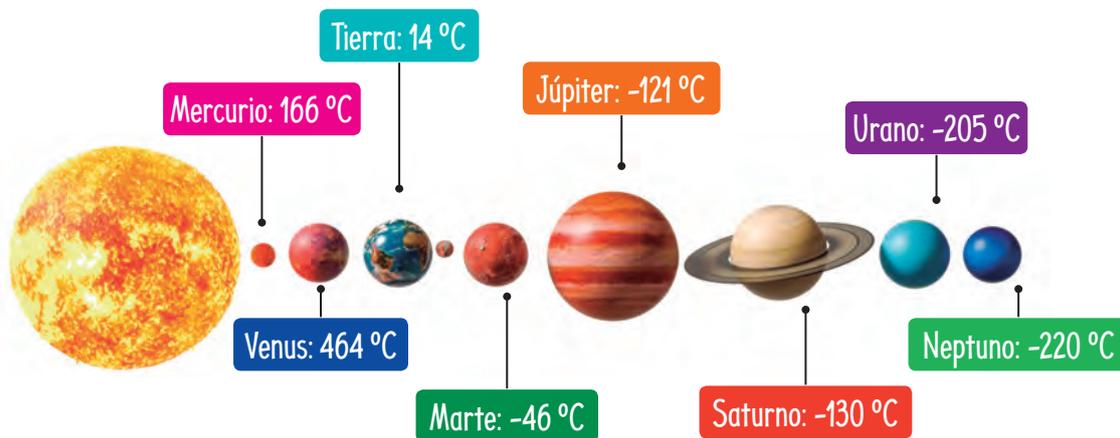
Realiza las actividades dispuestas a continuación. Luego, responde las preguntas de la sección “Reflexiono”.

1. Analiza la situación y responde.
 - a. Por cada giro, el banco realiza un cobro de \$300. ¿Cuál es el saldo de la cuenta de don Horacio después de girar el dinero que necesitaba?
 - b. Horas más tarde, el banco le descuenta el valor total de un cheque por \$35 000. ¿Cuál es el nuevo saldo de la cuenta corriente?
 - c. En la noche, su hijo le deposita \$250 000 y, además, el banco le cobra \$2500 por mantención de la cuenta. ¿Cuál es el saldo de la cuenta de don Horacio al terminar el día?



Astronomía

2. Las siguientes son las temperaturas medias de los planetas del sistema solar.



- a. Calcula la diferencia de temperaturas medias entre la Tierra y todos los planetas mayores (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno).
- b. Calcula la diferencia de temperaturas medias entre Neptuno y todos los planetas menores (Mercurio, Venus, Tierra y Marte).

Reflexiono

- Con lo aprendido en la lección, ¿podrías explicar todos los contenidos a un compañero? ¿Cuáles no?
- ¿Cómo podrías mejorar tu aprendizaje respecto de los contenidos débiles?



17

Multiplicación y división de números decimales

Objetivo: Multiplicar y dividir números decimales en el contexto de la resolución de problemas.

¿Cuál es el procedimiento para obtener el producto entre un número natural y un número decimal? Explica.

¿Qué debes hacer para dividir un número decimal por un número natural?

Nutrición

1. ¿Pensarías que las frutas y frutos secos son una fuente de proteínas en tu alimentación? Observa.

<p>Plátano</p> <p>1,1 g de proteína cada 100 gramos.</p> 	<p>Coco</p> <p>3,3 g de proteína cada 100 gramos.</p> 	<p>Kiwi</p> <p>1,1 g de proteína cada 100 gramos.</p> 	<p>Nuez</p> <p>15,6 g de proteína cada 100 gramos.</p> 
--	---	--	--

Realiza las actividades considerando el caso hipotético de que en una semana se consuman 300 g de plátano, 200 g de coco, 400 g de kiwi y 200 g de nuez.

- a. Calcula la cantidad de proteínas por fruta que se consumirían en una semana comiendo cada una de las raciones de plátano, coco, nuez y kiwi.
 - b. ¿Cuántos gramos de proteínas se consumirían en total?
 - c. Si se consumiera la misma cantidad de proteína diariamente, ¿cuántos gramos de proteína se consumirían al día? Considera 7 días.
- ¿Qué procedimientos matemáticos seguiste para realizar los cálculos anteriores? Descríbelos.
- ¿Te costó recordar la forma de multiplicar y dividir números naturales y decimales? ¿Por qué crees que ocurrió esto?

Como aprendiste en años anteriores, para multiplicar y dividir un número natural por un número decimal puedes:

Para multiplicar números decimales, puedes usar el mismo procedimiento que para multiplicar números naturales; no obstante hay que considerar la parte decimal al expresar el resultado. El producto tendrá tantas cifras decimales como el factor decimal.

$$\begin{array}{r} 12,04 \cdot 3 \\ \hline 36,12 \end{array}$$

Para dividir números decimales, comienza la división por la parte entera y continúa dividiendo la parte decimal. Por ejemplo:

Paso 1: $7,56 : 3 = 2$

1

Dividir 7 por 3.

Paso 2: $7,56 : 3 = 2,5$

15

0

Escribir la coma en el cociente, ya que estás dividiendo la parte decimal del dividendo.

Paso 3: $7,56 : 3 = 2,52$

15

06

0

Continuar el proceso con las centésimas.

2. Resuelve.

a. $14,2 \cdot 7$

c. $25,34 \cdot 6$

e. $642,72 : 52$

b. $4,25 \cdot 9$

d. $45 \cdot 74,55$

f. $10036,2 : 8$

3. Resuelve las siguientes divisiones y responde.

$92,3 : 10$

$92,3 : 100$

$92,3 : 1000$

a. ¿Qué sucede con la coma en el cociente?

b. ¿Sucederá lo mismo con otros números decimales? Prueba con los dividendos 5,78; 60,03 y 4,203.

c. ¿Qué puedes concluir acerca de la división por 10, 100, 1000, etc.?

d. Calcula mentalmente las divisiones $2,8 : 1000$; $0,2 : 100$ y $6 : 1000$.

4. Resuelve el siguiente problema representándolo de forma gráfica.

La botella de la imagen tiene una capacidad de 1,25 L y se desea repartir todo su contenido en vasos de 0,25 L de capacidad.

¿Cuántos vasos se necesitarán si estos se llenan completamente?



5. Analiza el procedimiento y responde.

¿Cómo se calcula el producto entre dos números decimales?

• $2,4 \cdot 3,87$

Se multiplica sin considerar la coma, es decir, $24 \cdot 387 = 9288$. Luego, como entre los dos factores hay 3 cifras en las partes decimales, la coma se ubica después de la tercera cifra, de derecha a izquierda. Por lo tanto, el resultado es 9,288.

• $5,7 \cdot 9,1$

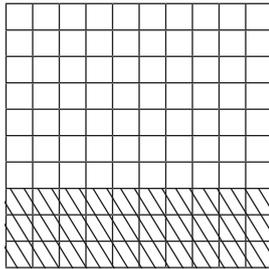
Se cuentan, de derecha a izquierda, dos cifras decimales para ubicar la coma.

$5,7 \cdot 9,1 = 51,87$

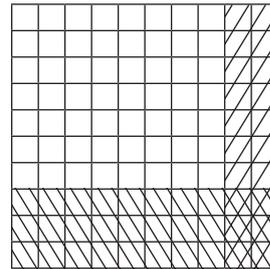
➤ ¿Crees que los procesos mostrados son fáciles o difíciles de aprender?, ¿por qué?

Para multiplicar dos números decimales, puedes realizar el siguiente procedimiento de forma gráfica. Por ejemplo, $0,3 \cdot 0,2$:

Paso 1: Representa el primer factor (0,3) achurando tres filas.



Paso 2: Representa el segundo factor (0,2) achurando dos columnas. Se crea un cruce en las dos representaciones.



El área en que se cruzan las dos representaciones corresponde al producto entre 0,3 y 0,2 que es 0,06.



También es posible resolver la operación simbólicamente, como si fueran números naturales, y en el producto escribir la coma según la cantidad de cifras en las partes decimales que tengan en total ambos factores.

➤ ¿Qué limitaciones tiene el modelo gráfico para resolver multiplicaciones con números decimales? Comparte y compara tu respuesta con un compañero.

6. Resuelve gráficamente las siguientes multiplicaciones:

a. $0,5 \cdot 0,1$

c. $0,9 \cdot 0,9$

e. $0,6 \cdot 0,8$

b. $0,4 \cdot 0,2$

d. $0,1 \cdot 0,1$

f. $0,4 \cdot 1$

7. Resuelve.

a. $1,5 \cdot 2,8$

c. $7,453 \cdot 2,632$

e. $231,1 \cdot 4,21$

b. $38,543 \cdot 3,9$

d. $12,43 \cdot 82,947$

f. $57,12 \cdot 63,88$

8. Analiza el procedimiento y responde las preguntas.

¿Cómo obtener el cociente entre dos números decimales?

$$4,212 : 2,34$$

Como el dividendo tiene 3 cifras en su parte decimal y el divisor solo 2, se amplifican ambos números por 1000, quedando la siguiente división equivalente:

$$4212 : 2340 = 1,8$$

$$18720$$

$$0//$$

Por lo tanto, $4,212 : 2,34 = 1,8$.

➤ ¿Qué quiere decir que las divisiones sean equivalentes?

Para dividir dos números decimales, es posible transformar el dividendo y el divisor en números naturales amplificando ambos por 10, 100, 1000, etc., según la mayor cantidad de cifras en las partes decimales de los números.

9. Resuelve las divisiones.

a. $26,145 : 12,45$

c. $47,27 : 16,3$

e. $429,03 : 6,3$

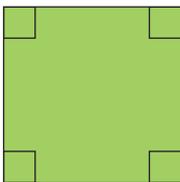
b. $128,156 : 32,2$

d. $15,25 : 6,1$

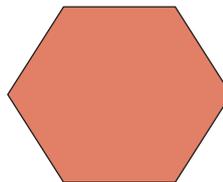
f. $124,16 : 9,7$

Geometría

10. Calcula la medida del lado de cada polígono regular considerando su perímetro (P).



$P = 20,52 \text{ cm}$



$P = 43,2 \text{ cm}$

11. **Desafío** Lee cada enunciado y responde las preguntas.

- Daniela dice que multiplicar un número por 0,2 es lo mismo que dividirlo por 5.
 - Comprueba lo que dice Daniela utilizando los números 1,5 y 3,8.
 - ¿Por qué crees que sucede esto?
- Patricio tiene otro truco. Él dice que dividir por 0,5 es lo mismo que multiplicar por 2.
 - Comprueba la veracidad de lo que dice Patricio utilizando los números 4,5 y 6,3.
 - ¿Por qué crees que sucede esto?
- Crea un truco diferente a los descritos y compártelo con un compañero.



18 y 19

Para concluir

- Ramón tiene un camión que rinde 8,3 km por cada litro de bencina. En él llevará 172,5 kg de ladrillos.
 - ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer Ramón con el estanke lleno?
 - ¿Cuántos ladrillos lleva Ramón?
 - Explica los procedimientos utilizados.
- ¿Cuál es la importancia de los contenidos desarrollados en este tema en tu vida cotidiana? ¿En cuáles te gustaría profundizar?
- ¿Qué estrategias usaste en el problema 11? Explícaselas a un compañero.



Equivalencia entre decimales y fracciones

Objetivo: Comprender la relación que existe entre números decimales y fracciones.

- ¿Cómo representarías gráficamente un decimal?
- ¿Cómo representarías gráficamente una fracción?

1. Lee la situación y luego responde.

En el mercado, Luis desea comprar $\frac{1}{2}$ kg de porotos verdes. El vendedor colocó los porotos en la balanza hasta alcanzar la cantidad exacta.

- a. Representa en regiones la fracción indicada por Luis.
- b. Observa la balanza y representa en regiones el número decimal que indican los kilogramos de porotos verdes.
- c. ¿Qué tienen en común ambas representaciones?
- d. ¿Qué relación existe entre la cantidad expresada en la balanza y la fracción solicitada por Luis?



Los números decimales pueden ser expresados como fracción y viceversa. Para expresar un número decimal como fracción puedes:

Paso 1: Escribir como numerador el número decimal sin coma:

$$3,24 \Rightarrow \frac{324}{?}$$

Paso 2: Escribir como denominador un 1, seguido de tantos 0 como cifras decimales tenga el número decimal:

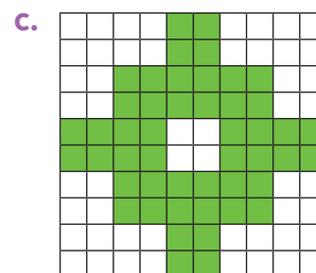
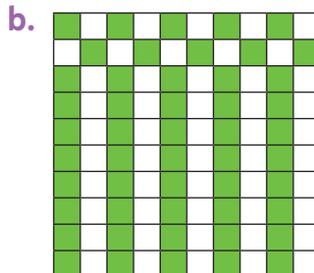
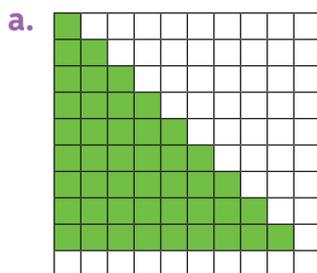
$$3,24 \Rightarrow \frac{324}{100}$$

Paso 3: Simplificar la fracción hasta llegar a la irreducible:

$$\frac{324}{100} = \frac{324 : 4}{100 : 4} = \frac{81}{25}$$

► ¿El número mixto que se puede obtener de la fracción impropia del ejemplo anterior es equivalente al número decimal? ¿Por qué?

2. Escribe la fracción y el decimal correspondientes a cada representación.



3. Representa en regiones los siguientes números decimales e indica la fracción decimal equivalente. \leftarrow Una fracción decimal es aquella que tiene como denominador 10, 100, 1000, etc.
- a. 5,9 c. 2,35
b. 0,48 d. 1,03
4. Expresa como fracción los siguientes números decimales. Observa el ejemplo.
- $3,08 \rightarrow \frac{308}{100} \rightarrow \frac{308 : 4}{100 : 4} \rightarrow \frac{77}{25}$
- a. 0,25 c. 2,40 e. 0,895
b. 0,75 d. 35,2 f. 120,75
5. Analiza las afirmaciones e indica cuál o cuáles de ellas son falsas. Luego, corrígelas.
- a. La fracción irreductible equivalente al número decimal 6,48 es $\frac{324}{25}$.
b. La fracción decimal de 0,985 es $\frac{985}{100}$.
c. Una de las fracciones equivalentes a 3,28 es $\frac{164}{50}$.
d. La fracción $25\frac{4}{5}$ es equivalente al número decimal 25,8.

Para expresar fracciones como número decimal, puedes seguir estos procedimientos:

Amplificación

1.º Amplificar o simplificar la fracción hasta obtener como denominador 10, 100, 1000...

$$\frac{18}{25} = \frac{18 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{72}{100}$$

2.º Escribir el numerador y ubicar la coma tantos lugares a la izquierda como cantidad de ceros tenga el denominador:

$$\frac{72}{100} = 0,72$$

División

Dividir el numerador por el denominador: $\frac{18}{25} \rightarrow 18 : 25 = 0,72$

6. Expresa las siguientes fracciones como números decimales utilizando la estrategia que prefieras.
- a. $\frac{7}{500}$ d. $\frac{36}{50}$ g. $\frac{15}{12}$
b. $\frac{73}{2}$ e. $\frac{37}{20}$ h. $\frac{17}{20}$
c. $\frac{3}{25}$ f. $\frac{27}{4}$ i. $\frac{34}{16}$

👉 ¿De qué forma puedes corroborar tus resultados? Planifícalo y ejecútalo.

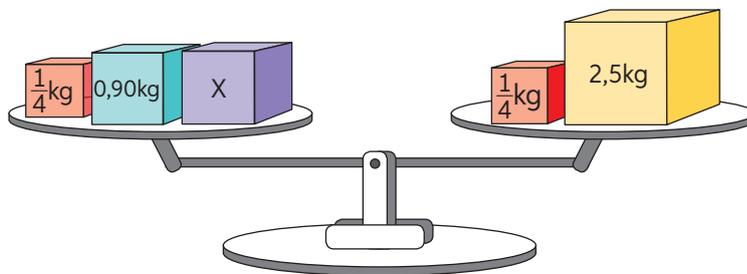
7. Camila y Sergio son mellizos. Sus padres registran cada tres meses los aumentos de estatura y masa de ambos. Observa su registro y responde.

	Camila		Sergio	
	Masa	Estatura	Masa	Estatura
3 meses	$2\frac{1}{2}$ kg	8,7 cm	2,8 kg	9,7 cm
6 meses	$1\frac{4}{5}$ kg	6,2 cm	1,7 kg	7 cm
9 meses	1,2 kg	5 cm	$1\frac{1}{4}$ kg	4,8 cm
12 meses	$1\frac{1}{10}$ kg	3,8 cm	$1\frac{1}{8}$ kg	3,9 cm



- ¿Cuántos kilogramos subió Camila entre los 6 y los 9 meses?
 - ¿Cuántos kilogramos subió Sergio entre los 6 y los 12 meses?
 - Si al nacer, Sergio midió $\frac{95}{2}$ cm, ¿cuántos centímetros alcanzó el sexto mes?
 - Al nacer, Camila tuvo una masa de 3,2 kg, ¿cuántos kilogramos alcanzó a tener a los 12 meses?
 - A los 9 meses, ¿cuál de los dos aumentó más kilogramos de masa?
8. **Desafío** En parejas, resuelvan el siguiente problema:

¿Qué valor debe tomar x para que la balanza se mantenga en equilibrio?



Para concluir

- Representa los números 0,73; $\frac{58}{100}$; 1,88 y $\frac{7}{4}$ en regiones. Luego, indica su fracción o decimal equivalente. Explica tu procedimiento paso a paso.
- Con respecto a los algoritmos enseñados sobre equivalencias, ¿crees que puedas recordarlos siempre?, ¿cómo podrías hacerlo?
- Menciona 3 situaciones cotidianas en las que uses la equivalencia entre decimales y fracciones.

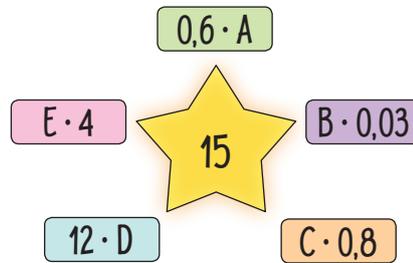


Antes de continuar

Evaluación intermedia

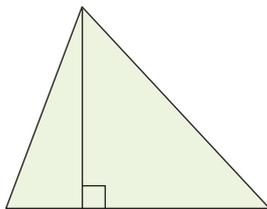
Realiza las actividades dispuestas a continuación. Luego, responde las preguntas de la sección "Reflexiono".

- Marco es una joven promesa del ciclismo nacional. Su entrenador le recomienda entrenar en su bicicleta 7 horas diarias y recorrer en promedio 13,5 km cada hora.
 - ¿Cuántos kilómetros en bicicleta debe recorrer diariamente Marco como parte de su entrenamiento?
 - En una competencia, Marco recorrió 145,8 km en 6,25 horas con una rapidez constante. ¿Cuántos kilómetros recorrió en una hora?
- Encuentra el factor que falta para que cada producto sea 15.



- Un saco de arroz contiene 30,75 kg. Si se quiere separar el contenido en bolsas de 1,5 kg cada una, ¿cuántas podrán llenarse?
- Expresa las fracciones como números decimales y viceversa según corresponda.
 - $\frac{14}{35}$
 - 0,0122
 - $\frac{11}{8}$
 - 4,36
- Calcula el área de los siguientes triángulos.

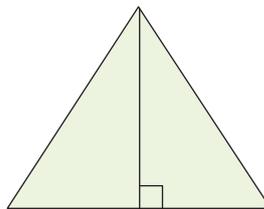
a.



Base: 10 cm

Altura: $5\frac{1}{4}$ cm

b.



Base: 7,8 cm

Altura: 5,67 cm

c.



Base: $9\frac{1}{2}$ cm

Altura: 3 cm

- El dividendo de Paula está pactado en 12,25 UF. ¿Cuál fue el monto de la cuota de marzo si el valor de la UF el día del pago era de \$27 565,76?

Reflexiono

- Recorre desde la página 30 a la 36. ¿Qué contenidos debes reforzar? Escribe los.
- Lee las definiciones y construye un esquema para reforzar los contenidos débiles.



21

Multiplicación de fracciones

Objetivo: Resolver problemas que impliquen la multiplicación de fracciones.

¿Qué es multiplicar?

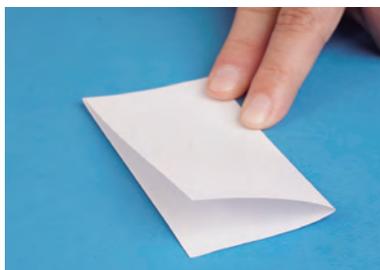
¿En qué situaciones necesitarías multiplicar fracciones?

1. Observa la situación y realiza las actividades que se solicitan.

Daniela plantará $\frac{1}{2}$ de un terreno y quiere que $\frac{1}{4}$ de este se destine a zanahorias. ¿En qué parte del total se plantarán zanahorias?

- a. Consigue un papel rectangular. Luego, realiza el siguiente procedimiento:

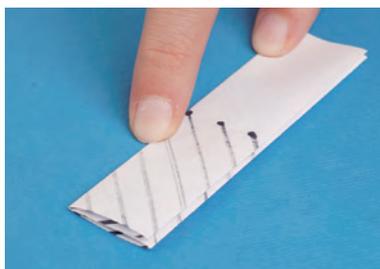
Paso 1: Dobra el papel verticalmente en dos partes iguales.



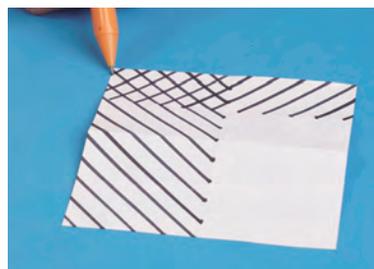
Paso 2: Achura 1 columna para representar $\frac{1}{2}$.



Paso 3: Dobra el mismo papel horizontalmente en cuartos.

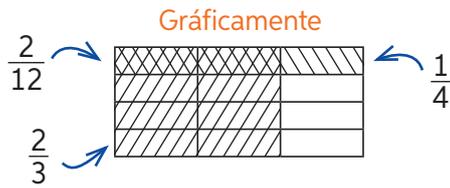


Paso 4: En el mismo entero, achura 1 fila para representar $\frac{1}{4}$.



- b. Si la parte donde se cruzan las líneas representa la plantación de zanahorias de Daniela, ¿a qué fracción del total corresponde?
 - c. Explica con tus palabras el proceso de cómo se resolvió la multiplicación y luego aplícalo a otro ejemplo.
- ¿Por qué es importante aprender por medio de representaciones concretas?

Para resolver multiplicaciones con fracciones, puedes realizar el procedimiento de la actividad inicial de forma gráfica o aplicando el algoritmo. Por ejemplo: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$.



Aplicando el algoritmo

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12}$$

Multiplica los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

► ¿Qué relación existe entre el trabajo con material concreto de la actividad inicial y el algoritmo de la multiplicación de fracciones?

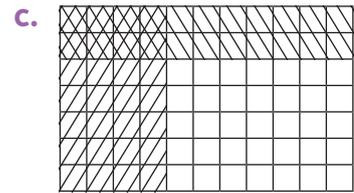
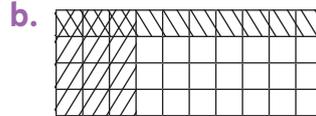
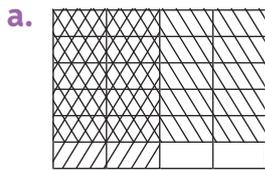
2. Resuelve utilizando la estrategia de la actividad inicial.

a. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$

b. $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}$

c. $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$

3. Escribe la operación y el producto representado en cada figura.



4. Resuelve aplicando el algoritmo.

a. $\frac{13}{18} \cdot \frac{2}{5}$

b. $\frac{43}{56} \cdot \frac{19}{23}$

c. $\frac{45}{70} \cdot \frac{25}{10}$

5. Analiza el ejemplo. Luego, resuelve aplicando la estrategia.

$$\begin{array}{l} \text{Simplificar por 4} \rightarrow 4 \cdot \frac{9}{18} \cdot \frac{7}{16} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{1}{8} \\ \text{Simplificar por 7} \rightarrow 7 \cdot \frac{9}{18} \cdot \frac{7}{16} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{1}{8} \end{array}$$

← Simplificar por 9

a. $\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{9}$

c. $1\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{4}$

e. $\frac{52}{60} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5}$

b. $\frac{7}{10} \cdot \frac{12}{15}$

d. $1\frac{2}{9} \cdot \frac{18}{7}$

f. $\frac{42}{81} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{2}{6}$

► ¿Qué beneficios tiene el uso de la estrategia anterior?

► ¿Cómo puedes evitar los errores al utilizar esta estrategia?

Geometría

6. Calcula el área de los rectángulos.

a. $\frac{4}{5} \text{ m}$



b. $2\frac{2}{5} \text{ m}$



c. $\frac{4}{24} \text{ m}$



Lección 4

7. En cada caso, descubre los valores de A y B para que la igualdad se mantenga.

a. $\frac{2}{5} \cdot \frac{A}{2} = \frac{14}{B}$

c. $\frac{A}{2} \cdot \frac{42}{55} = \frac{42}{B}$

e. $\frac{A}{B} \cdot \frac{14}{10} = \frac{14}{10}$

b. $\frac{15}{A} \cdot \frac{B}{45} = \frac{45}{90}$

d. $\frac{15}{31} \cdot \frac{4}{A} = \frac{B}{62}$

f. $\frac{6}{B} \cdot \frac{A}{7} = \frac{18}{49}$

► ¿Qué estrategia seguiste para resolver los ejercicios anteriores?
Explica por qué.

► ¿En qué casos hay más de una respuesta correcta? ¿Por qué sucede eso?

8. Copia las tablas en tu cuaderno y complétalas para que cada producto se cumpla.

a.

·	$\frac{1}{7}$	■	$\frac{4}{5}$
■	$\frac{1}{49}$	$\frac{2}{21}$	■
■	■	$\frac{6}{12}$	■
■	■	$\frac{2}{6}$	■

b.

·	■	$\frac{2}{7}$	■
$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{40}$	■	■
■	$\frac{4}{45}$	■	$\frac{1}{27}$
■	■	$\frac{4}{21}$	■

9. **Desafío** En parejas, respondan la siguiente pregunta:

¿El resultado de multiplicar dos fracciones, siempre será una fracción menor que ambos factores? Justifiquen su respuesta con ejemplos.

10. Resuelve los siguientes problemas:

a. Eliana compró $\frac{3}{4}$ kg de semillas, pero solo utilizó $\frac{2}{3}$ de ellas. ¿Cuántos kilogramos de semilla utilizó Eliana?

b. Cristóbal cooperó con $\frac{3}{4}$ de la mitad de su mesada para una campaña solidaria. ¿Qué parte del total de su mesada destinó a dicha campaña?

c. Lorena comió $\frac{2}{5}$ de un postre y su hermana Pamela comió $\frac{7}{8}$ del resto. ¿Qué parte del postre comió Pamela?

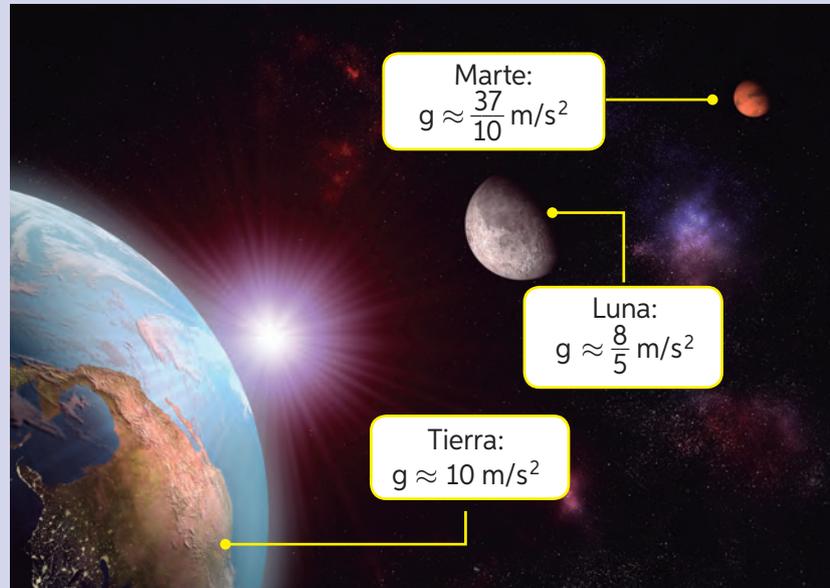
d. Araceli es dueña de $\frac{3}{5}$ partes de un fundo. Si vende $\frac{2}{3}$ partes de su propiedad, ¿qué parte del fundo no vendió?

e. Francisco bebe $\frac{4}{6}$ L de un jarro de jugo y después toma $\frac{2}{8}$ L de lo que le quedó. Si originalmente el jarro contenía 2 L, ¿cuánto jugo quedó después de que Francisco bebiera?

Ciencias Naturales

- 11.** ¿Son lo mismo peso y masa? Analiza la siguiente información y realiza las actividades dadas.

La masa es la cantidad de materia que tiene un cuerpo y no varía según el lugar donde se encuentre. En cambio, el peso depende de la aceleración de gravedad que exista donde se encuentre el cuerpo. El peso (P) se calcula multiplicando la masa (m) del cuerpo por la aceleración de gravedad (g) y su unidad de medida es el Newton (N).



- Con los datos dados, calcula el peso de los balones y las pelotas en la Tierra, en la Luna y en Marte.

<p>Fútbol</p>  <p>$m = \frac{9}{20} \text{ kg}$</p>	<p>Básquetbol</p>  <p>$m = \frac{3}{5} \text{ kg}$</p>	<p>Tenis</p>  <p>$m = \frac{1}{20} \text{ kg}$</p>	<p>Ping pong</p>  <p>$m = \frac{3}{1000} \text{ kg}$</p>
---	--	--	--

Para concluir

- Leonor gasta $\frac{4}{10}$ de sus ahorros en comprar una consola de juegos y $\frac{3}{6}$ de lo restante lo destina para comprar un *joystick* para la consola. La mitad de lo que le queda lo guarda para un juego y el resto lo ahorra. Si en un principio tenía ahorrado \$70 000, ¿cuánto dinero guardó Leonor para el juego? Explica tu proceso paso a paso.
- ¿Cómo le enseñarías a un compañero que no conoce el contenido de este tema a calcular el producto entre dos o más fracciones?
- ¿Cómo evalúas tu desempeño en la multiplicación de fracciones? Justifica.



23 y 24

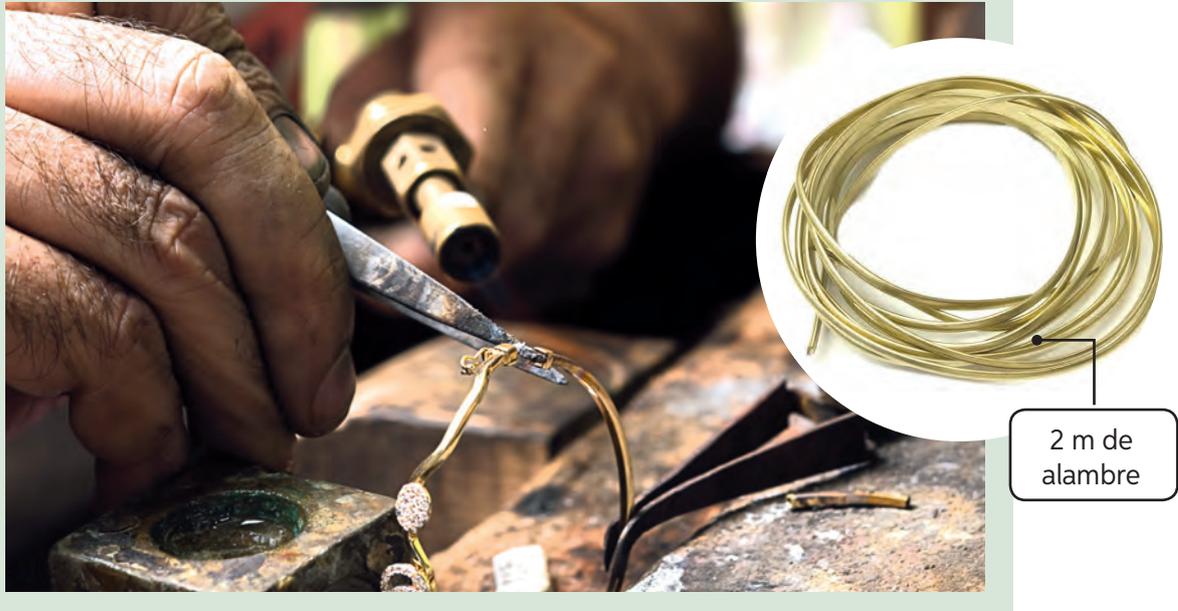
División de fracciones

Objetivo: Comprender y representar la división de fracciones.

¿Qué relación existe entre la división y las fracciones?
 ¿Cómo dividirías en dos la fracción un medio? Explica.

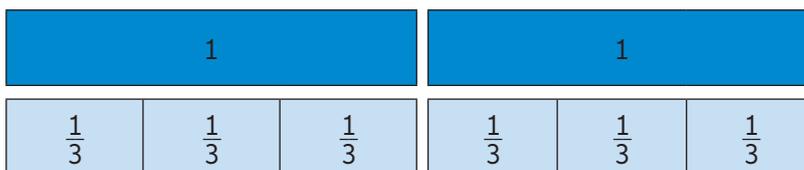
1. Observa el siguiente problema resuelto:

Ricardo, un famoso orfebre, necesita trozos de alambre de $\frac{1}{3}$ m para una de sus creaciones. Si tiene un rollo como el de la imagen, ¿cuántos trozos obtendrá si lo corta según el largo que necesita?



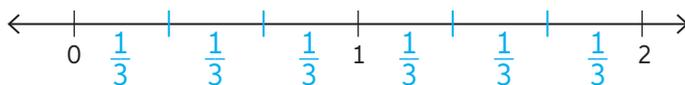
a. ¿Qué operación permite obtener la respuesta? $\rightarrow 2 : \frac{1}{3}$

b. Representa la operación anterior con tiras fraccionarias .



Las tiras azules corresponden a la medida del rollo de alambre, mientras que las celestes corresponden a la medida de los trozos de alambre que necesita Ricardo.

c. Representa la situación usando una recta numérica.



d. ¿Cuántos trozos de $\frac{1}{3}$ m se obtuvieron de 2 m de alambre? $\rightarrow 6$ trozos.

- Describe el proceso realizado.
- ¿En qué se asemejan los procesos realizados con tiras fraccionarias y recta numérica?

2. Representa cada división en una recta numérica y resuelve.

a. $1 : \frac{1}{8}$

d. $3 : \frac{1}{6}$

g. $1 : \frac{2}{6}$

b. $1 : \frac{1}{7}$

e. $5 : \frac{1}{7}$

h. $4 : \frac{2}{5}$

c. $2 : \frac{1}{4}$

f. $9 : \frac{1}{4}$

i. $3 : \frac{4}{4}$

➤ ¿Cómo representaste las divisiones **g**, **h** e **i**? Comparte tu estrategia con un compañero.

3. Siguiendo el contexto inicial:

Ahora, Ricardo necesita trozos de hilo metálico de $\frac{1}{8}$ m y cuenta con un carrete de $\frac{1}{2}$ m. ¿Cuántos trozos de $\frac{1}{8}$ m podrá obtener?

a. ¿Qué operación permite obtener la respuesta? Escríbela.

b. Representa la operación anterior con tiras fraccionarias.

c. Modela la situación usando recta numérica.

d. ¿Cuántos trozos de $\frac{1}{8}$ m se obtuvieron de $\frac{1}{2}$ m de hilo metálico?

➤ ¿Qué estrategia utilizaste para realizar las actividades **b** y **c**? Comparte tu procedimiento con un compañero.

➤ ¿Qué situaciones son adecuadas para representar y resolver divisiones en una recta numérica?

➤ Para resolver algunas divisiones de forma concreta y gráfica, puedes utilizar las estrategias mostradas en las primeras actividades.

➤ Para resolver divisiones de forma simbólica, necesitas conocer el concepto de inverso multiplicativo. El inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, con $a, b \neq 0$.

➤ Al multiplicar un número por su inverso multiplicativo, se obtiene el neutro multiplicativo, 1.

Para dividir fracciones de manera simbólica, puedes multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. Observa:

$$\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 2} = \frac{15}{16}$$

➤ El inverso multiplicativo de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$, ya que $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$.

Luego, $\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{15}{16}$.

Lección 4

4. Resuelve representando cada división en una recta numérica. Comprueba tu resultado utilizando el algoritmo.

a. $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$

c. $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$

e. $\frac{3}{2} : \frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{3} : \frac{1}{9}$

d. $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$

f. $\frac{1}{2} : \frac{2}{8}$

5. Calcula el inverso multiplicativo de cada número.

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{5}{4}$

c. 1

d. $\frac{1}{12}$

6. Resuelve.

a. $6 : \frac{7}{3}$

c. $\frac{2}{7} : \frac{4}{9}$

e. $\frac{0}{25} : \frac{7}{15}$

b. $\frac{1}{5} : \frac{2}{7}$

d. $\frac{15}{28} : \frac{3}{3}$

f. $\frac{3}{4} : 5$

7. Resuelve en tu cuaderno siguiendo el ejemplo.

a	b	c	d	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$	$\frac{c}{d} : \frac{a}{b}$	$a : \frac{b}{c}$	$(\frac{a}{c} : \frac{d}{b}) : \frac{d}{a}$	$(\frac{d}{b} : a) : c$
2	3	6	8	$\frac{2}{3} : \frac{6}{8} = \frac{8}{9}$	$\frac{6}{8} : \frac{2}{3} = \frac{9}{8}$	$2 : \frac{3}{6} = 4$	$(\frac{2}{6} : \frac{8}{3}) : \frac{8}{2} = \frac{1}{32}$	$(\frac{8}{3} : 2) : 6 = \frac{2}{9}$
6	4	8	9	■	■	■	■	■
5	6	4	3	■	■	■	■	■
8	1	9	7	■	■	■	■	■

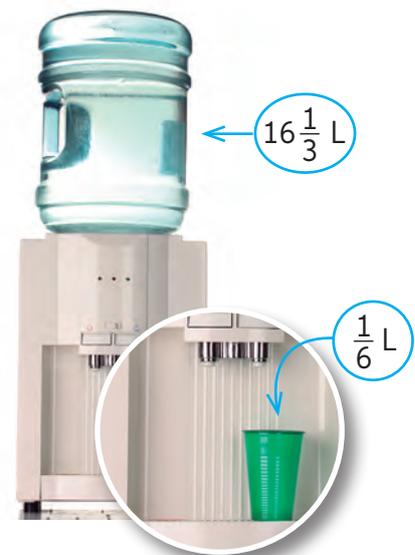
8. Resuelve los siguientes problemas:

a. Observa la imagen. ¿Cuántos vasos se pueden llenar con el contenido del dispensador de agua?

b. Si una cuerda de 8 m es cortada en pedazos de $\frac{4}{5}$ m, ¿cuántos trozos se obtendrán?

c. Lucas tiene 6 kilogramos y medio de mermelada. Si debe envasarla en frascos de $\frac{3}{4}$ kg, ¿cuántos frascos necesita?

d. Una máquina de coser da puntadas cada $\frac{3}{10}$ cm, de manera lineal. Si la primera puntada la da a medio centímetro de la orilla de la tela y el largo del género es de 14,5 cm, ¿cuántas puntadas da la máquina en una línea a lo largo de la tela?



9. Crea un problema con diferentes contextos para cada división.

a. $7 : \frac{4}{9}$

c. $\frac{3}{2} : 2$

b. $\frac{3}{8} : \frac{4}{5}$

d. $12 : \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{4}\right)$

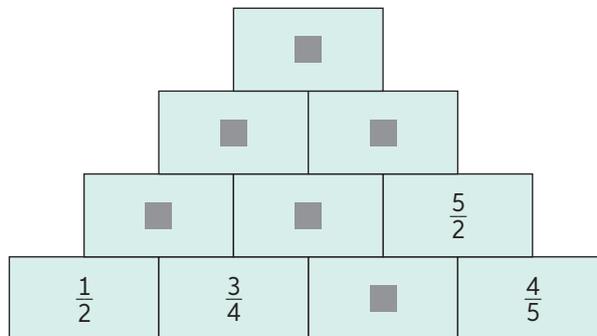
10. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.



a. Representa cada división en una recta numérica.

b. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

11. **Desafío** Encuentra los resultados del recuadro. Considera que el número que va en cada caja es el cociente de las dos cajas que se encuentran debajo. Realiza los cálculos en tu cuaderno.



Para concluir

- Resume los contenidos vistos usando un esquema que muestre los procedimientos para dividir fracciones.
- ¿Qué fue lo que más te costó entender de la división de fracciones? ¿Por qué?
- ¿Las estrategias usadas para resolver problemas fueron las mejores? ¿Podrías haber usado otras?



25 y 26

Operaciones combinadas

Objetivo: Resolver problemas y operaciones combinadas que involucren la multiplicación y la división de fracciones y de números decimales.

- ¿Cuáles son los procedimientos para operar con fracciones?
- ¿Cómo resuelves operatoria con decimales?

- En parejas, escojan una vía de resolución del ejercicio representando todos los números como decimal o todos como fracción. Luego, respondan las preguntas.

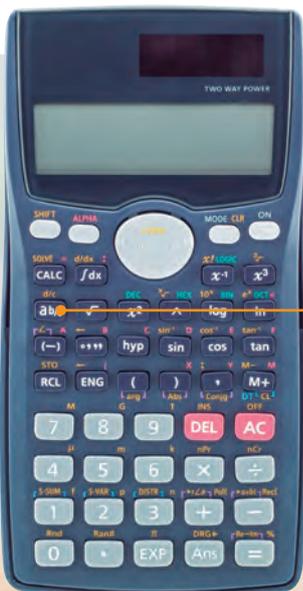
$$2,5 \cdot \frac{1}{4} : 0,01 \cdot \left(1,2 : \frac{3}{12}\right)$$

- ¿Existe alguna diferencia en el resultado? ¿Por qué?
- ¿Qué aspectos deben considerar al momento de resolver ejercicios que consideren muchas operaciones?
- Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Luego, complementéntenlas.

Para resolver operaciones combinadas entre fracciones y números decimales:

- De ser necesario, representa las fracciones como números decimales o viceversa.
- Si la expresión tiene paréntesis, resuelve la o las operaciones contenidas en ellos desde adentro hacia afuera hasta que ya no queden paréntesis.
- Resuelve las multiplicaciones o divisiones de izquierda a derecha.
- Una vez que solo queden adiciones o sustracciones, resuélvelas de izquierda a derecha.

- Analiza la información y resuelve.



a b/c

La tecla que te permite trabajar con fracciones es **a b/c**.

Si quieres resolver $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{10} : 0,5$, basta con digitar las siguientes teclas:



Obtendrás como resultado 0,3.

- Practica confirmando los resultados de las actividades de las páginas anteriores.

Para resolver $\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{5}{9}$, basta con digitar las siguientes teclas:



Esta vez, el resultado será $\frac{7}{12}$.

a. $\left(4,7 \cdot 3\frac{3}{6}\right) - \left(2\frac{2}{5} - 1\frac{1}{6}\right)$

b. $\left(4\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) : \left(0,75 - \frac{1}{6}\right)$

3. Resuelve los siguientes ejercicios combinados de fracciones y decimales. Guíate por el ejemplo.

$$\begin{aligned} & \left(1,8 + \frac{2}{8}\right) \cdot \left(1,5 \cdot \frac{1}{5}\right) : \frac{1}{2} \\ & = (1,8 + 0,25) \cdot (1,5 \cdot 0,2) : 0,5 \\ & = 2,05 \cdot (1,5 \cdot 0,2) : 0,5 \\ & = 2,05 \cdot 0,3 : 0,5 \\ & = 0,615 : 0,5 \\ & = 1,23 \end{aligned}$$

→ Representa las fracciones como decimales.

→ Resuelve los paréntesis de izquierda a derecha.

→ Resuelve multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.

a. $\left(\left(2,5 \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 0,2\right) : \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}$

b. $1,2 + \frac{3}{8} : 1,8 - \frac{3}{8} + 4,5 \cdot 2,8 - 5,5 : \frac{1}{2}$

c. $\left(\left(\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} - 0,25\right) + \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{3}{8} - 0,25\right)\right) \cdot \frac{3}{5}$

4. Analiza la imagen. Si 1 yarda son aproximadamente $\frac{91}{100}$ m, ¿cuántas yardas recorrieron entre los tres?



Para concluir

- a. Martín recibió 15,5 USD de su abuelo y 20,8 USD de su mamá. Si guardó 12,4 USD y el resto lo cambió a pesos chilenos (1 USD = \$651,4), ¿con cuántos pesos chilenos quedó Martín? Explica tu procedimiento.
- b. ¿Qué importancia tiene el orden de la resolución al desarrollar ejercicios combinados? Justifica tu respuesta.
- c. ¿Qué estrategia empleaste en la resolución del problema 4? Compártanlas en parejas.



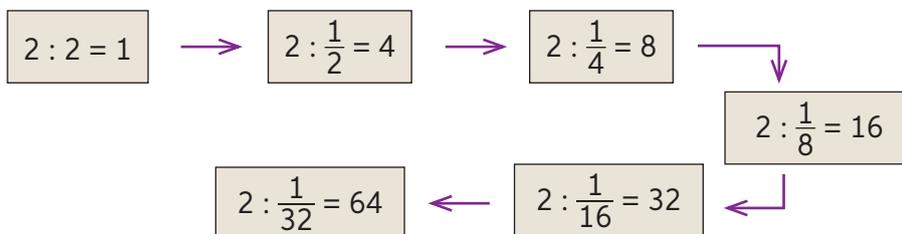
27 a 29

Antes de continuar

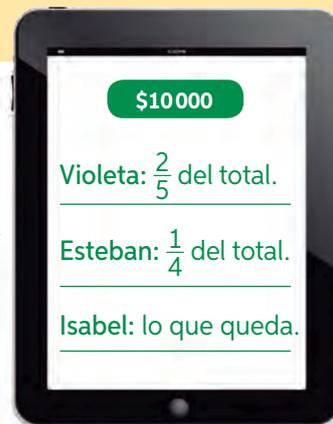
Evaluación intermedia

Realiza las actividades.

1. Violeta debe repartir \$10000 entre ella y sus dos hermanos de la forma que se muestra en su tablet.
¿Cuánto dinero recibirá cada uno?
2. ¿Recuerdas los cuadrados mágicos? ¿Sabías que también existen los cuadrados mágicos multiplicativos?
 - a. Verifica el producto de las filas, diagonales y columnas.
 - b. Reemplaza las letras con los números $1, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}$ y $\frac{1}{6}$ para que se cumpla el cuadrado mágico. Luego, comprueba las multiplicaciones de las filas, diagonales y columnas.
 - c. Construye un cuadrado multiplicativo que cumpla con la condición de que el producto de las filas y las columnas sea 1.
Utiliza los números: $1, 1, 3, 3, 9, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$.
3. Observa las siguientes divisiones y luego responde las preguntas.



- a. ¿Qué operación continúa con la secuencia?
 - b. ¿Qué sucede con los dividendos, los divisores y los cocientes de cada división a medida que avanza la secuencia?
 - c. Si el divisor sigue disminuyendo, ¿qué pasa con el cociente? Justifica.
4. Si una máquina fabrica medio tornillo en $\frac{3}{2}$ segundos, ¿cuántos fabricará en una hora y cuántos en $\frac{3}{4}$ de hora?
 5. Resuelve $0,125 \cdot 2 + (3 - 0,5) : \frac{10}{3}$.



$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{9}$	A	$\frac{1}{4}$
B	C	D

Reflexiono

- ¿Qué contenidos de la Lección requirieron de más atención y esfuerzo de tu parte? ¿Por qué crees que sucedió?
- ¿Cómo podrías mejorar tu aprendizaje de la lección? Crea un plan y compártelo con un compañero. Acepta sus sugerencias y corrígelo.



Representación de porcentajes

Objetivo: Representar porcentajes.

¿Qué es un porcentaje?

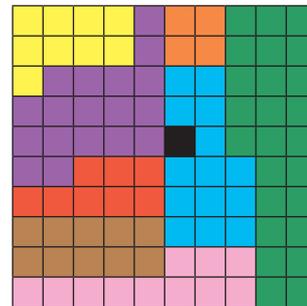
¿Cómo es posible representar porcentajes?

1. El CENSO de 2017 recogió información respecto de las personas extranjeras que durante ese año vivían en Chile.

País de origen	Porcentaje
Perú	25 %
Argentina	9 %
Venezuela	11 %
Ecuador	4 %
Colombia	14 %
Bolivia	10 %
Haití	8 %
Otro	18 %
Ignorado	1 %



Representación



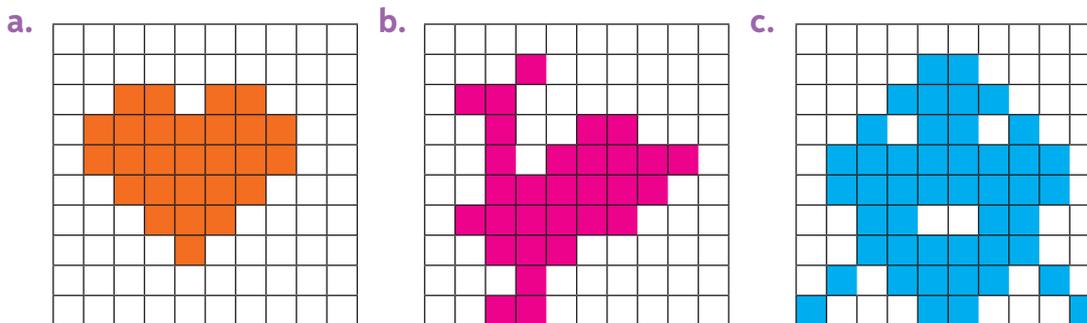
*Información extraída de <https://resultados.censo2017.cl/>.
Los porcentajes fueron aproximados a la unidad.

- ¿Qué simboliza la representación?
 - Identifica el color que corresponde a cada categoría. ¿A qué fracción de la figura total corresponde cada una?
 - ¿El porcentaje de extranjeros que proviene de los países que limitan con Chile, corresponde a más o a menos de la mitad del total?
 - Si la figura corresponde a la unidad, ¿qué número decimal representa a los extranjeros que provienen de Haití?
- ¿Por qué la cuadrícula cuenta con 100 partes iguales? Explica.

El porcentaje se refiere al número de partes, de un total de 100, que cumplen con cierta característica. Los porcentajes tienen distintas formas de representación:

Porcentaje	Fracción	Decimal	Gráficamente
40 %	$\frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	0,4	

2. Indica qué porcentaje está representado en cada cuadrícula.



3. Consigue los materiales y realiza la siguiente actividad:

Paso 1: Recorta cada papel lustre según se solicita.

 2 partes iguales.

 4 partes iguales.

 5 partes iguales.

 10 partes iguales.

 8 partes iguales.

Para recortar partes iguales puedes realizar dobleces, por ejemplo, para 4 partes dobla a la mitad dos veces.

Materiales

- Tijeras.
- Pegamento en barra.
- Papel lustre cuadrado de colores.

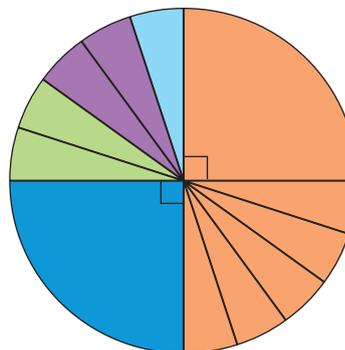
Paso 2: Pega en tu cuaderno un trozo de cada color y responde:

- ¿A qué porcentaje del papel lustre corresponde un trozo de color rojo?
- ¿A qué porcentaje del papel lustre corresponde un trozo de color verde?
- Si se une un trozo de color azul y uno de color rosado, ¿a qué porcentaje de un papel lustre corresponden?
- ¿Qué color representa un porcentaje menor? ¿Por qué?

➤ Comparen sus respuestas en parejas. ¿Recortaron los papeles lustre de la misma forma? ¿Por qué crees que ocurre esto?

4. Indica a qué porcentaje corresponde cada uno de los colores en la siguiente imagen y luego responde.

- ¿Qué porcentaje representan en conjunto los colores verde, morado y celeste?
- ¿Qué porcentaje representan en conjunto los colores naranja y azul?



5. Escribe las fracciones como porcentajes.

a. $\frac{3}{10}$

b. $\frac{4}{8}$

c. $\frac{7}{100}$

d. $\frac{12}{200}$

6. Escribe en porcentaje cada número decimal mencionado por Sofía.



30 y 31

De los 200 libros que tengo el 0,3 corresponde a novelas, el 0,25 a cuentos, el 0,2 a fábulas, el 0,07 a cuentos de terror y el 0,18 a libros científicos.

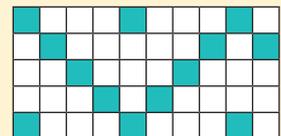


- a. ¿Cuántos libros corresponden al 100%?
- b. ¿Qué porcentaje de los libros corresponde a novelas y libros científicos?
- c. ¿Cuánto suman los números decimales? ¿Por qué crees que suman eso?
7. Indica el porcentaje relacionado con cada situación.
- a. En una comuna 1 de cada 4 mascotas es un gato.
- b. Un concurso de televisión regala $\frac{1}{5}$ de un millón de pesos.
- c. Por concepto de promoción, a un producto se le descuenta 0,1 (una parte de 10) del precio original.
- d. De un grupo de 50 personas, 10 asisten a clases de yoga.
8. Observa la conversación y responde las preguntas.
- a. Si el libro tiene en total 150 páginas, ¿quién lleva más páginas leídas? ¿Por qué?
- b. ¿Qué porcentaje del libro han leído Miguel, Eduardo y Camila?
- c. Si el libro tuviera en total 200 páginas, ¿quién lleva más páginas leídas? ¿Por qué?



Para concluir

a. Escribe como porcentaje, como número decimal y como fracción cada representación.



- b. ¿Por qué es importante saber representar porcentajes? ¿Qué utilidad presentó para ti la actividad práctica?
- c. ¿Qué estrategia te permitió determinar los porcentajes representados? ¿Con qué contenidos se relacionan los porcentajes?

Cálculo de porcentaje

Objetivo: Calcular porcentajes en diversos contextos.

¿En qué situaciones utilizamos porcentajes?

¿Cómo es posible calcular porcentajes?

1. Analiza la situación y responde.



Información extraída de Octava encuesta sobre Gasto y Personal en I+D año 2017, Ministerio de Economía, Fomento y Turismo en colaboración con el Instituto Nacional de Estadísticas. Página 25.

- ¿Qué porcentaje de los investigadores en Chile son hombres? ¿Por qué?
 - Si se consideran 1200 investigadores en total, ¿cuántas debiesen ser mujeres?
 - Si se consideran 2000 investigadores, ¿cuántos debiesen ser hombres?
- Si el total de investigadores fuera 1, ¿cómo se expresa en número decimal el porcentaje de investigadoras que hay en Chile?
- Analiza los porcentajes de investigadores e investigadoras. ¿Por qué crees que sucede esto en Chile?

Para calcular porcentajes, puedes utilizar diversas estrategias:

Estrategia 1: Divide la cantidad por 100. Luego, multiplica el cociente anterior por el porcentaje solicitado. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Calcula el 23 \% de 450} &\Rightarrow 450 : 100 = 4,5 \\ &4,5 \cdot 23 = 103,5 \end{aligned}$$

Estrategia 2: Multiplica el número por el porcentaje solicitado y luego divide por 100. Por ejemplo:

$$\text{Calcula el 15 \% de 300} \Rightarrow \frac{300 \cdot 15}{100} = \frac{4500}{100} = 45$$

Estrategia 3: Multiplica el número por el decimal equivalente al porcentaje solicitado. Por ejemplo:

$$\text{Calcula el 36\% de 2400} \Rightarrow 2400 \cdot 0,36 = 864$$

Estrategia 4: Utiliza la proporcionalidad. Por ejemplo:

Calcula el 20% de 40.

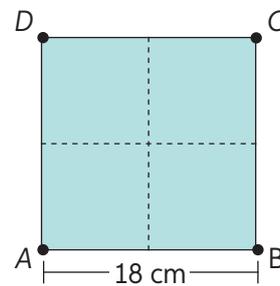
Cantidad	Porcentaje (%)
a	20
40	100

$$\frac{a}{40} = \frac{20}{100} \Rightarrow a = \frac{20 \cdot 40}{100} = \frac{800}{100} = 8$$

2. Calcula los siguientes porcentajes utilizando la estrategia solicitada.
- a. 12% de 44 (E1) d. 70% de 1250 (E4) g. 7% de 630 (E1)
 b. 28% de 400 (E2) e. 57% de 800 (E3) h. 36% de 420 (E3)
 c. 45% de 600 (E3) f. 80% de 2630 (E2) i. 60% de 1890 (E4)

3. Analiza el cuadrado ABCD.

- a. ¿Cuál es su área?
 b. Si cada lado se reduce en 50%, ¿cuál es el área del nuevo cuadrado?
 c. Dibuja el nuevo cuadrado en la figura dada.
 d. ¿Qué porcentaje del área del cuadrado original es el área del nuevo cuadrado?



4. Del precio de la camisa se descuentan \$10 800. ¿A qué porcentaje corresponde esta cantidad? Guíate por lo realizado por Javier.

36 000 : 100 = 360. Cada parte de 100 vale \$360. Necesito saber qué número multiplicado por 360 es igual que 10 800 $\Rightarrow 360 \cdot x = 10 800$.

Polera
\$36 000

Dado un número y una cantidad total, es posible determinar a qué porcentaje corresponde uno del otro; por ejemplo:

Si se tiene un grupo de 15 personas de las cuales 6 son mujeres, ¿qué porcentaje del grupo son mujeres?

$$\frac{6}{15} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 6}{15} = \frac{600}{15} = \frac{120}{3} = 40$$

El 40% de las personas son mujeres.

Además, es posible calcular el 100% dado un número y su porcentaje de la siguiente manera:

Si 9 personas de un grupo, es decir el 60%, son hombres, ¿cuántas personas componen dicho grupo?

$$\frac{9}{x} = \frac{60}{100} \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 100}{60} = \frac{900}{60} = \frac{30}{2} = 15$$

El grupo está formado por 15 personas.

5. Calcula lo que se solicita en cada caso.

a. ¿Qué porcentaje es 200 de 1000?

c. ¿De qué cantidad 12 es el 4%?

b. ¿Qué porcentaje es 30 de 150?

d. ¿De qué cantidad 57 es el 10%?

► ¿Será posible encontrar qué porcentaje es un número de otro aplicando otra estrategia además de las mostradas? Reúnanse en parejas, analicen la situación y respondan.

6. Doña Alicia y su esposo observan los descuentos que se aplican a diversos productos en una venta por Internet realizando lo siguiente.

Para calcular el descuento de la polera A dividiré el precio total en 4, ya que 25% es igual a $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, $6800 : 4 = 1700$. A la polera se le debe descontar \$1700.

The image shows an elderly couple sitting at a desk with a laptop. The woman is pointing at the screen. The laptop screen displays an online store interface with a search bar and navigation tabs for 'Mujer', 'Hombre', 'Niños', and 'Ofertas'. Three clothing items are shown with their respective discounts:

Item	Discount	Price
Polera A (Teal)	25% DCTO	\$ 6800
Polera B (White)	20% DCTO	\$ 15 500
Vestido (Pink)	10% DCTO	\$ 4900

- ¿Por cuánto debes dividir el precio de la polera B para identificar el descuento señalado?
 - ¿Por cuánto debes dividir el precio del vestido para identificar el descuento señalado?
- ¿Por qué doña Alicia consideró esa estrategia para calcular el porcentaje de descuento de la polera A? ¿Servirá para cualquier porcentaje? ¿Por qué?

Existen estrategias de cálculo mental para calcular porcentajes de manera más sencilla utilizando la división, como se muestra en la siguiente tabla:

Porcentaje	50%	25%	20%	10%	5%	4%	2%	1%
División por	2	4	5	10	20	25	50	100

- Calcula mentalmente los siguientes porcentajes:
 - 10% de 50
 - 20% de 300
 - 25% de 120
 - 20% de 40
 - 10% de 500
 - 50% de 250
 - 25% de 36
 - 50% de 84
 - 1% de 4230
- Jaime revisa el almacenamiento en GigaBytes (GB) de su teléfono móvil y se encuentra con lo que aparece en la imagen.
 - ¿Qué porcentaje de la memoria ha utilizado Jaime?
 - ¿Qué porcentaje de la memoria utilizada corresponde a documentos?
 - ¿Qué porcentaje de la memoria utilizada corresponde a aplicaciones móviles?
 - ¿Qué porcentaje de la memoria utilizada corresponde a videos o audios?

➤ ¿Has estado en la situación de Jaime? ¿Piensas que los porcentajes te ayudarían a comprender mejor la información que te están dando? Justifica.



Para concluir

- Construye un esquema que resuma todas las estrategias de cálculo de porcentajes. Luego, escribe un ejemplo de cada una.
- ¿Por qué es importante aplicar estrategias mentales para calcular porcentajes?
- ¿Cómo ha sido tu desempeño en el cálculo de porcentajes? ¿En qué piensas que debes mejorar?



32 y 33

Resolución de problemas que impliquen porcentajes

Objetivo: Resolver problemas que impliquen porcentajes en diversos contextos.

¿Cuándo un ejercicio se transforma en un problema matemático?

¿Qué pasos se necesitan para resolver un problema?

1. Para emprender un negocio de ventas de jugos naturales durante el verano se tienen 2 propuestas.

Propuesta 1:
Usar diferentes porcentajes de fruta para que a todas las personas les guste.



Propuesta 2:
Cada litro de jugo debería contener un 25% de fruta natural.

- a. ¿Cuántos mL de fruta tendría cada litro según la propuesta 2?
- b. Indica la cantidad en mL de fruta que tiene cada botella de $\frac{1}{2}$ litro dependiendo del porcentaje de fruta que contienen.



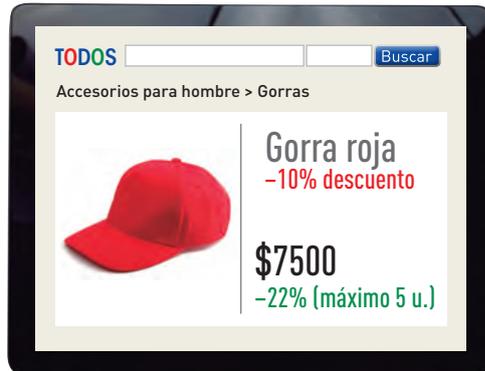
1L = 1000 ml

- c. Si se prepara un jugo de $1\frac{1}{2}$ litros, cuya composición corresponde a un 15% de berries, 10% de frambuesa, 12% de arándanos y 15% de frutillas, ¿cuántos mL de cada fruta tendrá el jugo?

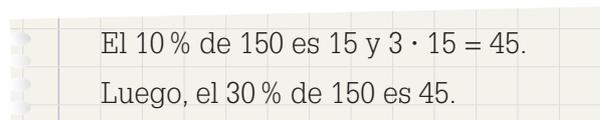
Para resolver problemas en distintos ámbitos, puedes utilizar más de una estrategia; sin embargo, es importante seguir estos pasos:

- 1.º Comprender el enunciado.
- 2.º Planificar lo que vas a realizar.
- 3.º Resolver el problema.
- 4.º Revisar la solución.

2. Analiza la siguiente situación y luego responde.
- ¿Cuánto dinero se ahorra al comprar 3 kilogramos?
 - ¿Cuánto dinero se ahorra al comprar 7 kilogramos?
 - Si se compra un cajón de tomates que contiene 15 kg en \$7440, ¿cuál era el valor del cajón sin descuento?
3. Por remate, una tienda ofrece por Internet diferentes descuentos según se compre online (verde) o en tienda (rojo).



- ¿Cuál es la diferencia de dinero que se ahorra entre comprar por Internet o hacerlo de manera presencial? ¿Cómo lo descubriste?
 - Si Miguel decide comprar siete gorros, ¿cuánto dinero ahorrará?
4. Esteban dice que, para calcular el 30% de 150, puede realizar lo siguiente:



Explica la estrategia que utilizó Esteban.

5. Josefina dice que, para calcular el 25% de una cantidad, esta se divide por 4; por lo tanto, para calcular el 12,5% se debe dividir por 8. ¿Por qué es correcto el método de Josefina?



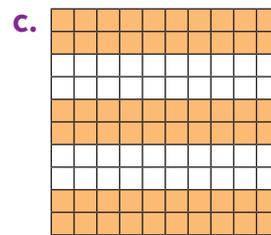
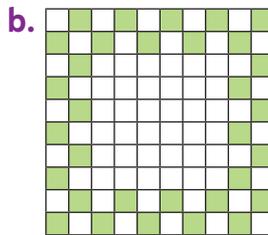
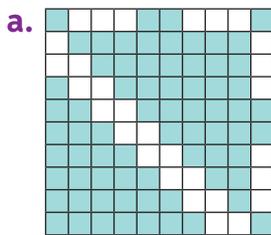
34 y 35

Para concluir

- Un consultorio atiende diariamente a 800 niños y 600 adultos en promedio. Se desea aumentar en 10% la capacidad de atención de niños y en 20% la de adultos. Responde las preguntas y explica paso a paso tu procedimiento.
 - ¿Cuántos niños esperan atender?
 - ¿Cuántas personas en total (niños y adultos) quieren atender?
- ¿Por qué es importante seguir los pasos para resolver un problema? ¿Cuál es la utilidad de mantener un orden en la resolución?
- ¿Qué estrategia utilizaste para resolver los problemas? ¿Es posible utilizar otra estrategia y llegar al resultado esperado? ¿Por qué?

Realiza las actividades dispuestas a continuación. Luego, responde las preguntas de la sección “Reflexiono”.

1. Indica el porcentaje que representa cada figura.



2. Representa cada enunciado como un porcentaje.

- a. En una villa, seis de cada diez personas participan en algún taller deportivo.
- b. El 0,5 (5 partes de 10) de los estudiantes de un colegio vive en otra comuna.
- c. $\frac{1}{4}$ de los asistentes a un concierto son adultos mayores.

3. Calcula el valor del descuento que se le aplicará a cada producto por liquidación.



4. Indica el porcentaje de aumento que se aplicó a las siguientes cantidades:

- a. $600 \Rightarrow 624$
- b. $123 \Rightarrow 124,23$
- c. $20 \Rightarrow 26,6$

5. Resuelve los siguientes problemas:

- a. Jaime quiere comprar un libro cuyo precio es \$3000, pero solo tiene el 20% de esa cantidad. Si el vendedor le ofrece un 10% de descuento, ¿cuánto dinero le falta aún a Jaime para comprar el libro?
- b. En un curso, 36 de los 42 estudiantes tienen cuenta de Facebook. ¿Qué porcentaje de estos estudiantes no ha abierto cuenta en esta red social?

Reflexiono

- Evalúa tu aprendizaje mencionando qué estrategias te resultaron más sencillas para calcular porcentajes. Justifica tu respuesta.
- ¿Cómo podrías mejorar el aprendizaje de aquellas estrategias que te resultaron más difíciles de llevar a cabo?

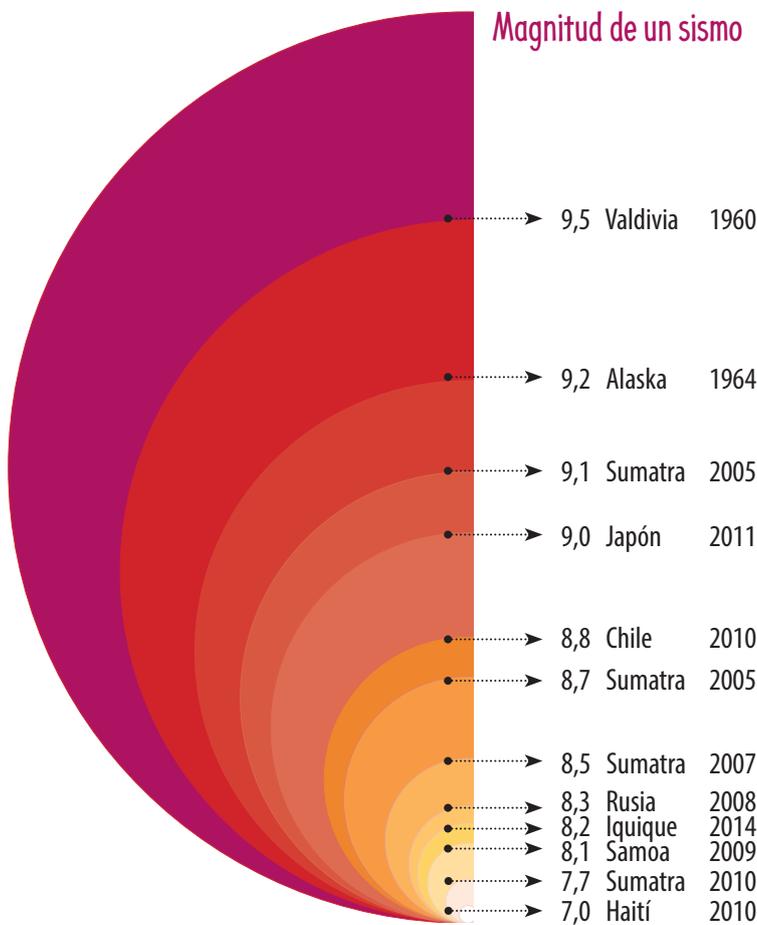


Potencias de base y exponente natural

Objetivo: Representar potencias de base 10.

- ¿Has escuchado hablar de las potencias en matemática?
- ¿Qué sabes de ellas?
- ¿Qué tienen en común los números 10, 100, 1000, 10 000... etc.?

1. Si miras la infografía, ¿qué puedes deducir de la magnitud de un sismo? ¿Cómo aumenta?

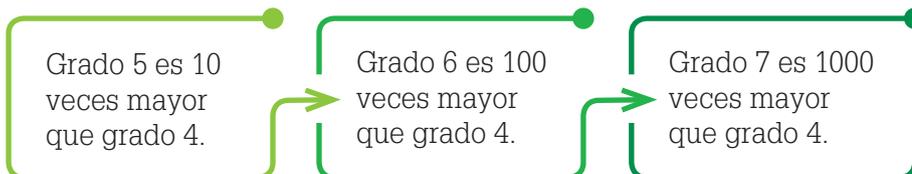


La magnitud de un sismo puede medirse con la escala de Richter, que determina la magnitud de los sismos inferiores a 6,9 grados. Cuando un sismo supera esta magnitud, se mide con la escala sismológica de magnitud de momento.

Magnitud	Clasificación
3	Microevento
4	Menor
5	Leve
6	Moderado
7	Fuerte
8	Potente

Cada categoría de esta tabla aumenta exponencialmente, es decir, cada magnitud, es 10 veces más intensa que la anterior.

a. ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto grado 8 que un sismo grado 4? Observa los datos y responde.



El número expresado puede escribirse como $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$. A esto le llamamos potencia de base 10.

Lección 6

2. Reúnanse en parejas y realicen las actividades propuestas.

En la situación anterior vimos que la magnitud de un sismo aumenta 10 veces con respecto a la categoría anterior. La siguiente tabla ordena esos datos.

A	B	C	D	E
10	100	1000	10 000	100 000
10	$10 \cdot 10$	$10 \cdot 10 \cdot 10$	■	■
■	■	■	10^4	■

- Analicen la situación y completen la tabla en sus cuadernos.
- En la columna D, ¿qué relación identifican entre la cantidad de ceros que siguen al número 1 y el exponente que acompaña a la base 10?
- ¿Qué pueden concluir con respecto a la cantidad de ceros que siguen al número 1 y la cantidad de factores 10 en cada caso?
- ¿Cómo escribirían el número 100 000 000 000 000 como una potencia?
- ¿Qué pueden concluir con respecto a la representación de las potencias de base 10?

Una **potencia** es la multiplicación de un número repetidas veces por sí mismo. Se expresa de la forma a^n y se lee “a elevado a n”.

$$\begin{array}{c}
 \text{exponente} \swarrow \\
 a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces } a \text{ como factor}} \\
 \text{base} \longrightarrow
 \end{array}$$

En el esquema, a es la base y corresponde al valor que se repite y n es el exponente que corresponde al número de veces que se repite la base como factor.

El valor de una **potencia de base 10** y exponente natural es siempre un 1 seguido de tantos ceros como el exponente lo indique.

- ¿Por qué piensas que a las potencias de exponente 2 se las llama “al cuadrado” y a las de exponente 3, “al cubo”? Argumenta tu respuesta usando una representación.

3. Calcula el valor de cada potencia. Sigue el ejemplo.

$$10^6$$

El exponente es 6, entonces el valor de la potencia tiene 6 ceros: 1 000 000.

- | | | | |
|-----------|--------------|-----------|-----------|
| a. 10^2 | c. 10^8 | e. 10^7 | g. 10^9 |
| b. 10^3 | d. 10^{10} | f. 10^1 | h. 10^0 |

- ¿Son todas las potencias con exponente 0 iguales a 1? Investiga.

4. Franco recibe el mensaje de WhatsApp que se muestra en la imagen y decide reenviarlo como indica.

- ¿Cuántas personas reciben el mensaje después de Franco?
- Si el mensaje de Franco se reenviara 4 veces a 10 personas, ¿cuántas lo leerían después que él? Completa la tabla en tu cuaderno.

Envío de Franco	1.º	2.º	3.º	4.º
■	■	■	■	■



5. ¿Qué valor tiene ★ en cada caso?

- $100 = 10 \star$
- $10\,000\,000 = 10 \star$
- $1\,000\,000\,000 = 10 \star$
- $1\,000\,000 = 10 \star$

6. Representa en tu cuaderno cada resultado como una potencia de base 10.

- $999\,990 + 10$
- $320\,034 - 220\,039 + 5$
- $344\,444\,444 - 244\,444\,444$
- $10\,000 - (6436 + 2564)$

7. Luciano compró un MP4 en \$36 299 y un equipo de música en \$74 990. Al pagar, el vendedor le informó que ambos productos estaban con descuento, por lo que pagó \$11 289 menos por el total de la compra. ¿Cuánto dinero gastó en total Luciano? Escribe este valor como una potencia de base 10.

8. Tomás expresó los siguientes valores como potencias de 10: $100 = 10^3$ y $1000 = 10^4$. Explica qué error cometió.

- ¿Cómo puedes evitar los errores al trabajar con potencias de 10? Comparte tu respuesta con un compañero.



37

Para concluir

- ¿Qué condiciones debe cumplir un número para que pueda ser escrito como potencia de base 10? Argumenta utilizando un ejemplo.
- Explica tu estrategia preferida para expresar un número como potencia de 10. ¿Por qué la prefieres?
- ¿Cómo evalúas tu aprendizaje sobre potencias? ¿Crees que te manejas lo suficientemente bien o necesitas reforzar? ¿Por qué?

Descomposición de un número utilizando potencias

Objetivo: Relacionar las potencias de base 10 con el sistema decimal y la descomposición canónica de un número.

¿Qué recuerdas de la descomposición aditiva canónica?

Nombra los valores posicionales de números naturales hasta la centena de millón.

1. Observa la situación referente a la descomposición de un número.

4 589 963

José, como nos enseñaron hace un tiempo, el número puede descomponerse como $4UMi + 5CM + 8DM + 9UM + 9C + 6D + 3U$.

¿Y qué tiene que ver esto con potencias?

- ¿A cuánto equivalen las expresiones resaltadas con los colores rojo, naranja y verde?
- Representa como potencia los números de la actividad anterior.
- Si todos los lugares posicionales tienen una potencia asociada, ¿qué exponente tiene la potencia que representa a la unidad? Comenta con un compañero.

Para descomponer aditivamente un número utilizando potencias de base 10, se debe escribir cada valor posicional como una potencia de base 10 y multiplicarla por la cifra correspondiente.

DMi	UMi	CM	DM	UM	C	D	U
10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1

Por ejemplo, 3 478 094

Su descomposición es:

$$3\,478\,094 = 3\,000\,000 + 400\,000 + 70\,000 + 8\,000 + 90 + 4$$

$$= 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

También es posible componer números escritos en su forma canónica resolviendo las operaciones respectivas.

Recuerda que, por convención, toda potencia con exponente cero es igual a 1.

- ¿Cuál es el número más grande que puedes escribir utilizando los dígitos 8, 5, 0, 4 y 1 sin repetir ninguno? ¿Qué argumento matemático te permite asegurar que este es el número más grande que se puede escribir? Compara tu respuesta con la de un compañero.

2. Identifica el valor posicional de cada dígito destacado. Para ello, escríbelo con una potencia de base 10.

a. 515001

c. 12990012

b. 437222990

d. 7352234

3. Realiza la descomposición de cada número de forma aditiva canónica usando potencias de 10.

a. 12150665

d. 34230050

b. 6230550

e. 82987321

c. 312980011

f. 2988090544

4. Realiza la composición siguiendo el ejemplo.

$$\begin{aligned} &4 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \\ &= 4 \cdot 100\,000 + 1 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1\,000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 400\,000 + 10\,000 + 5\,000 + 500 + 20 + 6 \\ &= 415\,526 \end{aligned}$$

a. $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

b. $5 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

c. $6 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

5. Daniela realizó el cálculo mostrado en la calculadora científica. Investiga qué significa esta notación de la calculadora y cómo se relaciona con las potencias de base 10.



38

Para concluir

- a. ¿Cuál es la relación entre el lugar posicional, el valor posicional y el exponente de la potencia correspondiente en un número natural? Confirma tu respuesta con 3 ejemplos.
- b. ¿Qué estrategias empleaste para el correcto desarrollo de las actividades propuestas? Explícaselas a un compañero.
- c. ¿Cómo evalúas tu aprendizaje? Fundamenta tu respuesta.

Notación científica

Objetivo: Escribir números en notación científica.

¿Cuál es el mayor número que puedes nombrar? ¿Con qué se relaciona?
 ¿Es simple expresar y operar números de más de 12 cifras?
 Justifica tu respuesta.

1. Analiza la situación y responde.



Maritza Soto

La astrónoma chilena Maritza Soto fue quien confirmó la existencia del planeta HD110014c, que es tres veces más grande que Júpiter y que está a 293 años luz de distancia de la Tierra, orbitando alrededor de la estrella roja HD110014. Su investigación fue publicada en la revista de la Real Sociedad Astronómica de Londres en 2015, cuando tenía solo 25 años.

- ¿Cómo nombras el número correspondiente a la distancia entre la Tierra y el Sol? Escríbelo con palabras.
- Realiza el procedimiento anterior con la distancia del planeta descubierto por Maritza y la Tierra.
- ¿Qué complicaciones se presentan al leer números de tantas cifras?

Para evitar complicaciones y equivocaciones al expresar grandes cantidades, surge la notación científica.

La notación científica permite escribir en forma simple números muy grandes o muy pequeños. Consiste en expresar un número como el producto entre un número mayor o igual que 1 y menor que 10, y una potencia de base 10.

Para expresar un número natural en notación científica, puedes seguir los pasos mostrados en el ejemplo.

La Tierra está compuesta por una masa de tierra y otra de agua. Esta última corresponde aproximadamente al 71 % del volumen de la Tierra, lo que equivale a unos 1 386 000 000 km³. Expresa dicha cantidad en notación científica.

Paso 1: Descomponer el número en dos factores, de manera que uno sea una potencia de base 10.

$$1386 \cdot 1\,000\,000$$

Paso 2: Expresar el factor natural como el producto entre un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9 y una potencia de 10.

$$1386 \cdot 1\,000\,000$$

$$1,386 \cdot 1000 \cdot 1\,000\,000$$

Paso 3: Multiplicar las potencias de base 10 y luego expresar el número usando la notación científica.

$$1,386 \cdot 1000 \cdot 1\,000\,000$$

$$1,386 \cdot 1\,000\,000\,000 = 1,386 \cdot 10^9$$

2. Expresa en notación científica. Analiza el ejemplo.

$$427\,000\,000\,000\,000$$

Paso 1: Mueve la coma hacia la izquierda hasta obtener un número entre 1 y 9 (ambos inclusive), el cual se multiplicará por una potencia de base 10.

$$4,270000000000000$$

14 espacios

Paso 2: Cuenta el número de lugares que moviste la coma hacia la izquierda. Ese número corresponderá al exponente de la potencia de base 10.

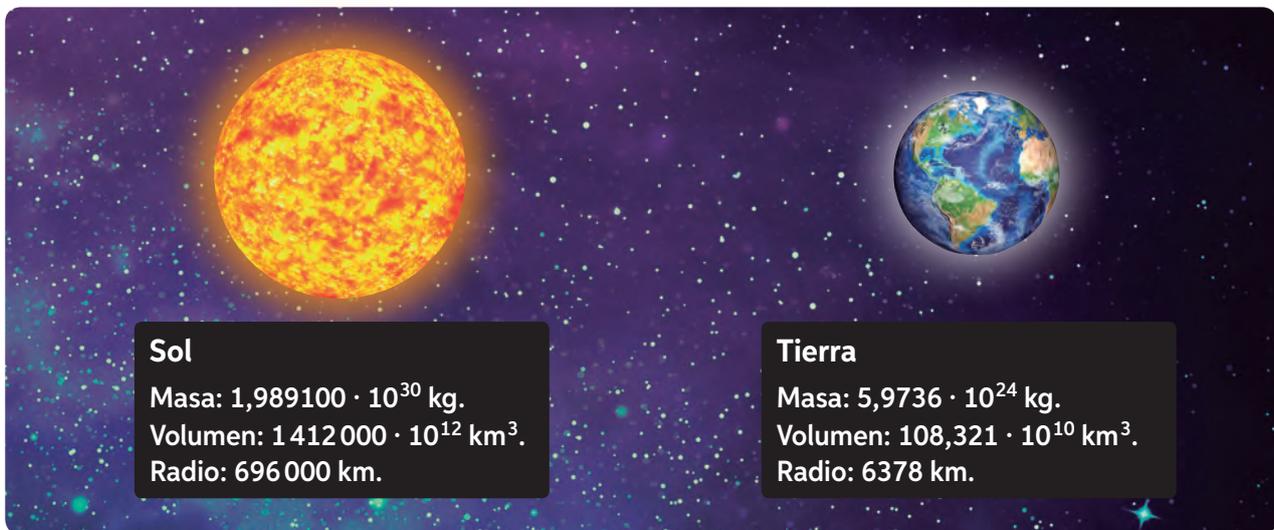
$$\text{Entonces, } 427\,000\,000\,000\,000 = 4,27 \cdot 10^{14}$$

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| a. 352 000 000 | d. 138 000 000 000 000 000 |
| b. 22 500 000 000 000 | e. 270 000 000 000 000 000 |
| c. 3 897 000 000 000 000 | f. 79 800 000 000 000 000 000 |

3. Escribe el número que expresa cada notación científica.

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a. $2,4 \cdot 10^{10}$ | d. $4,5 \cdot 10^3$ |
| b. $7,01 \cdot 10^5$ | e. $3,9 \cdot 10^7$ |
| c. $5 \cdot 10^{11}$ | f. $5,645 \cdot 10^{12}$ |

4. Escribe en notación científica los números de los siguientes datos.
 - a. La población mundial se estima en 7 000 000 000 de personas.
 - b. La unidad astronómica (UA) es una unidad de medida que corresponde a la distancia entre la Tierra y el Sol, cuyo valor es de 150 000 000 000 m aproximadamente.
 - c. La distancia entre el Sol y Plutón en el punto más alejado de su órbita es 7 600 000 000 000 kilómetros
 - d. Los dinosaurios se extinguieron hace 65 millones de años.
 - e. En Chile hay aproximadamente 17 millones de habitantes.
 - f. La masa de la Luna es 74 000 000 000 000 000 000 toneladas.
5. Analiza la información y responde.



- a. ¿Cuáles de los valores están escritos en notación científica? Aquellos que no lo estén, exprésalos en dicha notación.
- b. Aproximadamente, ¿cuál es el cociente entre la masa del Sol y la masa de la Tierra? Expresa el resultado en notación científica.
- c. Aproximadamente, ¿cuál es el producto entre el radio de la Tierra y el radio del Sol? Expresa el resultado en notación científica.
- d. Aproximadamente, ¿cuál es el cociente entre el volumen del Sol y el volumen de la Tierra? ¿Crees conveniente escribir el resultado en notación científica? Justifica.



39 y 40

Para concluir

- a. Utilizando un esquema o un organizador visual, resume las estrategias relacionadas con notación científica.
- b. ¿Qué complicaciones tiene el proceso para representar números en notación científica?
- c. ¿Cómo evalúas tu aprendizaje en notación científica? ¿Crees que te manejas lo suficientemente bien o necesitas reforzar? Fundamenta tu respuesta.

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las actividades dispuestas a continuación. Luego, responde las preguntas de la sección “Reflexiono”.

1. Analiza la información y completa la tabla en tu cuaderno.

Base	Exponente	Multiplicación reiterada	Potencia	Valor de la potencia
10	7	■	■	■
■	■	■	10^4	■
10	■	■	■	1
■	■	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	■	■
■	■	■	■	100 000 000

2. Ordena los siguientes números de forma creciente.

a. $7 \cdot 10^2$, $7 \cdot 10^1$, $1 \cdot 10^2$, $9 \cdot 10^0$

b. $5 \cdot 10^1$, $1 \cdot 10^1$, $4 \cdot 10^0$, $3 \cdot 10^3$

3. Realiza la descomposición de los siguientes números de forma aditiva canónica utilizando potencias de base 10.

a. 931 018

c. 2 589 600

b. 4508

d. 15 590

4. Resuelve los siguientes problemas. Escribe tu resultado en potencias.

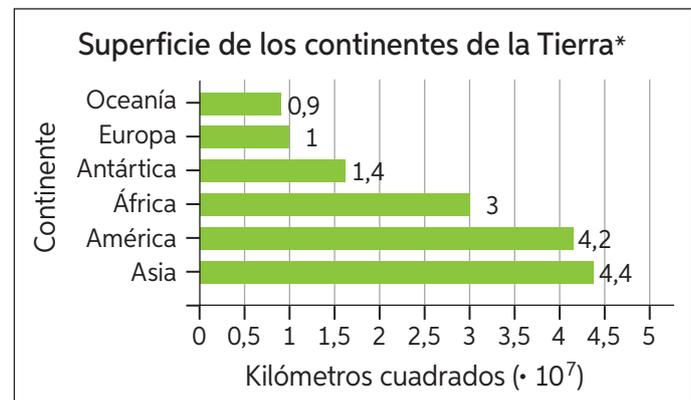
a. Esteban afirma que en un metro hay mil milímetros y que en 1 km hay 1000 m. ¿Cuántos milímetros hay en 10^4 km?

b. El diámetro del Sol mide $1,4 \cdot 10^9$ metros y el de la Tierra, $1,2742 \cdot 10^4$ km. ¿Cuál es su diferencia?

5. Analiza el gráfico que muestra la superficie en km^2 de cada continente.

a. ¿Qué superficies están expresadas en notación científica? Justifica.

b. Expresa todas las superficies en notación científica.



* Superficies aproximadas

Reflexiono

- ¿Qué dificultades tuviste a lo largo de la lección? Descríbelas.
- ¿Cómo las superaste? Comenta con un compañero.



Síntesis

¿Qué es un mapa mental?

Es un organizador visual que permite ordenar informaciones o conceptos y las relaciones establecidas entre sí. Comienza por una idea central, importante o general, para luego situar a su alrededor las ideas o conceptos secundarios y las relaciones que las unen.

Observa el mapa mental que sintetiza parte de la Unidad 1.



Ahora, hazlo tú

1. Escoge una lección de la Unidad 1 y sintetiza sus contenidos mediante un mapa mental.
2. En parejas, compartan y analicen sus mapas mentales. ¿Qué aspecto consideró cada uno para crear su síntesis? ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre sus mapas?

Repaso

Realiza las siguientes actividades:

Lección 1: Números enteros

- Ordena de mayor a menor los siguientes grupos de números:
 - $4, -4, |-5|, 0, -3, -25$
 - $5, -6, -3, |-3|, 1, 4, |-6|$
 - $|18|, -17, -|-30|, 0, 13, |-5|, -56$

Lección 2: Adición y sustracción en \mathbb{Z}

- Calcula el resultado de las siguientes operaciones:
 - $3 + (-17) - (24 - (-5))$
 - $[|-15| + (-28)] + (24 - |-38|)$
- Un clavadista se lanza desde una plataforma a 20 m de altura y al sumergirse alcanza una profundidad de 5 m. ¿Cuál es la distancia entre el punto de lanzamiento y el de mayor profundidad?
- Crema un problema para la operación $-58 + (-26)$. Luego, resuélvelo.

Lección 3: Números decimales

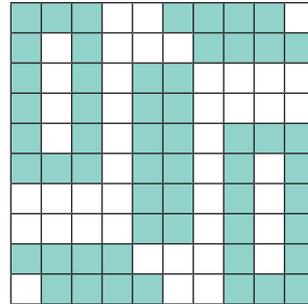
- La tabla muestra el precio por kilogramo de los tipos de carne que se venden en un supermercado.

Tipo de carne	Precio (kg)	Cantidad que lleva el cliente
Vacuno	\$4990	2,5 kg
Cerdo	\$3290	0,80 kg
Pollo	\$1990	3,75 kg

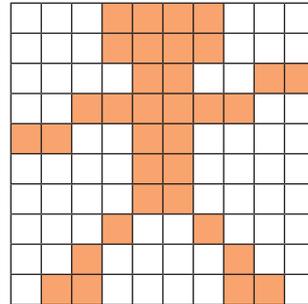
- Si un cliente lleva la cantidad indicada de cada tipo de carne, ¿cuánto pagará en total?
- Si otro cliente lleva el doble de vacuno, la mitad del cerdo y la misma cantidad de pollo que el cliente anterior, ¿cuánto pagará en total?

- Indica el número decimal y la fracción representada en cada región.

a.



b.



Lección 4: Fracciones

- ¿Cuántos minutos son $\frac{2}{3}$ de media hora?
- ¿Cuál es el cociente entre $1\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$?

Lección 5: Porcentajes

- En una tienda, los electrodomésticos se encuentran con un 35% de descuento de su valor. Si una lavadora cuesta \$185 990, ¿en cuánto disminuirá su valor si se le aplica el descuento?

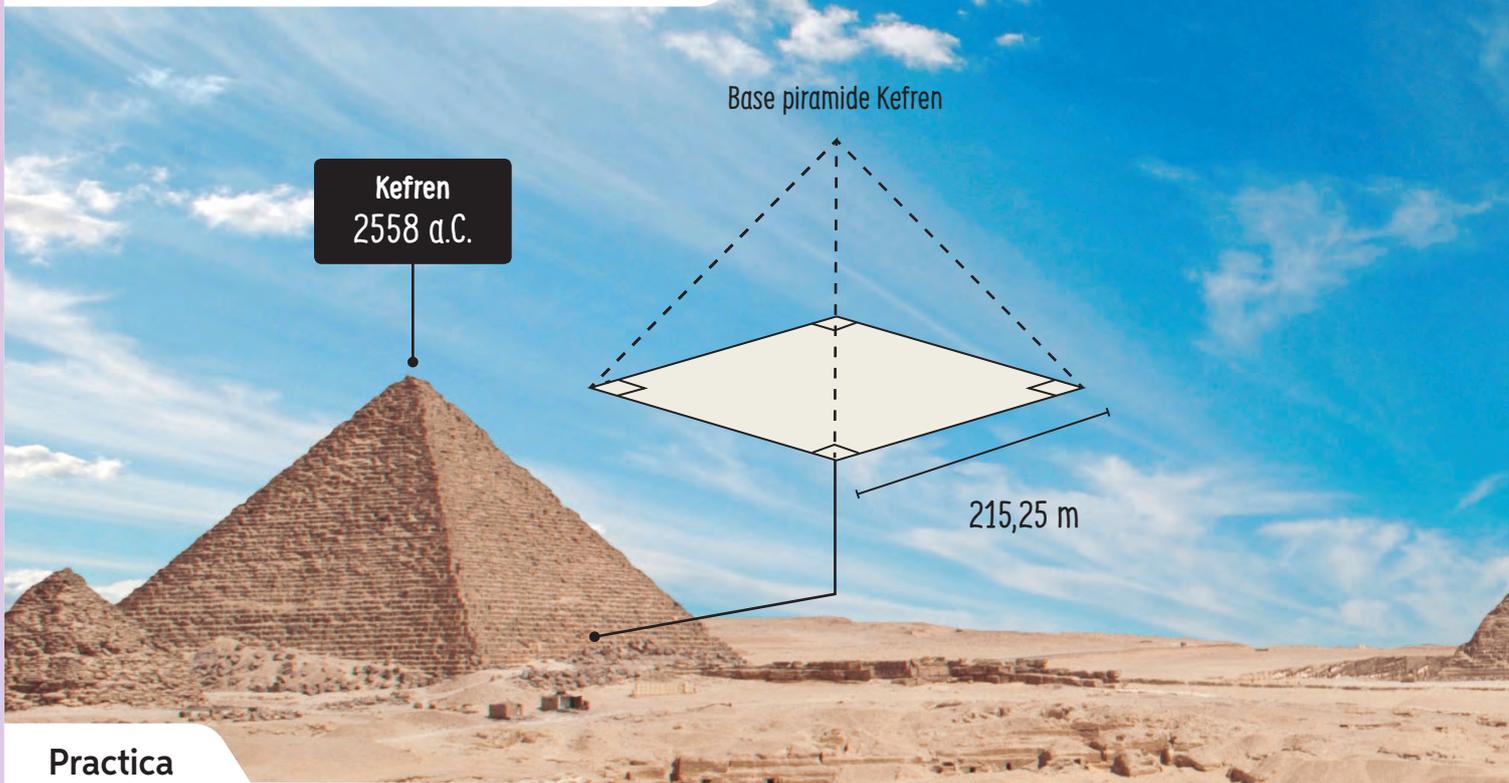
Lección 6: Potencias

- Realiza la descomposición del número 125 596 662 de forma aditiva multiplicativa usando potencias de base 10.
- Resuelve y expresa el resultado en notación científica.

$$35\,000\,000\,000 + 78\,000\,000\,000$$

¿Qué aprendí?

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.



Practica

Realiza las actividades a partir de la imagen principal.

1. La imagen principal muestra el año aproximado en que fueron construidas las pirámides. ¿Cuál de ellas es la más antigua?
2. ¿Cuál es el área de la base cuadrada de Kefren?
3. Lee el recuadro ¿Sabías que? y escribe en notación científica la aproximación de la distancia que existe entre la Tierra y el Sol.
4. Keops, la pirámide más grande, contenía la estatua más pequeña. Si la altura de la estatua correspondía aproximadamente al 0,051 % de la altura de la pirámide, ¿cuánto medía dicha estatua en centímetros?

Resuelve.

5. Escribe una situación que pueda ser representada por el número -23 .
6. ¿Cuántos números naturales hay entre el -8 y el 4 ?
7. Resuelve las siguientes adiciones:
 - a. $[-6 + (-12) + 4] + [(-12) + (-1)]$
 - b. $[-8 + 15 + (-8)] + [(-5) + 7 + (-13)]$
8. La temperatura que registra un termómetro es de -4 °C. Si se produjo un aumento de 7 °C, ¿cuál es su nueva temperatura?
9. En un recorrido de $196,56$ km, un automóvil consumió 18 L de bencina. ¿Cuántos kilómetros recorrió en promedio por cada litro de bencina?



Keops
2589 a.C.

¿Sabías que?

La altura original de la pirámide Keops es de 147 m. Si dicho valor lo multiplicamos por 1 000 000 000, se puede obtener una aproximación de la distancia que existe entre la Tierra y el Sol.

Micerino
2532 a.C.

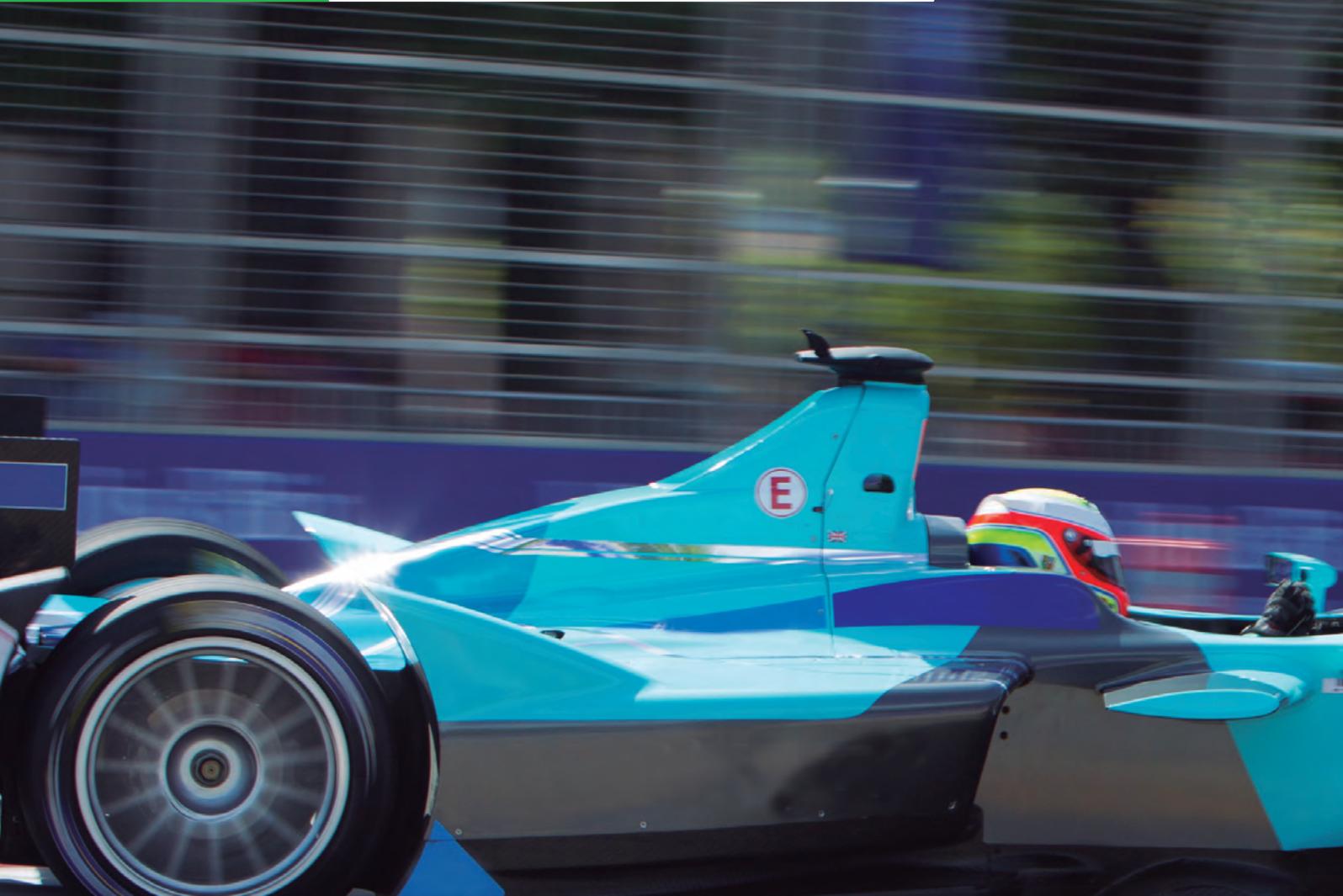
- 10.** Escribe como fracción impropia y como decimal el número $3\frac{5}{8}$. Luego, represéntalo como región.
- 11.** Romina tiene $\frac{13}{5}$ kg de mermelada. Si los reparte en frascos de $\frac{1}{5}$ kg, ¿cuántos frascos puede llenar?
- 12.** Resuelve: $\left(\frac{4}{3} - 1\right) : \left(3\frac{5}{6} \cdot 2\frac{2}{3}\right)$
- 13.** Calcula los siguientes porcentajes:
- a. El 18 % de 2703. c. El 25 % de 1560.
b. El 86 % de 990. d. El 38 % de 2850.
- 14.** Realiza la composición de los siguientes números.
- a. $2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^0$
b. $5 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^1$

Reflexiono

- ¿Qué fortalezas y debilidades lograste observar al rendir esta evaluación?
- ¿Tuvieron buenos resultados tus planes de mejora propuestos en las evaluaciones intermedias?
- ¿Qué tan interesante te resultó esta Unidad? ¿Para qué crees que es útil aprender sus contenidos?

2

Álgebra y funciones



La Fórmula E es una categoría de competición de monoplazas eléctricos organizada por la Federación Internacional del Automóvil (FIA). Fue creada con la intención de promover el desarrollo de vehículos eléctricos y acelerar su popularidad. En enero de 2019, se llevó a cabo el Circuito de Parque O'Higgins en Chile.

1. La bandera a cuadros se utiliza al terminar la carrera. Si es de forma rectangular, su área es de 8000 cm^2 y uno de sus lados mide un 1 m , ¿cuál es la dimensión del otro lado? Plantea una ecuación y resuelve.
2. La rapidez (v) máxima que puede alcanzar uno de estos monoplazas es de 225 km/h . ¿Cuánto tiempo (t) demorará en recorrer una distancia (d) de 600 m con esta rapidez? Recuerda que $v = \frac{d}{t}$.



3. Los autos de Fórmula E son capaces de terminar la carrera con un juego de ruedas, pero el equipo cuenta con una rueda trasera y una delantera de recambio. Si no conocemos la cantidad de equipos participantes, plantea una expresión que represente la cantidad de ruedas en total.

Como puedes ver, el álgebra se puede relacionar con este contexto y muchos otros.

En esta unidad aprenderás a utilizar el lenguaje algebraico, reducirás expresiones algebraicas y resolverás ecuaciones e inecuaciones. Además, conocerás las relaciones de proporcionalidad .

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades en tu cuaderno para recordar lo aprendido anteriormente.

Números enteros

- Determina el valor que completa la igualdad.
 - $\blacksquare + (-3) = 16$
 - $12 + (-5) - \blacksquare = 0$
- Resuelve las siguientes operaciones combinadas:
 - $4 + 12 \cdot 15 - (-3) + 15$
 - $5 + (-4) + [4 \cdot 5 + (-10)] + (-4)$

Decimales y fracciones

- Resuelve.
 - $0,1 \cdot (18,4 - 21,6)$
 - $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - 0,1 \cdot \frac{2}{5}$
- Felipe debe entregar en 12 días un trabajo de Historia, el cual debe tener al menos 35 páginas. Si escribe 3,5 páginas cada día, ¿podrá terminar a tiempo?

Porcentajes

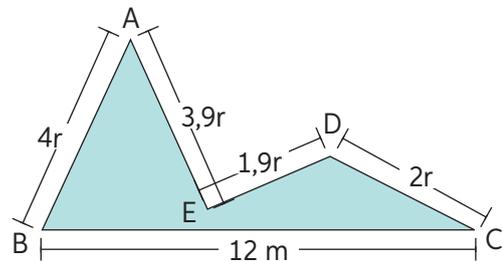
- Un computador que valía \$320 000 está con 15% de descuento.
 - ¿Qué porcentaje del precio original es el precio actual?
 - ¿Cuál es el precio actual del computador?

Ecuaciones e inecuaciones

- Resuelve.
 - $x + 3 = 7$
 - $x + 8 > 6$

Expresiones algebraicas

- Representa en lenguaje algebraico.
 - El triple de un número menos el doble del mismo número.
 - El doble de la edad de María Jesús aumentado en 8 unidades.
- Plantea el perímetro de la figura.

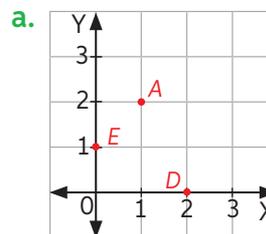


Proporciones

- Resuelve los siguientes problemas:
 - Un ciclista recorre 12 km en 20 minutos. Con igual rapidez, ¿cuánto recorrerá en 50 minutos? ¿Cuánto recorrerá en una hora y media?
 - En un mercado muy económico, por comprar 4 kg de paltas se pagan \$3600. Si se compran 7,5 kg de paltas, ¿cuánto se debe pagar?

Plano cartesiano

- Indica las coordenadas de cada punto.



Reflexiono

- ¿Qué actividades te resultaron más difíciles de resolver? ¿Por qué?
- ¿Qué temas crees que debes reforzar para enfrentar esta Unidad? ¿Por qué?

Lenguaje algebraico

¿Cómo generalizarías la expresión “10 años más que la edad de una persona”?

Define con tus palabras qué es el lenguaje algebraico.

1. Reúnanse en grupo de 3 o 4 estudiantes, consigan los materiales y realicen la siguiente actividad.

Instrucciones:

Paso 1: Fabriquen 21 cartas rectangulares de 4 cm por 6 cm.

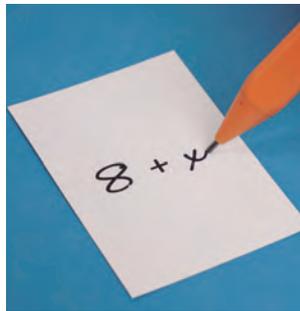
Paso 2: En una carta deben escribir una expresión algebraica con letra, por ejemplo: “ $8 + x$ ”; y en otra en lenguaje natural, en este caso: “ocho aumentado en un número”.

Paso 3: Realicen lo mismo con las demás cartas. En total deben tener 10 parejas. En la carta sobrante, escriban un número a elección, por ejemplo 1.

Objetivo: Representar números usando lenguaje algebraico.

Materiales

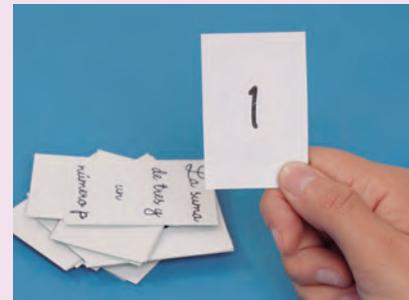
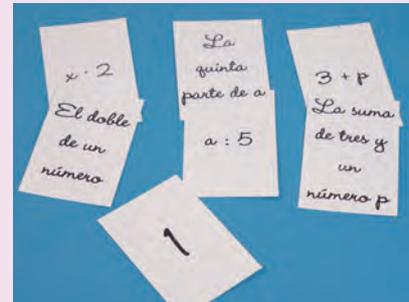
- Cartulina.
- Lápices de colores.
- Tijeras.
- Regla.



¿Quién tiene el número?

¡A jugar!

- 1.º Reúnan todas las cartas en un mazo boca abajo. Revuelvan y repartan de modo que cada jugador quede con la misma cantidad de cartas. Si no es posible, sigan repartiendo hasta que no queden cartas en el mazo.
- 2.º Definan el orden en que jugarán. Cada jugador debe asociar las expresiones con su par, dejar las cartas en la mesa y ceder su turno.
- 3.º Terminada esta ronda, cada jugador deberá sacar una carta a quien esté a su derecha. Si logra formar un par, lo deja en la mesa. En caso contrario, cede su turno y así sucesivamente.
- 4.º Gana quien primero se quede sin cartas y se continúa hasta que alguien se quede solo con la carta que contiene el número.



Para jugar más partidas, pueden asignar puntajes. Por ejemplo, quien gana recibe 5 puntos; el segundo lugar, 2 y quien pierde recibe 0 puntos.

Expresar situaciones en lenguaje algebraico implica representar, con símbolos, números y letras, situaciones que necesitan generalizarse. Por ejemplo:

El perímetro de un cuadrado se calcula multiplicando por 4 la medida de su lado.

Lo anterior expresado en lenguaje algebraico es $P = 4a$, siendo a la medida del lado del cuadrado.

- ¿En qué situaciones has utilizado el lenguaje algebraico?
- Averigua qué quiere decir la expresión “hace n tiempo que no nos vemos”. Si no la conoces, consúltale a un adulto de tu familia.

2. Representa con lenguaje algebraico. Revisa el ejemplo.

La mitad de un número, disminuida en el triple del mismo número.

Paso 1: Identifica la variable. Denominemos x a un número cualquiera.

Paso 2: Representa con lenguaje algebraico.

La mitad del número es $\frac{x}{2}$ y el triple del mismo es tres veces dicho número, o sea, $3x$. Así, la expresión será $\frac{x}{2} - 3x$.

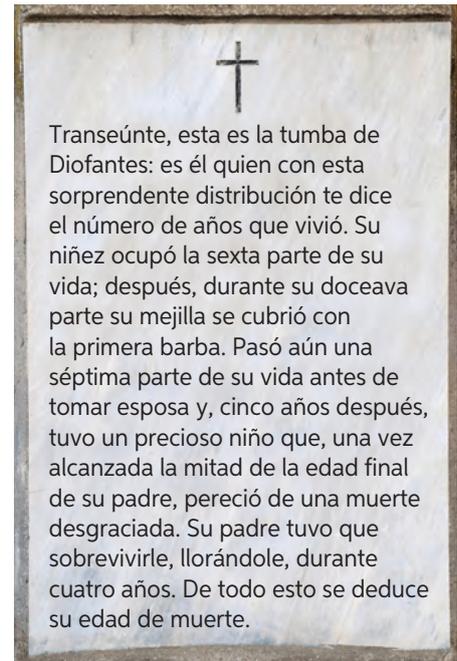
- a. El doble de un número aumentado en diez unidades.
 - b. El triple de la suma entre un número y cuatro unidades.
 - c. El 25 % de un número.
 - d. La mitad de un número más su doble.
 - e. La edad de Katia disminuida en tres unidades.
 - f. El triple de la diferencia entre un número y tres unidades.
3. Representa en lenguaje algebraico las siguientes ecuaciones e inecuaciones.
- a. El triple de la suma de las edades de Juan y María es 120.
 - b. Un número más su doble es igual al número más 5.
 - c. El triple de la edad de Claudio más el triple de la edad de Natalia es 102.
 - d. De la docena de vasos que tenía se quebraron algunos y me quedaron 10.
 - e. Del total de huevos que tenía, se me quebraron 7 y me quedaron más de 6.
4. Crea una situación para cada expresión algebraica.
- | | |
|-----------------|----------------------------|
| a. $4 : p$ | f. $800 + 500 + j$ |
| b. $25 \cdot u$ | g. $57y$ |
| c. $p - 8$ | h. $(550 + p) - 90$ |
| d. $65 - 9 - u$ | i. $x + (x + 1) + (x + 2)$ |
| e. $50 - s$ | j. $a + b + c + d$ |

5. Representa las siguientes situaciones matemáticas en lenguaje algebraico.
- El perímetro de un rectángulo.
 - El área de un cuadrado.
 - El área de un triángulo.
 - El perímetro de un triángulo escaleno.
 - El perímetro de un triángulo isósceles.
- ¿Qué contenidos geométricos tuviste que recordar para responder las preguntas anteriores?
6. **Desafío** Escribe en lenguaje algebraico utilizando solo una letra: “Las edades de 3 personas son tales que la menor tiene 10 años menos que la mayor y la del medio tiene 5 años más que la menor”.
7. En parejas, resuelvan el acertijo y respondan las preguntas.

Diofanto de Alejandría fue un célebre matemático griego que vivió en el siglo III d. C., y es conocido como “el padre del álgebra”.

Dedicó gran parte de su trabajo a la resolución de distintos tipos de problemas y, pese a que se conocen muy pocos detalles de su vida, sí se sabe con certeza su edad de muerte gracias al epitafio grabado en su tumba como homenaje a su labor.

- Según los datos contenidos en el epitafio, ¿qué estrategia utilizarían para calcular la edad de Diofanto al morir? Destaquen la información necesaria para resolver el problema.
- Si les dijeran que Diofanto murió a los 72 años, ¿de qué manera comprobarían si es la respuesta correcta? Expliquen paso a paso su estrategia.
- Construyan un pequeño acertijo para que otra persona descubra la suma de sus edades. Escríbanlo utilizando lenguaje algebraico.



42

Para concluir

- ¿Para qué crees que sirve aprender el lenguaje algebraico? Ejemplifica.
- ¿Qué estrategia o procedimiento sigues para expresar situaciones en lenguaje algebraico? Explica.
- ¿Crees que has aprendido sobre lenguaje algebraico?, ¿cómo lo evidencias?

Expresiones algebraicas

Objetivo: Reconocer las características de las expresiones algebraicas.

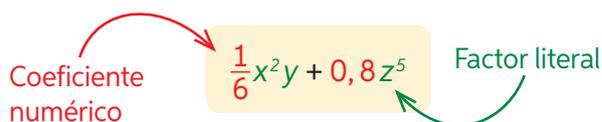
¿Para qué crees que sirve aprender el lenguaje algebraico? Ejemplifica.

¿Qué otros tipos de lenguajes conoces? Explica qué signos emplea cada uno.

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números o símbolos relacionados entre sí por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división.

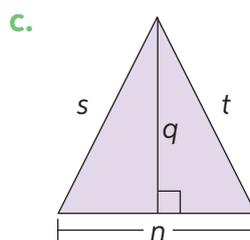
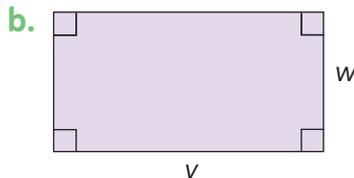
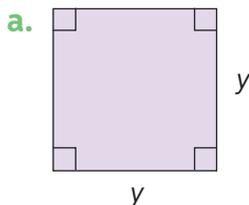
Una expresión algebraica está compuesta por **términos algebraicos**, los cuales están separados entre sí por los signos + o -.

Cada término algebraico consta de un **coeficiente numérico** y un **factor literal**.



Geometría

1. ¿Qué expresiones algebraicas representan el área y el perímetro de las siguientes figuras geométricas?



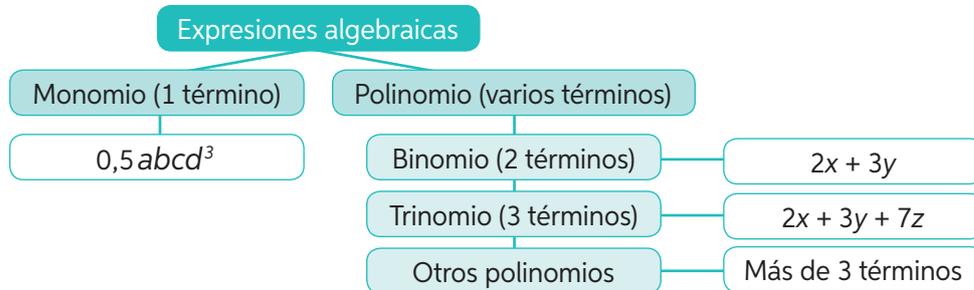
2. Analiza y completa la tabla en tu cuaderno.

Término algebraico	Coeficiente numérico	Factor literal
$5 \cdot a^3 \cdot b$	■	■
$0,7 \cdot x^2$	■	■
$\frac{1}{9} \cdot a^7 \cdot b^3$	■	■
■	12	$z^3 x$
■	-3,75	$a^3 pq$
■	$\frac{4}{11}$	stu

➤ Define con tus palabras los conceptos de coeficiente numérico y factor literal. ¿Por qué crees que tienen esos nombres?

3. De acuerdo con la información, clasifica las siguientes expresiones algebraicas.

Las expresiones algebraicas según su número de términos se clasifican en:



- a. $\frac{1}{6}b + 1$ c. $0,5a^3b - 6b + a$ e. $\frac{1}{9} + 5 + a$
- b. $23x^2y^3z^7$ d. $a + b + c + d + 1$ f. $3hi^3j - 0,01$

4. Cada máquina realizó el proceso que se muestra.



- a. Escribe una expresión algebraica para los procesos de las máquinas naranja y celeste.
- b. Escribe en palabras el proceso que realizan las máquinas verde y morada.



43

Para concluir

- a. Claudio tiene p estampillas. Su hermano le regala b estampillas y su mamá le regala el doble de las que tenía inicialmente y 100 más. ¿Qué expresión representa la cantidad de estampillas que tiene Claudio? Explica cómo planteaste la expresión.
- b. ¿Cuáles son los conocimientos que debes considerar al escribir una frase expresada en lenguaje algebraico?
- c. ¿Qué debes reforzar sobre expresiones algebraicas? Fundamenta.

Valorización de expresiones algebraicas

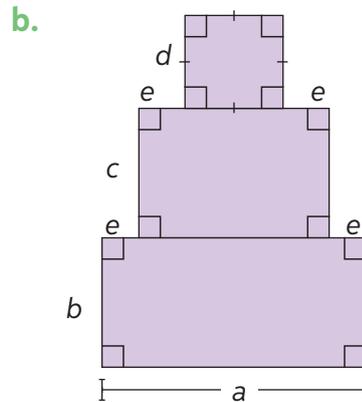
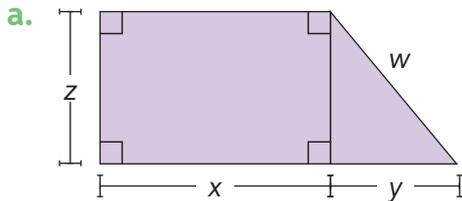
Objetivo: Valorizar expresiones algebraicas en variados contextos matemáticos.

¿Cuál es la fórmula para el cálculo del área del cuadrado? ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado 3 cm?

¿Cuál es la expresión del cálculo de volumen de un cubo?

Calcula el volumen de un cubo de arista 10 cm.

1. Representa en lenguaje algebraico el perímetro (P) de las siguientes figuras:



- c. Si $x = 10$ cm, $y = 6$ cm, $w = 8$ cm y $z = 7$ cm, ¿cuál es el perímetro de la figura a? ¿Cómo lo calculaste?
- d. Si $a = 25$ cm, $b = 13$ cm, $c = 11$ cm, $d = 9$ cm y $e = 4$ cm, ¿cuál es el perímetro de la figura b? Explica paso a paso cómo llegaste a la solución.

Al calcular los perímetros anteriores, estás valorizando expresiones algebraicas. Para valorizar expresiones algebraicas, debes reemplazar los valores dados de las variables en la expresión algebraica y luego resolver. Por ejemplo:

Si $a = 1$, $b = -1$ y $c = 2$, calculemos $a - b + c$.

$$\begin{aligned}
 & a - b + c \\
 & 1 - (-1) + 2 \\
 & 2 + 2 \\
 & 4
 \end{aligned}$$

Consideraciones importantes:

- Procura ser muy ordenado en la resolución.
- Utiliza paréntesis auxiliares cuando sea necesario, sobre todo cuando reemplaces valores negativos.
- En la resolución, siempre debes considerar la prioridad de las operaciones.

- ¿En qué situaciones has valorizado expresiones algebraicas? Menciona al menos 3.

2. Representa las situaciones mediante expresiones algebraicas y evalúalas. Analiza el ejemplo.

Por la venta de un producto, Valentina recibió tres billetes y dio de vuelto seis monedas. ¿Cuál era el precio de venta del producto si los billetes eran de \$2000 y las monedas de \$100?

Paso 1: Identifica las variables.

Valor de cada billete: b Valor de cada moneda: m Precio: p

Paso 2: Representa el precio de venta (p).

Recibió $3b$ pesos en billetes y dio como vuelto $6m$ pesos en monedas, por lo que $p = 3b - 6m$

Paso 3: Evalúa la expresión para $b = 2000$ y $m = 100$.

$$\begin{aligned} p &= 3 \cdot 2000 - 6 \cdot 100 \\ &= 6000 - 600 \\ &= 5400 \end{aligned}$$

Luego, el precio del producto es \$5400.

- En una prueba que rindió, Karina por cada respuesta correcta se asignaban 5 puntos y por cada respuesta incorrecta se descontaban 3. Si Karina respondió 21 correctas y 7 incorrectas, ¿cuál fue su puntaje?
- Hugo es carpintero y tiene en su bolso dos bolsas de clavos de 2,5 pulgadas y tres bolsas de clavos de 4 pulgadas. Si cada bolsa de clavos más pequeños tiene una masa de 400 gramos y la otra, 750 gramos, ¿cuál es la masa total de las 5 bolsas?
- Paulina compró un terreno rectangular cuyo largo mide 7 metros más que su ancho. Su objetivo es cercar todo el contorno con una reja y plantar pasto en toda su superficie. Sabiendo que el metro de reja cuesta \$2500 y el metro cuadrado de pasto, \$1200, ¿cuánto dinero gastará si el ancho del terreno es de 20 metros?

Física

3. La segunda ley de Newton postula lo siguiente: “la fuerza F , medida en $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, aplicada sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración que adquiere dicho cuerpo”. Algebraicamente se puede escribir: $F = m \cdot a$.

Si un cuerpo tiene una masa de 20 kg y acelera a $25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, ¿cuál es la magnitud de la fuerza F que se le aplicó?

Para concluir

- Describe el procedimiento para valorizar expresiones algebraicas.
- ¿Qué puedes hacer para reforzar tu aprendizaje de valorización de expresiones algebraicas? Comenten en parejas.
- Si lo requieres, ¿podrías valorizar expresiones en una situación real? Fundamenta tu respuesta.



44 y 45

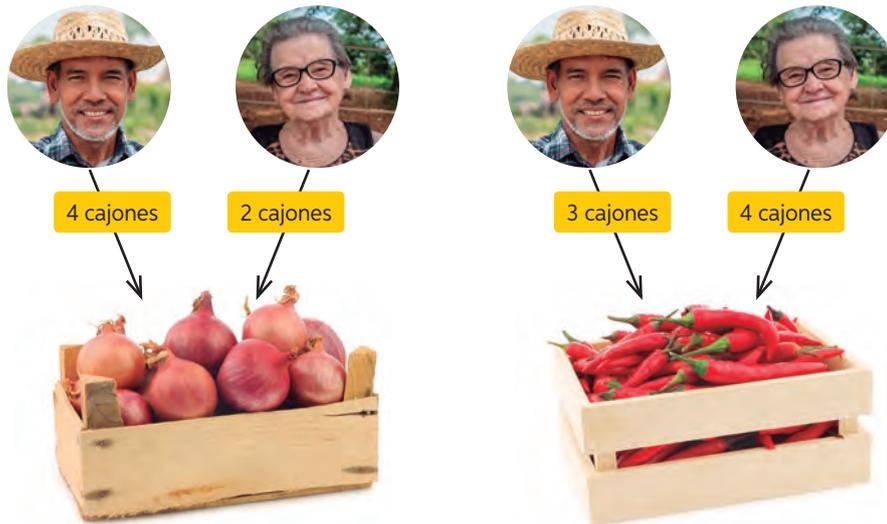
Reducción de expresiones algebraicas

Objetivo: Reducir expresiones algebraicas reuniendo términos semejantes.

¿Crees que es posible realizar operaciones matemáticas con expresiones algebraicas?

¿Qué aplicaciones tiene el álgebra en la vida cotidiana?

- Humberto y Sara son agricultores y decidieron unir sus cosechas para venderlas. A continuación, se detalla cada cosecha.



Todos los cajones de cebollas tienen la misma masa y los de ají también tienen la misma masa entre sí, que no es necesariamente igual a la de cebollas. Descontando la masa de los cajones, ¿cuántos kilogramos, entre cebollas y ají, tienen para vender?

- Expresa la situación en lenguaje algebraico.
- Suma los coeficientes numéricos de los términos que tengan el mismo factor literal. ¿Cuál es la expresión resultante?

Los términos semejantes son aquellos que tienen el mismo factor literal. Reducir términos semejantes consiste en sumar o restar los coeficientes numéricos conservando el factor literal que tienen en común. Para ello, puedes seguir estos pasos:

- Identifica aquellos términos que sean semejantes.
- Agrúpalos según su factor literal y resuelve las operaciones correspondientes.

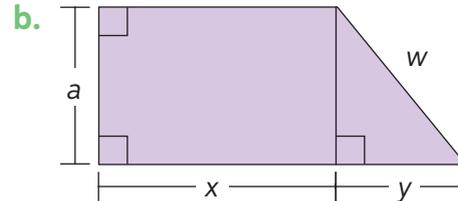
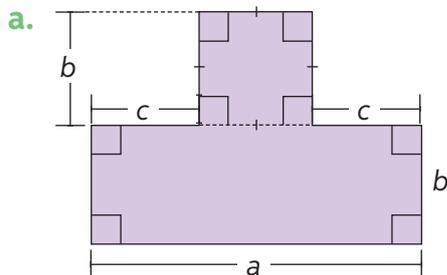
Por ejemplo, en la actividad inicial se tiene que:

$$\begin{aligned}
 &4c + 3a + 2c + 4a \\
 &4c + 2c + 4a + 3a \\
 &6c + 7a
 \end{aligned}$$

2. Reduce las expresiones algebraicas.

- $6x + 4y - 2z + 5x - 18y + 9z$
- $15f - 13g + 5 - 4f - 8g + 9$
- $-4pq + 4rs - 5pq - 12rs$
- $7bc + 15bd + 4bc - 12bd$
- $9a + 3ab + 7b - 8a + 4ab$
- $14uv - 7v - 12uv + 5v - 2uv$

3. Expresa en forma reducida el perímetro de cada figura.



4. Determina, en cada caso, los valores de A y B para que la reducción de términos sea correcta.

- $3px - Aqy + Bpx + 7qy = 9px - 2qy$
- $Axy + yz + 5xy - Byz = 12xy - 10yz$
- $14st + Aqr + Bst - 5qr = 8st$
- $-4xyz + Apxy + Bxyz = -2xyz - 3pxy$

5. Un club de fútbol quiere rodear con cinta amarilla un terreno rectangular de lados $(3a + 11b)$ metros y $(8a - 5b)$ metros para señalar que en dicho lugar se construirá una cancha. Expresa en términos de a y b el largo de la cinta que se necesita para rodear el terreno.

6. **Desafío** En una prueba de álgebra, Raúl debe escribir una igualdad entre dos expresiones. Una de las respuestas que dio fue la siguiente:

$$3pq + 5pr - 2pz = (3q + 5r - 2z)p$$

- Explica el razonamiento de Raúl. ¿Son iguales ambas expresiones?
- Utiliza el procedimiento de Raúl para escribir una expresión equivalente a $5ab + 4ac - 7a$.



46 y 47

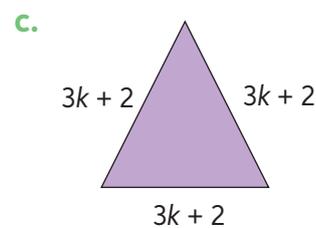
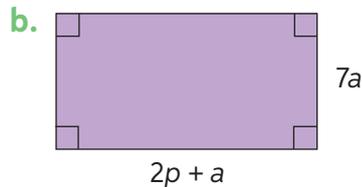
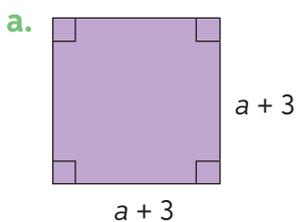
Para concluir

- ¿Qué característica deben tener los términos algebraicos para que se puedan reducir? Explica.
- Diseña una estrategia propia que te permita reducir términos semejantes evitando equivocaciones. En parejas, comenten.
- ¿Consideras que has aprendido de buena forma cómo reducir expresiones algebraicas? ¿Qué deberías reforzar?

Realiza las actividades dispuestas a continuación. Luego, responde las preguntas de la sección “Reflexiono”.

- Representa en lenguaje algebraico cada uno de los enunciados.
 - El triple de la suma de un número y dos.
 - La suma de x y su sucesor.
 - El tercio de un número t .
 - El cuádruple de la suma de las edades de Héctor y Julia.
 - El doble de la diferencia de p y 3.

- Calcula el perímetro de las siguientes figuras:



- Reduce las siguientes expresiones algebraicas:

a. $15f - 13g + 5 - 4f - 8g + 9$

c. $13 - 5m + 4n + (-2m) - 9n + 7$

b. $4v + 8 + 9p - 8v + (-4p) - 12$

d. $3ap + 9p - 6a - 10 + 4ap + 6a$

- Calcula el valor de las siguientes expresiones algebraicas:

a. $-x + 3x - 2$, si $x = 3$

c. $h + h - 3 + 2 - h$, si $h = 4$

b. $m + (m - 3)$, si $m = -5$

d. $p - 6 - p + 2$, si $p = 8$

- Representa las situaciones mediante expresiones algebraicas y resuélvelas.

- Esteban y Pedro juntaron el dinero para comprar una pelota que cuesta \$5000. Si Pedro tiene \$500 más que Esteban, ¿cuánto dinero tiene cada uno?
- Las edades de Camila, Luz y Pascal suman 90 años. Si Camila tiene 4 años más que Luz, y esta tiene 7 años más que Pascal, ¿cuál es la edad de Camila?
- Si la suma de tres números consecutivos es 60, ¿cuáles son esos números?
- Emilia planta 1200 m^2 de papas en su huerto, x de lechugas y aún tiene 500 m^2 sin plantar. Si el área del huerto es 3000 m^2 , ¿cuál es la superficie destinada a lechugas?

Reflexiono

- ¿Cómo afrontaste cada tema de la lección? ¿Qué cosas habrías hecho de diferente forma?
- Respecto a los temas de esta Lección, ¿de cuál te gustaría saber más? Fundamenta.



Razones y proporciones

Objetivo: Identificar y relacionar razones y proporciones.

¿Qué es una razón? ¿Qué recuerdas al respecto?
 ¿Cuándo dos cantidades son proporcionales?

1. Las siguientes imágenes están construidas a partir de razones.

En parejas, midan con una regla las siluetas en centímetros. Luego, respondan las preguntas considerando que las medidas de los dibujos están en las siguientes razones:

Cocodrilo	Elefante	Delfín
1 : 50	1 : 70	1 : 50

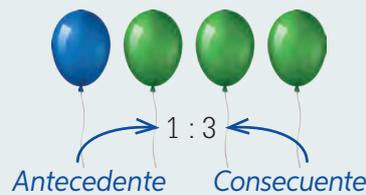


- ¿Cuánto mide el largo del cocodrilo? ¿Cuánto mide el largo del cocodrilo real?
 - ¿Cuánto mide la altura del elefante? ¿Cuánto mide la altura real del elefante?
 - ¿Cuánto mide el largo del delfín? ¿Cuánto mide el largo del delfín en la realidad?
 - Expresa la medida real de cada animal en metros. ¿Qué estrategia usaste para descubrirlo?
- ¿Qué animal es más grande en la vida real? ¿Cómo lo descubriste?

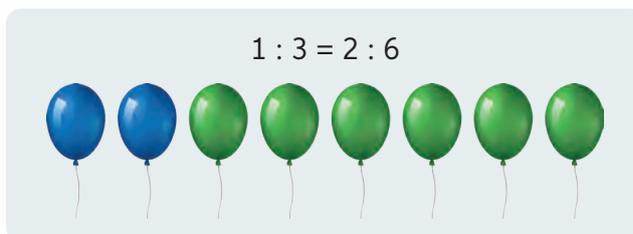
Una **razón** corresponde a la comparación de dos cantidades mediante un cociente (división). Puede ser expresada como $a : b$ o bien como $\frac{a}{b}$.

Por cada globo azul hay tres globos verdes.

Se expresa como $1 : 3$ y se lee "uno es a tres".



Esto quiere decir que en un conjunto de 8 globos, que están en la misma razón anterior, habrá dos globos azules y seis globos verdes.



Lección 8

2. A partir de los medios de transporte dados, representa la razón solicitada.



- Razón entre la cantidad de transportes marítimos y de transportes terrestres.
 - Razón entre la cantidad de transportes terrestres y de transportes aéreos.
 - Razón entre la cantidad de motocicletas y de aviones.
3. Analiza el siguiente enunciado y responde:

“En el curso de Rodrigo hay 16 mujeres y 22 hombres.”

- ¿Cuál es la razón entre el número de mujeres y el de hombres?
 - ¿Cuál es la razón entre hombres y mujeres?
 - ¿Cuál es la razón entre la cantidad de hombres y el total de estudiantes?
 - ¿Cuál es la razón entre el total de estudiantes y el total de mujeres?
- ¿Las razones de las preguntas a y b son iguales? ¿Por qué?
4. Cuatro amigos calculan que gastarán \$60000 en las entradas para un partido de fútbol. Si la cantidad de amigos que asistirá al partido aumenta al doble, ¿cuánto deberán gastar?, ¿y si asisten 11 amigos? ¿Cómo se puede modelar la relación entre el precio del total de las entradas y la cantidad de asistentes?

Una **proporción** corresponde a la igualdad entre dos razones. Si los valores de dos razones son iguales, entonces forman una proporción:

$$a : b = c : d$$

Valores extremos Valores medios

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $a : b = c : d$. En ambos casos se lee “a es a b como c es a d”.

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción, el producto de los valores extremos es equivalente al producto de los valores medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

5. En cada caso identifica si entre las variables es posible establecer una proporción. Comparen sus respuestas en parejas.
- La cantidad de años de una persona y la cantidad de familiares.
 - La cantidad de kilogramos de azúcar y el espacio que ocupan en un supermercado.
 - Horas de estudio para la prueba de Matemática y la calificación obtenida.
 - El número de los asistentes a un cine el día domingo y el dinero recaudado por el cine.
6. Resuelve los siguientes problemas:
- La razón entre niños y niñas del curso es $4 : 5$. Si hay 20 niños, ¿cuántas son las niñas?
 - La razón entre mesas y sillas de una oficina es $2 : 12$. Si hay 16 mesas, ¿cuántas sillas hay?
 - La razón entre la edad de un padre y su hijo es $8 : 3$. Si el padre tiene 40 años, ¿cuántos años tiene el hijo?
7. Identifica qué pares de razones corresponden a una proporción.
- $3 : 6 = 3 : 10$
 - $\frac{7}{5}$ y $\frac{14}{10}$
 - $4 : 3$ y $3 : 4$
 - $\frac{2}{8}$ y $\frac{4}{1}$
 - $6 : 18$ y $1 : 3$
 - $\frac{10}{4}$ y $\frac{20}{40}$
 - $4 : 12$ y $8 : 6$
 - $\frac{10}{25}$ y $\frac{2}{5}$

8. Analiza la situación y responde.

Las edades de Daniela y su madre son 9 y 36 años respectivamente.

- ¿Quién está en lo correcto?
- Justifica tu respuesta anterior.



Para concluir

- Organiza lo aprendido en un diagrama que te sirva para reforzar en el momento de la evaluación.
- ¿Por qué se establecen razones? ¿Cuándo es importante reconocer si dos razones están en proporcionalidad?
- ¿Qué estrategia te permitió determinar la proporcionalidad de dos razones? ¿Con qué operaciones se relacionan las razones?



Proporcionalidad directa

Objetivo: Modelar situaciones que involucren proporcionalidad directa.

¿Cómo averiguar el precio que se paga a medida que el número de artículos iguales que se compran aumenta?

¿Cómo podrías conocer el peso en la Tierra de un objeto a medida que su masa disminuye?

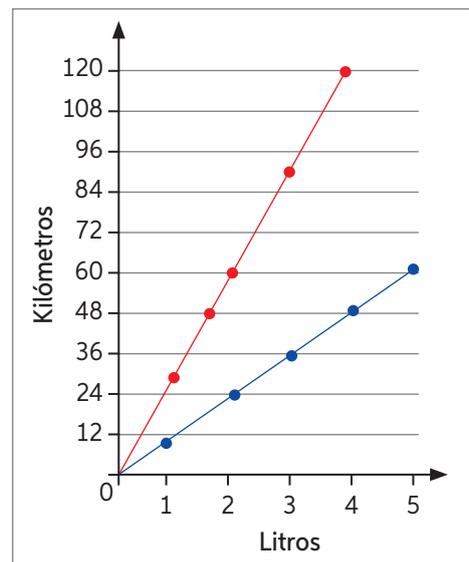
1. Joaquín desea comprar un vehículo, para lo cual evalúa el rendimiento de cada uno según la cantidad de kilómetros que puede recorrer con un litro de combustible.



- a. ¿Con qué vehículo puede recorrer una mayor distancia con un litro de combustible?
- b. ¿Con qué vehículo puede recorrer una mayor distancia con doce litros de combustible?

Para visualizar de mejor manera el rendimiento, decide confeccionar un gráfico. Analiza y responde.

- c. ¿Qué color representa el rendimiento de la motocicleta?, ¿y el del auto? ¿Por qué?
- d. ¿Cuántos kilómetros recorre cada vehículo con cinco litros de combustible?
- e. ¿Por qué ambos rendimientos son representados por líneas rectas?
- f. Reúnanse en parejas. Cada uno analice una recta del gráfico dividiendo la cantidad de kilómetros recorridos por la cantidad de litros utilizados. ¿Qué ocurre con los valores obtenidos?



Dos variables (x e y) son **directamente proporcionales** o están en proporción directa si, al aumentar (o disminuir) una en cierto factor, la otra aumenta (o disminuye) en el mismo factor. Es decir, el cociente entre sus valores relacionados es constante.

Lo anterior se puede representar con:

$$\frac{y}{x} = k \text{ (constante de proporcionalidad)}$$

La expresión que modela la proporcionalidad directa es: $y = k \cdot x$, con $x, y, k > 0$.

Toda proporción directa se puede representar en el plano cartesiano con una semirrecta que parte en el origen. Su inclinación (pendiente) dependerá de la constante de proporcionalidad.

2. Determina si los valores relacionados están en proporcionalidad directa. Compara tu elección con la de algún compañero.
 - a. La cantidad de personas que pagan su entrada a un evento y la ganancia obtenida.
 - b. La cantidad de libros iguales que contiene una caja y la masa de esta.
 - c. La edad del hermano mayor de Jorge, que tiene 5 años más que él.
 - d. La cantidad de máquinas que realizan un trabajo y el tiempo que tardarán en terminarlo.
 - e. La cantidad de minutos de una llamada y el valor que se paga.
3. Analiza las tablas y determina si las variables son directamente proporcionales. Para ello, calcula la constante de proporcionalidad. Guíate por el ejemplo.

x	y
1	3
2	6
3	9

$$3 : 1 = 3$$

$$6 : 2 = 3$$

$$9 : 3 = 3$$

Dado que el valor es constante, las variables están en proporción directa y la constante de proporcionalidad es 3.

a.

a	b
6	8
12	4
18	2

b.

c	d
6	1,5
4	1
10	2,5

c.

e	f
7	49
5	35
3	21

4. Las siguientes razones forman una proporción directa. Calcula el valor de cada incógnita.

$$\frac{4}{9} = \frac{x}{27}$$

$$4 \cdot 27 = 9 \cdot x \quad / : 9$$

$$\frac{4 \cdot \cancel{27}^3}{\cancel{9}} = 9 \cdot \frac{x}{9}$$

$$4 \cdot 3 = x$$

$$12 = x$$

a. $\frac{x}{3} = \frac{32}{24}$

b. $\frac{30}{x} = \frac{5}{42}$

c. $\frac{1}{8} = \frac{3}{x}$

d. $\frac{2}{9} = \frac{x}{54}$

Lección 8

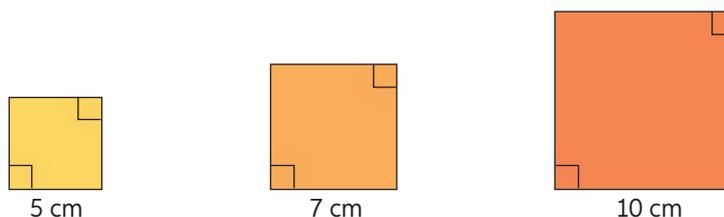
5. Revisa las ofertas de frutas y verduras y responde.



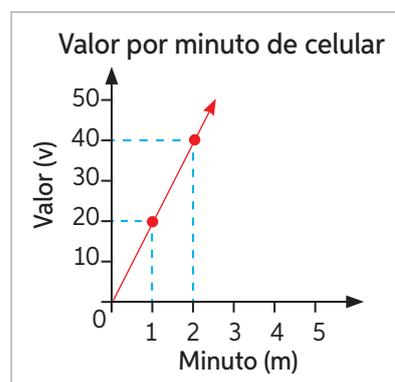
- ¿Cuál es el precio de 1 kg de cada producto?
 - ¿Cuál es el precio de 6 kg de frutillas?
 - ¿Cuál es el precio de 4 kg de tomates?
 - ¿Cuál es la constante de proporcionalidad de las manzanas?
 - En parejas, confeccionen una tabla en la que se pueda apreciar el valor de cada fruta o verdura desde 1 a 10 kilogramos.
- Un negocio ofrece un kilogramo de papas en \$550, dos kilogramos en \$1000 y tres kilogramos en \$1400. ¿Corresponde esto a una proporción directa? ¿Por qué?

Geometría

6. A partir de la información de cada cuadrado, responde.



- Construye una tabla en la que se indique la medida de los lados de cada cuadrado, su área y su perímetro.
 - ¿El perímetro de un cuadrado es directamente proporcional a la medida de sus lados?
 - ¿El área de un cuadrado es directamente proporcional a la medida de sus lados?
7. El siguiente gráfico corresponde a la tarifa que cobra una compañía de teléfonos según los minutos que se habla.
- ¿Cuánto se debe pagar por 100 minutos?
 - ¿Cuánto se debe pagar por 250 minutos?
 - ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
¿Qué representa?
- ¿Cuál es la manera más sencilla de reconocer una proporcionalidad directa? ¿Por qué el gráfico parte siempre en el origen?



8. Representa gráficamente la información entregada en la tabla y responde.
- ¿Corresponde a una proporcionalidad directa? ¿Por qué?
 - ¿Cuántos archivos ocuparán 560 GB?
9. Una empresa de camiones se dedica a enviar mercadería desde Cochrane a Caleta Tortel cada 15 días.

Archivos de igual tamaño en un disco duro	
Capacidad GB	Cantidad de archivos
0	0
80	16
160	32
240	48

- Si cuenta con tres camiones como el de la imagen, ¿cuántas toneladas de mercadería se puede enviar en 30 días?
- Confecciona una tabla y luego grafica la cantidad de toneladas de mercadería que son enviadas durante 120 días si se utilizan los tres camiones.



- Si en vez de enviar tres camiones solo se envía uno cada quince días, ¿se mantendrá la proporción? ¿Por qué?

10. Analiza la tabla que corresponde a las tarifas cobradas por dos estacionamientos.

Estacionamiento A		Estacionamiento B	
Nº Horas	Total a pagar	Nº Horas	Total a pagar
1	\$630	1	\$830
2	\$1260	2	\$1430
3	\$1890	3	\$2030
4	\$2520	4	\$2630
5	\$3150	5	\$3230

- ¿En qué estacionamiento la tarifa corresponde a proporción directa? Justifica.
- ¿Qué estacionamiento es más económico por 5 horas? Explica.
- ¿Qué estacionamiento es más económico al permanecer 7 horas? ¿Por qué?
- En parejas, confeccionen un gráfico para representar las tarifas de ambos estacionamientos.



50 y 51

Para concluir

- Imagina que debes explicar la proporcionalidad directa a una persona que no conoce nada del tema. ¿Cómo lo harías?
- ¿Qué utilidad tiene el conocimiento de la proporcionalidad directa y sus estrategias de cálculo en la vida diaria? Menciona 2 ejemplos.
- ¿Cómo evalúas tu desempeño a lo largo del tema? ¿Qué debes mejorar?

Proporcionalidad inversa

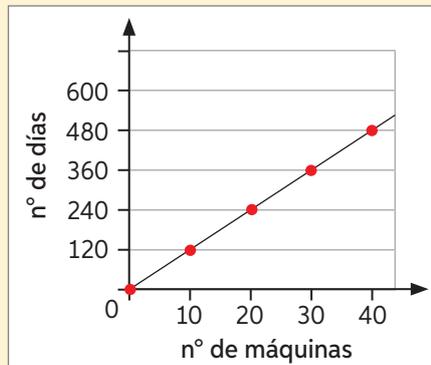
Objetivo: Modelar situaciones que involucren proporcionalidad inversa.

Si camino más rápido, ¿demoraré más o menos tiempo en recorrer una misma distancia?

1. En parejas, realicen la siguiente actividad:

Daniel está planificando el trabajo de su fábrica. Para calcular el tiempo que demoran diferentes cantidades de máquinas iguales en realizar un mismo trabajo, construye lo siguiente:

Cantidad de máquinas	Tiempo (días)
10	120
20	240
30	360
40	480



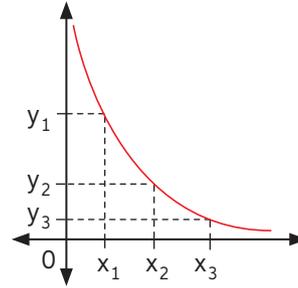
- ¿Qué error piensan que cometió Daniel?
 - Reflexionen sobre una forma de corregir la tabla considerando que, a mayor cantidad de máquinas, menor será el tiempo.
- Corrijan la tabla y respondan:
- ¿Cuántos días tardan 20 máquinas en realizar el trabajo?, ¿y 40?
 - ¿Cuántas máquinas se necesitan si se quiere terminar el trabajo en 20 días?
 - ¿Es posible terminar el trabajo en 30 días? ¿Por qué?
 - Si se aumenta al doble la cantidad de máquinas, ¿qué debería ocurrir con la cantidad de días que tarden en realizar el trabajo?
 - Grafiquen la información presente en la tabla que confeccionaron.
 - Analicen el gráfico obtenido: ¿qué diferencias existen entre el gráfico de una proporcionalidad directa y de una proporcionalidad inversa?

Dos variables (x e y) son **inversamente proporcionales** si, al aumentar (o disminuir) una de ellas en un cierto factor, la otra disminuye (o aumenta) en el mismo factor.

En toda **proporción inversa**, el producto de los valores es constante, es decir:

$$x \cdot y = k \Rightarrow \text{Constante de proporcionalidad}$$

El gráfico que representa la proporcionalidad inversa es una curva que no pasa por el origen ni interseca los ejes.



- Con respecto a la situación anterior: ¿cuál es su constante de proporcionalidad?, ¿qué representa?

2. Determina si las siguientes relaciones corresponden a una proporcionalidad inversa. Guíate por el ejemplo.

x	y	Constante de proporcionalidad
1	60	$1 \cdot 60 = 60$
2	30	$2 \cdot 30 = 60$
4	15	$4 \cdot 15 = 60$
5	12	$5 \cdot 12 = 60$

Dado que el producto de todos los pares de valores es igual, la relación entre las variables es inversamente proporcional.

a.

t	2	3	4	5
u	18	12	9	7,2

c.

r	22,5	20	15	10
s	2	2,5	3	4,5

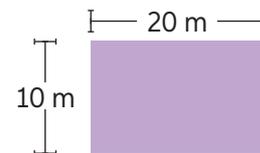
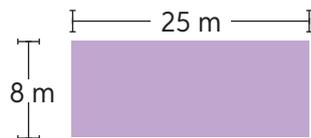
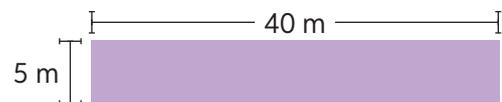
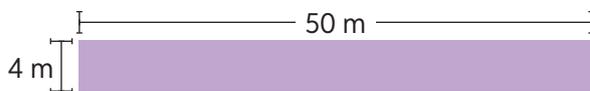
b.

p	90	92	94	96
q	4	6	8	10

d.

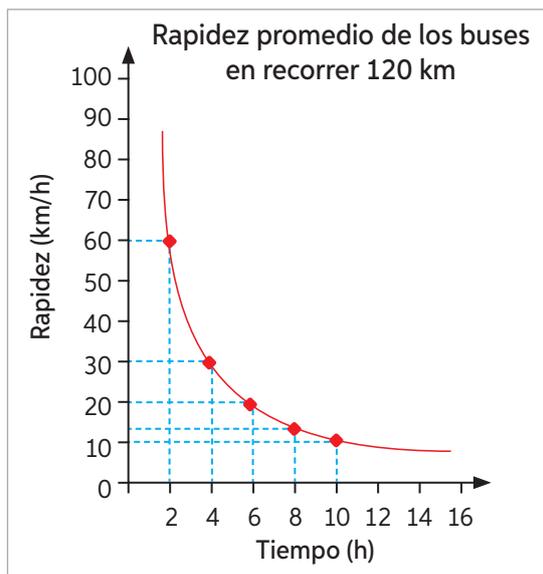
w	50	40	30	20
z	10	8	6	5

3. Gerardo quiere comprar una parcela. Los terrenos que le ofrecen tienen distintas medidas, pero la misma superficie. El presupuesto de Gerardo le alcanza para comprar un terreno rectangular de 200 m^2 , por lo que dibuja algunas posibles dimensiones del terreno.



- a. ¿Qué terreno posee una mayor superficie?
 b. ¿Qué ocurre con el largo del terreno a medida que aumenta su ancho?
 c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Qué representa?

4. Analiza el gráfico y responde.
- Si un bus se demoró dos horas, ¿a qué rapidez se desplazó?
 - Si un bus se demoró seis horas, ¿a qué rapidez se desplazó?
 - Si un bus se demoró diez horas, ¿a qué rapidez se desplazó?
- ¿Por qué crees que el gráfico de una proporción inversa es una curva?



5. Relaciona cada cambio con el efecto que se produce. Para ello, utiliza los números y las letras que acompañan cada situación. Guíate por el ejemplo.

1 Al triple de maquinarias. D La tercera parte del tiempo necesario para el trabajo.

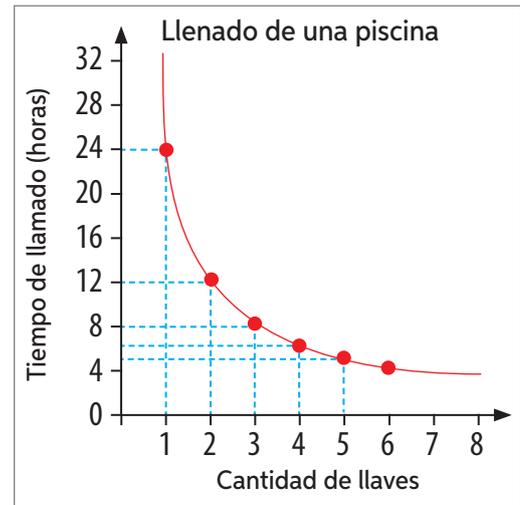
	Cambio
1	Al triple de maquinarias.
2	Al doble del tiempo para realizar el trabajo.
3	Al cuarto del largo del rectángulo.
4	A la mitad del contenido de los vasos.
5	Al cuádruple de bombas.
6	Al tercio de la presión del gas.
7	El quíntuple de personas.

	Efecto
A	La mitad de máquinas.
B	El doble de vasos necesarios.
C	El triple de tiempo necesario.
D	La tercera parte del tiempo necesario para el trabajo.
E	El doble de máquinas necesarias.
F	El cuádruple del ancho del rectángulo para la misma área.
G	El quíntuple del precio para cada persona.
H	Un cuarto del tiempo para vaciar la piscina.
I	El triple del volumen que ocupa el gas.

6. A partir de la tabla, responde.
- Confecciona un gráfico que represente la información.
 - Si se utilizan diez máquinas, ¿cuánto tiempo tardará en realizarse la obra?
 - ¿Se puede determinar con exactitud la cantidad de días que se demoran siete máquinas? ¿Por qué? En parejas, comparen sus respuestas.

Tiempo para realizar un pedido de bordado industrial	
Cantidad de maquinarias	Número de días
1	240
2	120
3	80
4	60

7. El siguiente gráfico representa la rapidez con la que se llena una piscina dependiendo de la cantidad de llaves abiertas.
- Determina las horas que tarda en llenarse la piscina si se abren 2, 3 o 4 llaves.
 - ¿Cuántos minutos se demorará en llenarse la piscina si se utilizan 5 llaves? En parejas, comparen sus respuestas.



8. Renata trabaja en una tienda de mascotas. Ella construye una tabla con la cantidad de alimento que deben dar a cada mascota y la cantidad de días que estos deberían durar si se siguen las instrucciones.

Tipo de alimento	Tamaño	Porción diaria (gramos)	Duración (días)
Alimento A 3 kg	Miniatura (2 – 5 kg)	100	30
	Pequeño (5 – 10 kg)	150	20
	Mediano (10 – 15 kg)	200	15
Alimento B 5 kg	Grande (15 - 25 kg)	250	20
	Grande (25 – 40 kg)	500	10
	Grande (40 – 55 kg)	625	8

- Si una persona compra 3 kg de alimento y tiene dos perros pequeños, ¿cuántos días le durará el alimento?
 - En un canil tienen 12 perros de raza grande que pesan entre 25 y 40 kg. ¿Cuántos sacos de alimento de 5 kg deben comprar para alimentarlos durante una semana?
 - Construye una tabla y grafica la duración de diez sacos de alimento de 3 kg para 1, 2, 3, 4, 5 o 6 perros de raza mediana. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta situación?
- ¿Por qué la cantidad de alimento varía según el tamaño del perro? ¿Será importante seguir estas indicaciones? ¿Por qué?



52 y 53

Para concluir

- Las variables x e y son inversamente proporcionales. Determina el cambio que se produce en cada caso con el valor de y si el valor de x disminuye a la mitad, si se triplica y si disminuye al 25%. Explica tu proceso paso a paso.
- ¿Cuál es la manera más sencilla de reconocer una proporcionalidad inversa? ¿Qué ocurre con el gráfico de una proporción inversa?
- ¿Podrías afirmar que aprendiste todo sobre proporcionalidad inversa? ¿Serías capaz de explicárselo a un compañero sin ayuda de tu texto? Inténtalo.

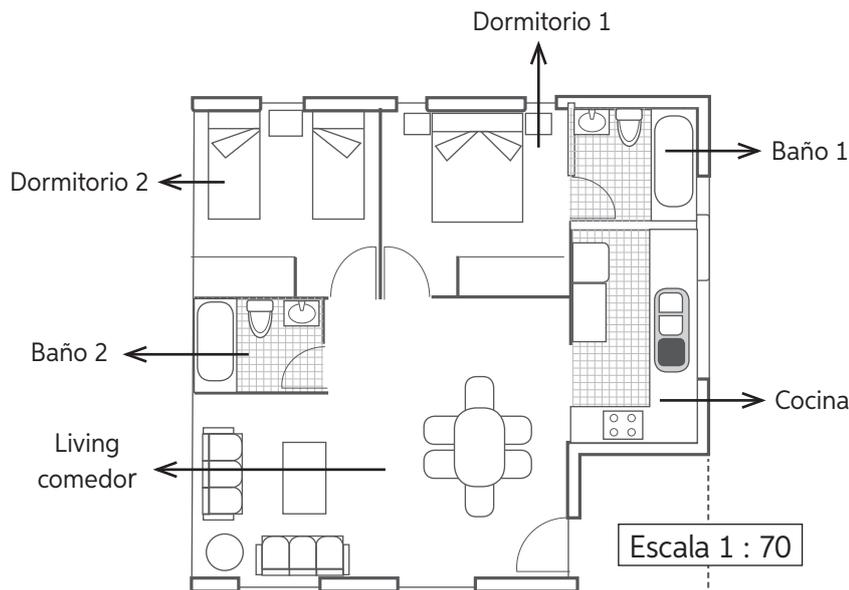
Aplicaciones de proporcionalidad

Objetivo: Resolver problemas aplicando proporcionalidad directa e inversa.

¿Qué características diferencian las proporciones directas de las inversas?

¿Qué tipo de proporcionalidad es más común?

1. Un arquitecto diseñó el plano de una casa utilizando una razón de 1 : 70 considerando las medidas en centímetros.



En parejas, midan el plano con una regla para responder las siguientes preguntas con respecto al tamaño real de la casa.

- a. ¿Cuáles son las medidas del largo y del ancho de la casa?
¿Qué forma tiene?
- b. ¿Cuáles son las dimensiones del dormitorio 2? ¿Cuál es su superficie?
- c. ¿Cuáles son las dimensiones de la cocina? ¿Cuál es su superficie?
- d. Si la escala fuese de 1 : 80, ¿en cuántos m^2 aumentaría la superficie?
- e. Si dos máquinas en tres horas pulirán el piso de la casa antes de entregarla a sus dueños, ¿cuánto demorará una sola máquina en realizar el mismo trabajo?

Recuerda que:

En toda **proporción directa** se cumple que:

$$\frac{y}{x} = k \text{ (constante de proporcionalidad)}$$

La expresión que modela la proporcionalidad directa es: $y = k \cdot x$, con $x, y, k > 0$.

Y en toda **proporción inversa** se cumple que:

$$x \cdot y = k \text{ (constante de proporcionalidad)}$$

2. Representa gráficamente la información de cada tabla. Luego, indica si las magnitudes son directa o inversamente proporcionales. Justifica tu elección.

a.

Dinero recaudado por la venta de entradas	
Cantidad	Dinero
5	\$25 000
7	\$35 000
10	\$50 000

b.

Dimensiones de un cuadrado de área 12 m^2 .	
Ancho	Largo
1	12
2	6
4	3

3. Resuelve los siguientes problemas e identifica si la relación corresponde a una proporcionalidad directa o inversa. Justifica tu elección.
- Un juego de cuatro dados tiene un valor de \$1500. ¿Cuál es el valor de cada dado si todos cuestan lo mismo?
 - Si dispongo de una cantidad fija de dinero para comprar 50 vasos de \$120, ¿cuántos vasos puedo comprar si estos aumentan en \$30?
 - Un auto viaja 2 horas a una rapidez constante de 50 km/h. ¿En cuánto tiempo realiza el mismo recorrido si aumenta su rapidez a 80 km/h?
 - Una partícula avanza hacia la derecha 10 m por cada segundo; mientras que otra, partiendo del mismo punto pero hacia la izquierda, avanza 20 m por segundo. ¿Cuánto tiempo ha pasado hasta que la distancia entre ellas es 600 m?
 - 12 retroexcavadoras pueden realizar un trabajo en 7 días. ¿Cuánto tiempo tardan en realizar el mismo trabajo 14 retroexcavadoras en iguales condiciones?
 - Un ciclista recorre 12 kilómetros en media hora. Ahora debe aumentar la distancia a 18 kilómetros en el mismo tiempo ¿Qué ocurre con la velocidad?
 - Francisco cría ovejas y tiene alimento suficiente para alimentar su rebaño de 50 ovejas durante 8 días. Si le piden que con la misma comida alimente su rebaño y otro de 30 ovejas, ¿cuántos días podrá hacerlo manteniendo la porción?
 - 120 máquinas embotelladoras demoran 30 días en embotellar lo necesario para 4 embarques de bebida de igual tamaño. ¿Cuántas máquinas se necesitarán para embotellar 6 embarques iguales a los anteriores en 60 días?

Para concluir

- Explica en qué se parecen y en qué se diferencian las gráficas de la proporcionalidad directa y de la proporcionalidad inversa.
- ¿Qué estrategia te permitió determinar el tipo de proporcionalidad de la relación entre variables?
- ¿Tu desempeño en este tema fue el adecuado?, ¿qué deberías mejorar?



Realiza las actividades dispuestas a continuación.

- Calcula la constante de proporcionalidad e identifica si son directa o inversamente proporcionales. Luego, grafica los datos de cada tabla.

a.

a	b
4	2
3	1,5
2	1

b.

c	d
14	2
10,5	1,5
7	1

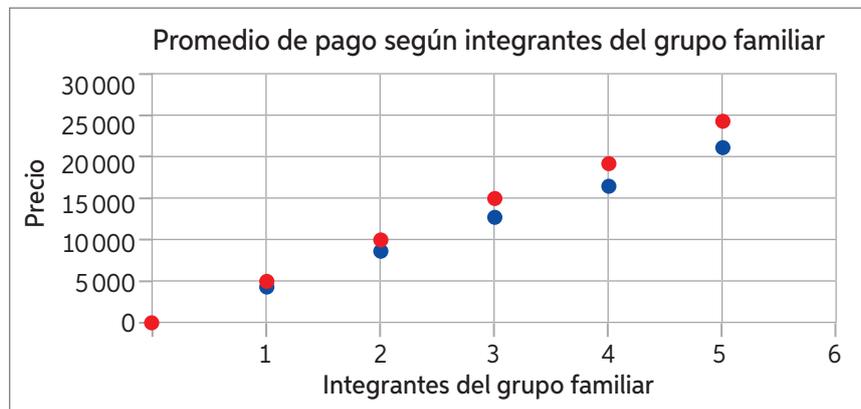
c.

x	y
3	5
6	2,5
10	1,5

d.

m	n
4	4,25
3,4	5
2	8,5

- Interpreta el gráfico y responde:



- ¿En qué empresa se paga más por cada integrante de la familia?
 - ¿En qué empresa se paga menos por cada integrante de la familia?
 - ¿Qué empresa es más conveniente para una familia que tiene cinco integrantes? ¿Por qué?
- Resuelve los problemas.
 - Las variables X e Y son directamente proporcionales. Cuando $X = 24$, $Y = 16$; entonces, si $Y = 22$, ¿cuál es el valor X ?
 - Para ir desde un lugar a otro, un móvil demora 60 segundos (s) a una rapidez constante de 5 m/s. Si su rapidez aumentara a 8 m/s, ¿cuánto tiempo demoraría en recorrer la misma distancia?
 - Sean P y Q variables inversamente proporcionales. Si cuando $P = 25$, $Q = 4$, ¿cuál es el valor de Q cuando $P = 3$?

Reflexiono

- Si te pidieran explicar los contenidos tratados en la lección de relaciones proporcionales a una persona que no conoce el contenido, ¿qué te costaría más explicar? Fundamenta tu respuesta.



Ecuaciones

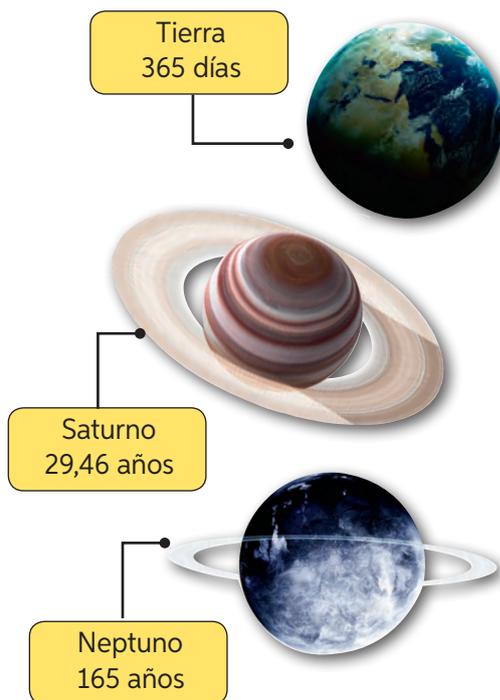
Objetivo: Resolver ecuaciones utilizando métodos gráficos y algebraicos.

Recuerda tus aprendizajes de años anteriores. ¿Cómo se resuelve una ecuación?

¿En qué contextos cotidianos es posible plantear una ecuación para resolver un problema?

Astronomía

1. El periodo orbital corresponde al tiempo que demora un astro en completar su órbita. A continuación, se presentan los periodos orbitales de algunos planetas.
 - a. Si dos veces el periodo orbital de Venus disminuido en 85 días es igual al periodo orbital de la Tierra, ¿cuál es el periodo orbital de Venus?
 - b. Si el periodo orbital de Marte disminuido en 322 años es igual al periodo orbital de la Tierra, ¿cuál es el periodo orbital de Marte?
 - c. Si dos veces el periodo orbital de Mercurio aumentado en 49 días es igual al periodo orbital de Venus, ¿cuál es el periodo orbital de Mercurio?
 - d. Si al sumar el periodo orbital de Saturno y Urano se obtiene el periodo orbital de Neptuno disminuido en 51,54 años. ¿cuál es el periodo orbital de Urano?
- ¿Qué ocurre con el periodo orbital de los planetas a medida que se alejan del Sol? ¿Por qué crees que ocurre esto?

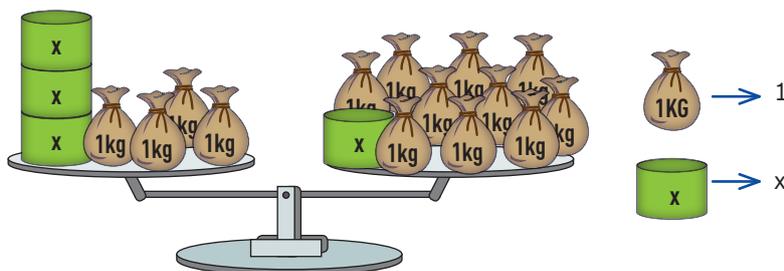


Una **ecuación** es una igualdad que contiene uno o más valores incógnitos, llamados variables. Dichos valores se pueden representar con una letra cualquiera, que llamaremos **incógnita**. Por ejemplo: "Al sumar un número a 12, se obtiene 50" se puede representar con la ecuación $x + 12 = 50$.

Al despejar la incógnita de una ecuación, esta se resuelve.

2. Observa la siguiente balanza en equilibrio y la información adicional.

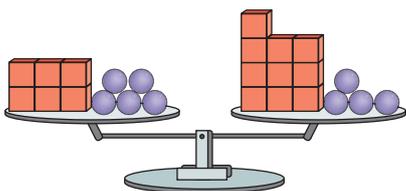
Recuerda que, para resolver ecuaciones con balanzas, debes quitar o agregar lo mismo de cada plato de la balanza.



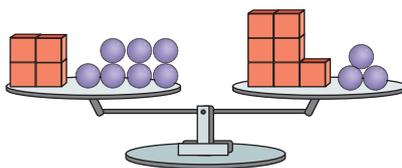
- a. ¿Qué ecuación está representada en la balanza? ¿Cuál es la masa de cada cilindro?

3. Determina en cada caso a cuántas esferas equivale un cubo.

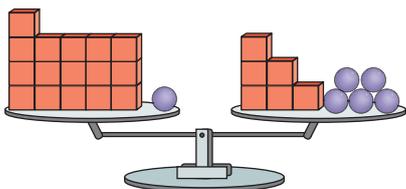
a.



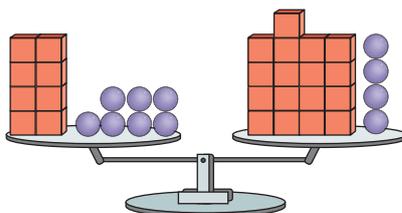
c.



b.

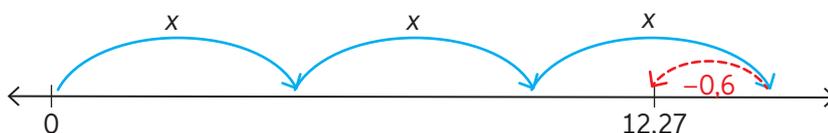


d.



4. Graciela participó en una competencia de triple salto. Sus tres saltos fueron de la misma longitud, pero en el último apoyó las manos al caer atrás de su cuerpo, por lo que perdió 0,6 metros. Graciela alcanzó 12,27 metros en total en esa prueba.

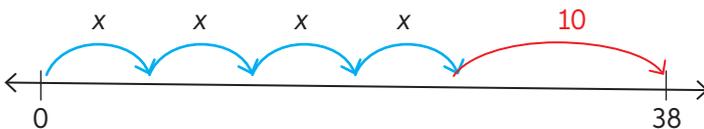
Para representar la situación Felipe, dibuja la siguiente recta numérica:



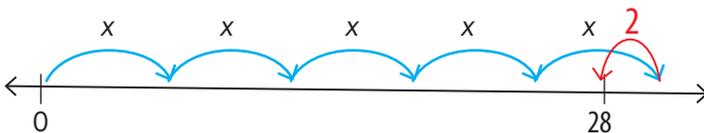
- ¿Es correcta la representación de Felipe? ¿Por qué?
- ¿Cuánto midió cada uno de sus tres saltos sin considerar el retroceso? ¿Qué ecuación te permitió averiguarlo?
- Si no hubiese apoyado sus manos en el último salto, ¿qué distancia habría alcanzado?

5. Indica la ecuación representada en cada recta y calcula el valor de la incógnita.

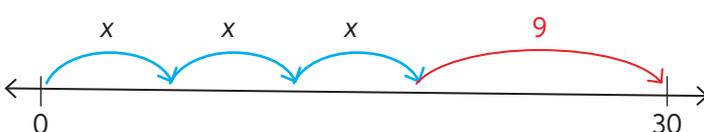
a.



b.



c.



6. Resuelve las ecuaciones representándolas en una balanza o una recta numérica:

a. $3x + 4 = 13$

c. $5x + 9 = 8x + 1$

e. $6x + 4 = 3x + 10$

b. $7x + 1 = 16$

d. $5x + 2 = 7$

f. $4x - 7 = 6$

Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita de forma simbólica consiste en encontrar el valor de la incógnita que valida o que hace que se cumpla la igualdad. Para hacerlo, debes considerar que, al sumar, restar, multiplicar o dividir la misma cantidad en ambos miembros de una igualdad, esta se conserva. Observa la resolución:

$a + bx = c \quad / - a$ $a - a + bx = c - a$ $bx = c - a \quad / : b$ $x = \frac{c - a}{b}$	$\frac{x}{a} = b \quad / \cdot a$ $\frac{x \cdot a}{a} = b \cdot a$ $x = ba$	$ax = b \quad / : a$ $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ $x = \frac{b}{a}$
--	--	---

7. Resuelve las ecuaciones con la estrategia anterior.

a. $5x + 12 = 37$

d. $8x - 19 = 45$

b. $9x = 7x + 24$

e. $\frac{x}{4} + 7 = 32$

c. $2x + 7 = 13$

f. $3 = 8x - 1$

8. Resuelve los problemas planteando una ecuación.

- a. El padre de Sandra tiene 43 años, 4 años más que el triple de la edad de Sandra. ¿Cuál es la edad de Sandra?
- b. Nicolás tiene 30 años menos que su padre y este tiene 4 veces la edad de él. ¿Cuál es la edad de cada uno?
- c. La suma de 4 números es 90. El segundo número es el doble del primero; el tercero es el doble del segundo y el cuarto, el doble del tercero. ¿Cuáles son los números?
- d. La suma de 3 números consecutivos es 66. ¿Cuáles son los números?

9. **Desafío** En la ecuación $ax = b$, con $b = 10$, ¿qué valores debería tomar a para que la solución de la ecuación sea un número natural? Fundamenta tu respuesta con ejemplos.

Para concluir

- a. Utilizando un organizador gráfico, resume las estrategias de resolución de ecuaciones (balanzas, recta numérica y operaciones inversas). Utiliza ejemplos en tu explicación.
- b. ¿Por qué es importante saber representar ecuaciones?, ¿en qué las utilizas?
- c. ¿Qué contenido crees que debes reforzar? Construye un plan de repaso y ejecútalo.



56 y 57

Inecuaciones

Objetivo: Representar y resolver inecuaciones.

¿Es correcto decir que las inecuaciones tienen una única solución?

¿Por qué las inecuaciones se relacionan con las desigualdades?

1. El curso de Cristina organiza una rifa para reunir fondos y realizar un paseo a final de año. Para comprar los premios se invirtieron \$45 000.



- a. ¿Cuántos números se deben vender como mínimo para generar ganancias una vez descontado lo utilizado para los premios? ¿Qué inecuación te permite descubrirlo?
- b. ¿Cuántos boletos se deben vender para obtener una ganancia mayor que \$90 000?
- c. ¿Cuántos boletos se deben vender para obtener una ganancia mayor que \$150 000?
- d. ¿Qué ocurre si el curso de Cristina solo logra vender 30 boletos? ¿Por qué?

Recuerda que una **inecuación** es una desigualdad en la que al menos uno de sus términos es desconocido.

Para plantear inecuaciones, debes recordar lo siguiente:

- Un número a es menor que $b \Rightarrow a < b$
- Un número a es menor o igual que $b \Rightarrow a \leq b$
- Un número a es mayor que $b \Rightarrow a > b$
- Un número a es mayor o igual que $b \Rightarrow a \geq b$

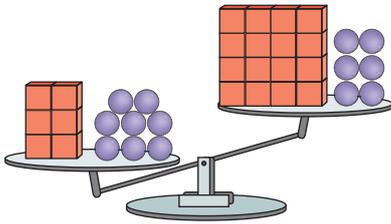
Resolver una inecuación es encontrar todos los valores que la hacen verdadera. A esto lo llamaremos conjunto solución de la inecuación y lo representaremos con una expresión. Observa el ejemplo:

$$\begin{aligned} x + 2 &< 40 && / + (-2) \\ x + 2 + (-2) &< 40 + (-2) \\ x &< 38 \end{aligned}$$

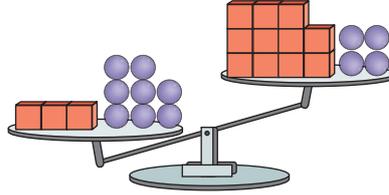
El conjunto solución de la inecuación son todos los números menores que 38.

2. Escribe la inecuación representada en cada balanza. Considera que cada esfera es la incógnita y cada cubo representa una unidad.

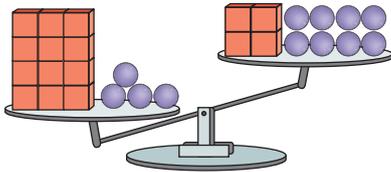
a.



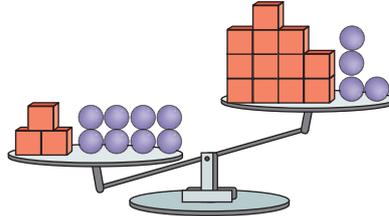
c.



b.



d.



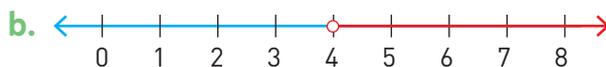
3. Resuelve cada inecuación de la actividad anterior despejando la incógnita y utilizando operaciones inversas.
- ¿Qué diferencia habrá en la solución de una inecuación si esta se plantea en \mathbb{N} o en \mathbb{Z} ?
 - ¿Cómo representarías la solución de una inecuación de forma gráfica?

El conjunto solución de una inecuación puede ser expresado en forma gráfica utilizando una recta numérica. Observa:

$$\frac{2z}{3} - 6 \geq 2 \Rightarrow z \geq 12$$



4. Indica la inecuación representada en cada recta numérica.



- ¿Por qué debes fijarte en el círculo que inicia la flecha?

Lección 9

Construcción

5. Analiza la situación y responde.

La pluma es un tipo de grúa utilizada en la construcción, que permite elevar materiales (cemento, fierros, etc.) a grandes alturas. A un lado de la pluma debe colocarse un contrapeso, es decir, un peso que permita mantener la fuerza que la pluma va a ejercer.



Jorge maneja una grúa pluma que solo puede elevar pesos inferiores al de su contrapeso. Para elevar 17 toneladas, puso en el contrapeso 3 barras de hormigón de igual masa, atadas con una cadena de 2 toneladas. ¿Cuál es la masa mínima de cada barra de hormigón? Representa el conjunto solución en una recta numérica.

6. Resuelve.

a. $100 < 70 + 2w$

c. $5x + 1 > 26$

e. $x + \frac{2}{3} > \frac{5}{3}$

b. $5h - 10 < 10$

d. $6y + 6 > 6$

f. $4x + 4 > x + 16$

7. Utiliza Wolfram Alpha® para comprobar las inecuaciones de la actividad 6. Luego, observa cada una de las gráficas y escribe 5 números que sean solución de cada inecuación.

Para acceder a Wolfram Alpha® digita el código **T20M7BP104A** en www.enlacesmineduc.cl

8. Comprueba si los valores dados pertenecen al conjunto solución de la respectiva inecuación.

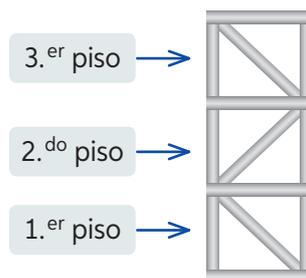
a. $x = 3$; en $3x + 7 > 10$

c. $x = 1$; en $2x - 7 < 0$

b. $x = 0$; en $40 + 10x > 50$

d. $x = 0,1$; en $0,1x + 0,1 > 0,01$

9. Jorge debe montar una estructura metálica con barras de acero, como se muestra en el dibujo. ¿Cuántos pisos puede tener como máximo la estructura si no debe utilizar más de 100 barras de acero?



10. **Desafío** Se tiene la inecuación $x + 2 < 4$. Si se consideran solo los valores de x que sean números naturales, ¿por qué x tiene un único valor? ¿Es posible representar la solución en una recta numérica?

Para concluir

- a. Describe con tus palabras la forma de resolver una inecuación y representar su conjunto solución.
- b. ¿Qué consideraciones debes tener al momento de representar el conjunto solución de una inecuación de forma gráfica?
- c. ¿Cómo evalúas tu desempeño en este tema? Fundamenta tu respuesta.



58 y 59

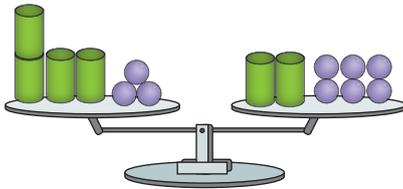
Antes de continuar

Evaluación intermedia

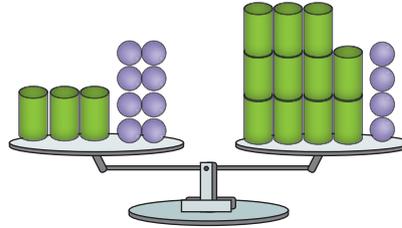
Realiza las actividades dispuestas a continuación.

1. Escribe la ecuación representada en cada balanza. Luego, en cada caso, determina a cuántas esferas equivale un cilindro.

a.

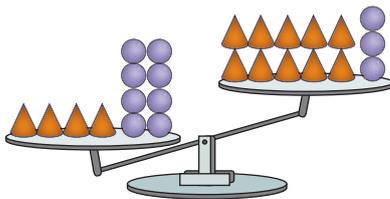


b.

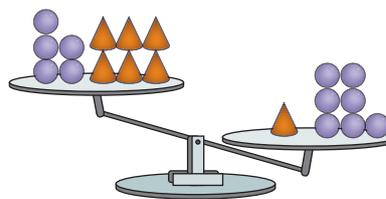


2. Escribe la inecuación representada en cada balanza. Para ello, considera que las esferas son la incógnita y los conos son las unidades. Luego, resuelve cada inecuación expresando el conjunto solución en una recta numérica.

a.



b.



3. Resuelve las ecuaciones.

a. $90x + 115 = 25x + 635$

b. $12x + 25 = 7x + 85$

c. $\frac{3}{5}x + 12 = 2x - 3$

d. $18x + 49 = 140 + 5x$

e. $150 + 26x = 11x + 420$

f. $\frac{1}{8}x + 56 = 4x + 140$

4. Resuelve las inecuaciones y escribe al menos cinco valores que sean parte de la solución.

a. $8x + 11 < 39$

b. $\frac{7}{21} + 7x > 21$

c. $5x - 3 < 37$

d. $11x - 10 > 45$

e. $4x - 17 < 3$

f. $\frac{x}{4} + 8 < 17$

5. Escribe todas las soluciones posibles que respondan al siguiente problema:

¿Cuál puede ser la medida del largo de una cerámica rectangular de ancho 5 cm si su área debe ser menor que 80 cm^2 ?

Reflexiono

- Evalúa tu aprendizaje escribiendo una lista con los contenidos de la Lección que te resultaron más sencillos. Luego, realiza un plan de mejora para aquellos contenidos que no estaban en tu listado.



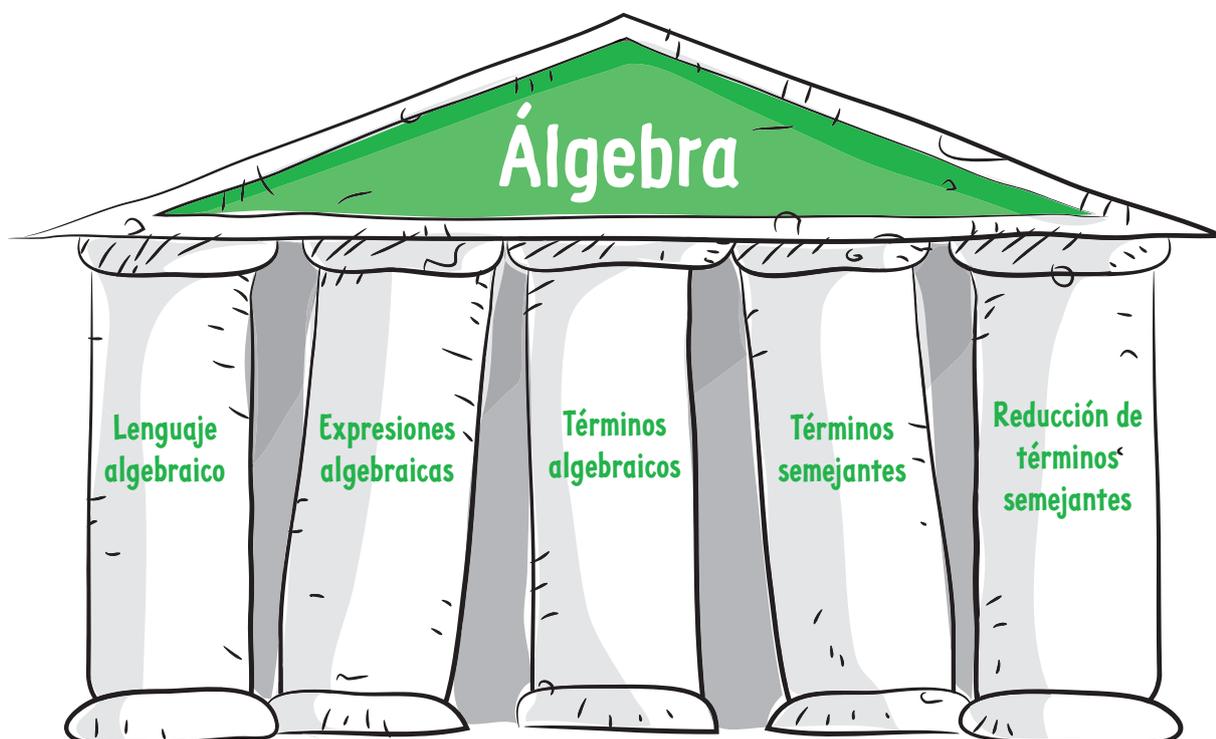
60

Síntesis

¿Qué es una mesa de idea principal?, ¿y un templo del saber?

Ambos son organizadores gráficos, que muestran la idea principal y sus detalles. Para construirla, se escribe la idea principal en la superficie de la mesa o el techo del templo y los detalles en las patas o los pilares, según corresponda.

Observa el templo del saber que muestra algunos de los contenidos de la Unidad.



Ahora, hazlo tú

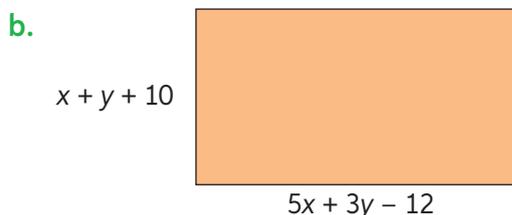
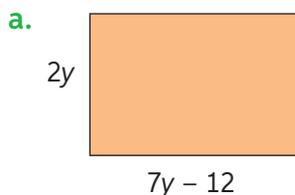
1. Observa el diagrama: ¿puedes agregar columnas al templo?, ¿cuáles?
2. Crea una mesa o un templo de alguna lección de la Unidad 2.
3. En parejas, compartan y analicen el organizador creado: ¿qué aspecto consideró cada uno para crear su síntesis?, ¿qué semejanzas y diferencias hay entre sus esquemas?

Repaso

Realiza las siguientes actividades.

Lección 7: Lenguaje algebraico

1. Indica el perímetro de cada rectángulo. Luego, valoriza considerando $x = 4$ e $y = 3$.



2. Reduce las expresiones algebraicas.

- a. $6x + 4y - 2z + 5x - 18y + 9z$
 b. $-4pq + 4rs - 5pq - 12rs$
 c. $15f - 13g + 5 - 4f - 8g + 9$
 d. $7bc + 15bd + 4bc - 12bd$

Lección 8: Relaciones proporcionales

3. El siguiente gráfico representa el tiempo necesario (y) para fabricar una determinada cantidad (x) de piezas de un computador.



- a. ¿Cuál es la expresión que relaciona la cantidad de piezas con el tiempo necesario para fabricarlas?

- b. ¿Cuánto tiempo se necesita para fabricar 30 piezas?

4. Calcula los valores desconocidos en la tabla de proporciones inversas. Luego, confecciona el gráfico correspondiente.

a.

M	10	12	a
N	6	b	0,1

b.

P	8	40	a
Q	b	2	16

5. Luis es operador telefónico y debe llamar a clientes de un banco para entregarles una información. Su jefa dice que, si sus llamados duran 5 minutos, alcanza a llamar a 60 clientes en el día.

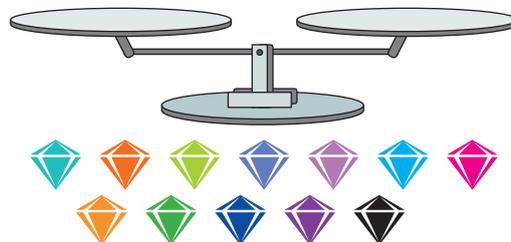
- a. ¿Cuántos llamados podría hacer si cada uno durara 2 minutos?
 b. Si en el mismo tiempo quisiera hacer 260 llamados, ¿cuál debería ser la duración de cada llamado?

Lección 9: Ecuaciones e inecuaciones

6. Resuelve.

a. $20 = 10 + \frac{x}{5}$ c. $15 = 20 + 15k$
 b. $h + 5 < 23$ d. $\frac{x}{3} \leq 7$

7. Un orfebre tiene 12 piedras preciosas, iguales en forma y tamaño. De ellas, 11 tienen la misma masa y una tiene mayor masa. Para compararlas, tiene una balanza con dos platillos.



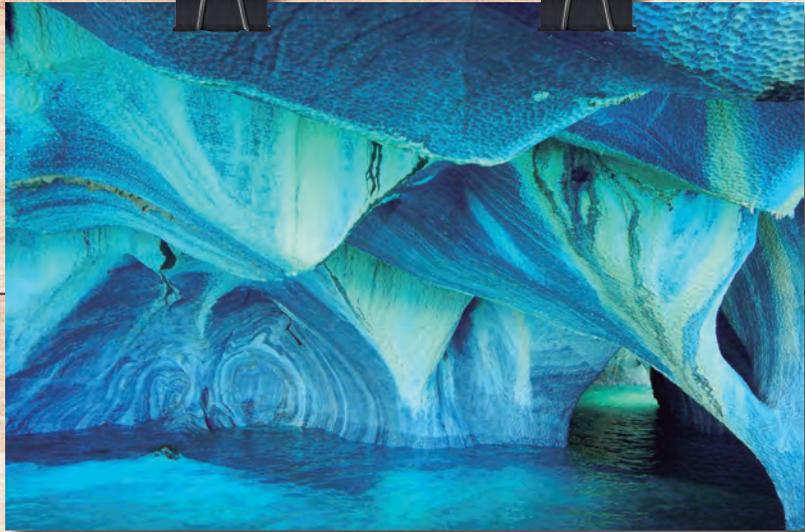
- a. ¿Cómo puede saber el comerciante cuál es la piedra más pesada utilizando solo tres veces la balanza?

¿Qué aprendí?

1



2



Practica

Realiza las actividades basadas en la imagen principal.

- Para un concurso de fotografía, Mariel presenta su trabajo en distintos tamaños.
 - Mide los lados de las fotografías.
 - ¿Cuál es la razón entre el largo y el ancho de cada fotografía?
 - ¿Se puede afirmar que la fotografía 1 y la fotografía 2 son proporcionales?, ¿y la 3 con la 4?, ¿Por qué?
 - ¿Es posible afirmar que todas las fotografías son proporcionales entre sí?
- El jurado del concurso analiza algunas fotografías y confecciona la siguiente tabla:

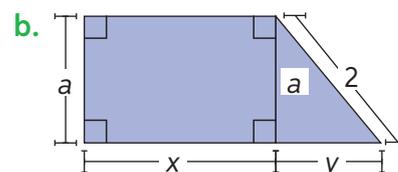
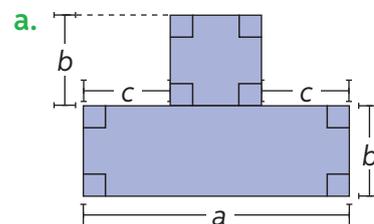
Largo	Ancho
15 cm	10 cm
60 cm	40 cm
75 cm	50 cm
105 cm	70 cm

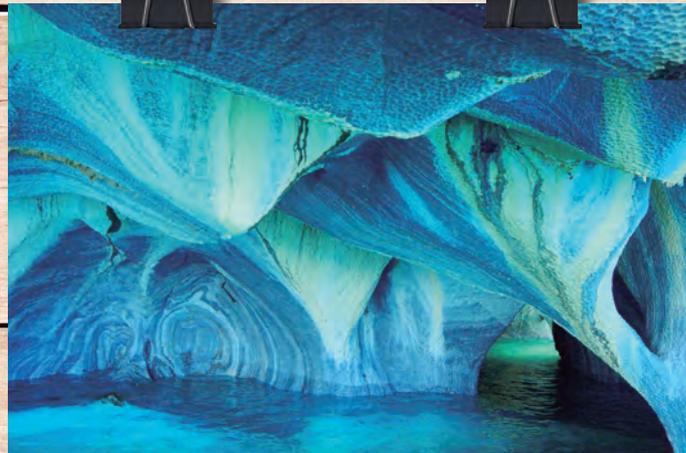
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Cómo lo descubriste?

- Indica al menos dos medidas de fotografías que mantengan la misma proporcionalidad.

Realiza las siguientes actividades:

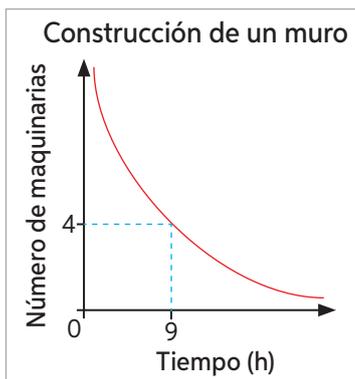
- Expresa cada situación en lenguaje algebraico.
 - La edad de Daniel es igual al doble de la edad de Mariana disminuida en 6.
 - El perímetro de un triángulo aumentado en 12.
 - Un número aumentado en su sucesor.
- Representa el perímetro de cada una de las siguientes figuras:





^Capilla de mármol–Lago General Carrera. Región de Aysén del General Carlos Ibáñez del Campo. Fotografía: Arlette Verdejo.

5. El gráfico representa la cantidad de maquinarias que se necesitan para construir un muro en un tiempo determinado.



- a. ¿Qué tipo de proporcionalidad está representada en el gráfico?
 b. ¿Cuál es la constante?

- c. Si se quiere terminar el trabajo en 12 horas, ¿cuántas máquinas deberían participar en la construcción?

6. Resuelve planteando una ecuación o una inecuación según corresponda.
- a. Hace 10 años, la edad de Nicolás era el triple de la edad de Vicente. Si hoy Vicente tiene 15 años, ¿cuál es la edad de Nicolás actualmente?
- b. Si un número x se lo multiplica por mil y se le restan 250, el resultado es mayor que 1000. ¿Qué números cumplen con esa condición? Menciona cinco.

Reflexiono

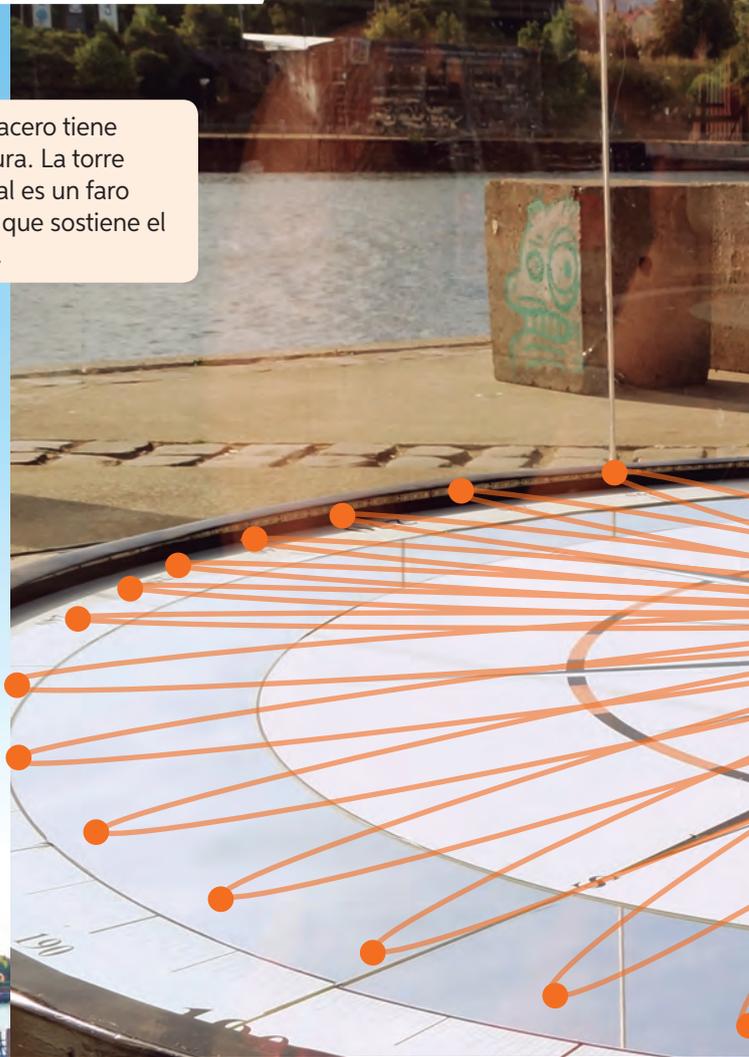
- ¿Qué fortalezas y debilidades lograste observar al rendir esta evaluación?
- ¿Tuvieron buenos resultados tus planes de mejora propuestos en las evaluaciones intermedias?
- ¿Qué tan interesante te resultó esta Unidad? ¿Para qué crees que es útil aprender sus contenidos?

3

Geometría



La estructura de acero tiene 20 metros de altura. La torre de base octagonal es un faro reacondicionado que sostiene el péndulo esférico.



El péndulo de Foucault más austral del mundo se encuentra ubicado en Valdivia, en la Región de Los Ríos. Mediante la oscilación, el péndulo recorre la base y, una vez que se completa el ciclo de oscilación, se completa una circunferencia. Con ello se demuestra la rotación de la Tierra y las consecuencias físicas de dicho movimiento.

Analiza las imágenes y responde.

1. Crea una lista con las figuras 2D que observas en las imágenes. Crea otra lista con las figuras 3D que reconozcas.
2. ¿Qué tipo de rectas se ven en la estructura de Valdivia?
3. ¿Todos los ángulos de la estructura metálica son de 90° ? ¿Por qué?
4. ¿Es posible calcular el área de la base de la estructura con los datos presentados? Justifica tu respuesta.



¿A qué se asemeja la figura formada por la unión de los puntos de la imagen?

Para comprobar, ingresa a www.enlacesmineduc.cl y digita T20M7BP111A.

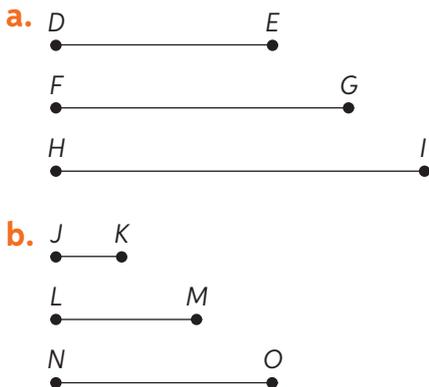
Como puedes observar, existen diversas figuras geométricas, rectas y ángulos que has estudiado con anterioridad. En esta unidad, se profundizarán esos conocimientos y conocerás elementos de la circunferencia y el círculo, además de los elementos notables del triángulo.

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para recordar lo que has aprendido anteriormente.

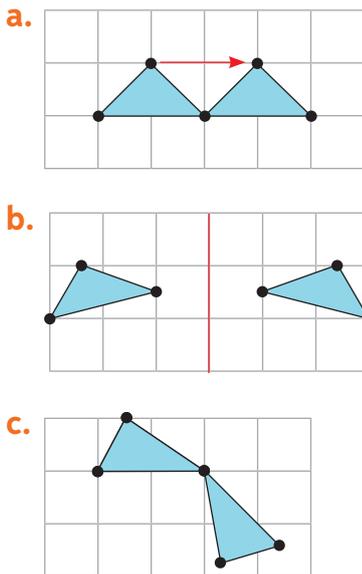
Construcción de triángulos

1. Mide los segmentos y responde: ¿con cuál(es) de los siguientes tríos se puede formar un triángulo? ¿Por qué?



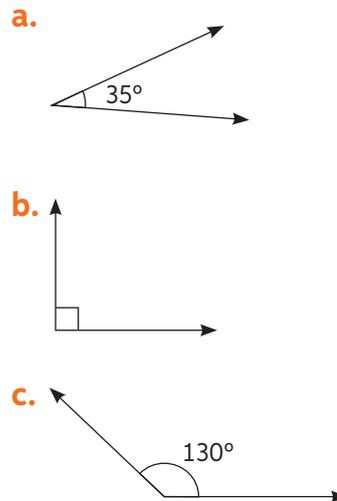
Traslaciones, reflexiones y rotaciones

2. Identifica la transformación isométrica presente en cada imagen y describe en qué consiste cada una de ellas.



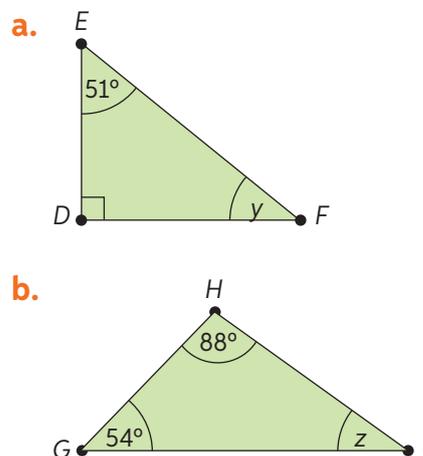
Clasificación de ángulos según medidas

3. Clasifica los ángulos y describe brevemente cada categoría de clasificación.



Suma de ángulos interiores de triángulos

4. En los siguientes triángulos, determina las medidas de los ángulos representados con letras minúsculas.



Reflexiono

- ¿Qué actividad te costó menos desarrollar?
- ¿Qué temas crees que debes reforzar para enfrentarte en buenas condiciones a esta Unidad?

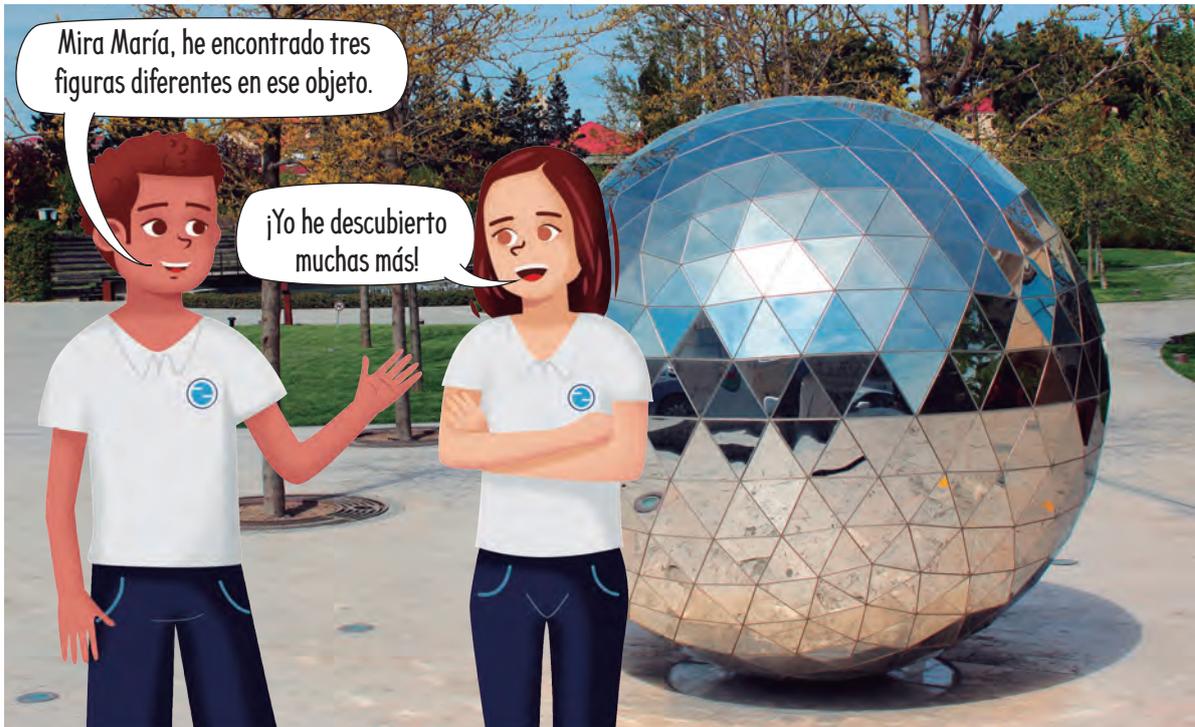
Polígonos

Objetivo: Clasificar polígonos de acuerdo con el número de lados y tipo de ángulos que los conforman.

¿Qué son los polígonos?, ¿cuáles conoces?

Mira a tu alrededor. ¿Qué polígonos reconoces?

1. Analiza la situación y realiza las actividades.



Y tú, ¿qué figuras ves?

- En parejas, dibujen las figuras que reconocieron.
- ¿Cuáles corresponden a polígonos? ¿Cuáles son sus nombres?
- Si les dijeran que los polígonos se clasifican en regulares e irregulares, ¿cómo clasificarían los polígonos dibujados?, ¿por qué?

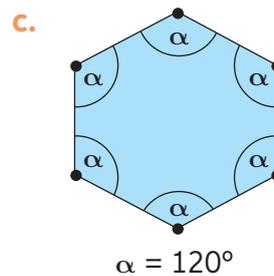
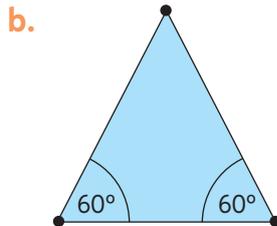
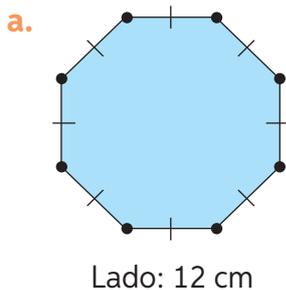
Se llaman **polígonos** las figuras formadas por tres o más segmentos de recta que las limitan. Los **polígonos regulares** son aquellos cuyos lados y ángulos son de igual medida, es decir, son “equiláteros” (lados iguales) y “equiángulos” (ángulos iguales). Los **irregulares** son aquellos que no poseen estas características.

Los polígonos se nombran según el número de lados que tengan:

3 ⇒ Triángulo	7 ⇒ Heptágono	11 ⇒ Endecágono
4 ⇒ Cuadrilátero	8 ⇒ Octágono	12 ⇒ Dodecágono
5 ⇒ Pentágono	9 ⇒ Eneágono	19 ⇒ Eneadecágono
6 ⇒ Hexágono	10 ⇒ Decágono	20 ⇒ Icoságono

Lección 10

- En parejas, investiguen y respondan las siguientes preguntas:
 - ¿Cómo se nombran los polígonos de 13, 14, 15, 16, 17 y 18 lados?
 - Mientras más lados tenga un polígono regular, ¿a qué figura se asemeja?
- Nombra y clasifica los siguientes polígonos como regulares o irregulares, e identifícalos con su nombre. Luego, justifica tu respuesta.



➤ En la actividad **b**, ¿qué otro nombre crees que recibe dicho triángulo?

- Analiza la siguiente información. Luego, resuelve las actividades propuestas.
Los triángulos se clasifican según la cantidad de lados de igual medida que tengan:

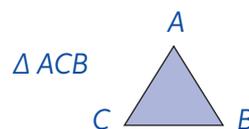
\triangle Escaleno	\triangle Isósceles	\triangle Equilátero

Y según la medida de los ángulos interiores:

 $\alpha, \beta \text{ y } \theta < 90^\circ$	 $\theta, \beta < 90^\circ \text{ y } \alpha > 90^\circ$	 $\delta + \alpha = 90^\circ$
\triangle Acutángulo	\triangle Obtusángulo	\triangle Rectángulo

- Dibuja 6 triángulos sin considerar medidas.
- Usando regla y transportador, registra las medidas de los lados y ángulos.
- Clasifica los triángulos dibujados.

Un triángulo (\triangle) se nombra con las letras de los puntos de los vértices que lo limitan, por ejemplo:



5. En parejas, discutan y respondan las siguientes preguntas:

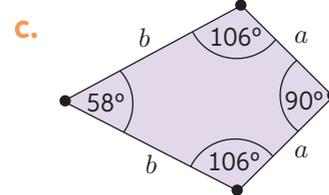
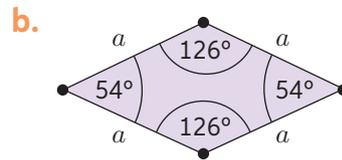
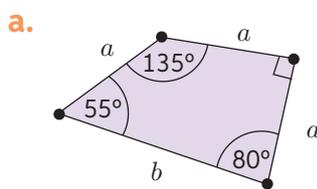
- ¿Un triángulo equilátero es siempre acutángulo?, ¿y un acutángulo es siempre equilátero? Justifiquen.
- ¿Se puede construir un triángulo rectángulo escaleno? Justifiquen.

Para practicar, ingresa a www.enlacesmineduc.cl y digita **T20M7BP114A**. Luego, haz clic en 7° básico e ingresa a clases de triángulos.

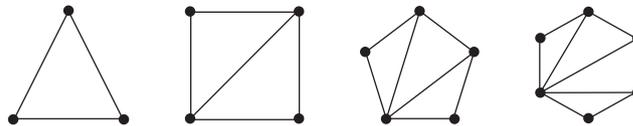
6. Investiga sobre las características de los polígonos de la tabla y resume tu investigación en un organizador visual.

Paralelogramos	Trapecios	Trapezoides
Tienen 2 pares de lados opuestos paralelos.	Tienen un par de lados opuestos paralelos.	No tienen lados paralelos.
Cuadrado Rectángulo Rombo Romboide	Trapezio isósceles Trapezio escaleno Trapezio rectángulo	Trapezoide simétrico Trapezoide asimétrico

7. Clasifica los siguientes cuadriláteros. Justifica y calcula la suma de las medidas de sus ángulos interiores.



8. **Desafío** Reúnanse en parejas y observen los siguientes polígonos. Luego, respondan las preguntas.



- ¿Qué relación existe entre los lados de los polígonos y la cantidad de triángulos que se pueden dibujar en su interior al trazar líneas desde un vértice a sus vértices opuestos?
- ¿Cuántos triángulos se pueden trazar de igual forma en polígonos de 10, 12, 15 y 20 lados? Verifiquen sus resultados dibujando.



61

Para concluir

- ¿Cuáles son los dos criterios principales para clasificar polígonos? Descríbelos.
- ¿En qué situaciones es útil lo aprendido sobre polígonos? Nombra 2.
- ¿Qué puedes hacer para recordar lo aprendido sobre los polígonos? Crea una estrategia.

Ángulos en polígonos

Objetivo: Determinar la medida de los ángulos interiores y exteriores de los polígonos.

¿Cuánto miden los ángulos interiores de un cuadrado?, ¿y de un triángulo?

¿Podrías utilizar estas medidas para conocer las medidas angulares de otros polígonos?

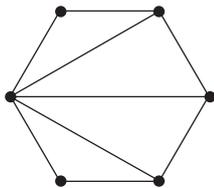
1. Analiza la situación y responde las preguntas.

Se necesita construir una base aislante para un piso de una carpa con forma de hexágono regular cuyo lado mide 140 cm. Para ello, se deben conocer las medidas de los ángulos interiores de la base de la carpa.

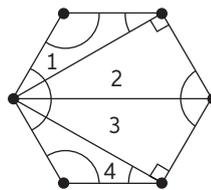


a. Analiza el proceso seguido.

1.º Se trazaron diagonales desde un vértice dividiendo la base de la carpa en triángulos.

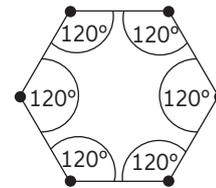


2.º Se sumó 180° tantas veces como triángulos hay trazados dentro de la figura.



$$180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$$

3.º Se dividió la suma total de los ángulos de la figura en la cantidad de ángulos que la conforman.



$$720^\circ : 6 = 120^\circ$$

- b.** ¿Por qué se debe sumar 180° por cada triángulo al interior del polígono?
- c.** ¿Por qué, en este caso, se dividió la suma total de los ángulos de la figura para obtener la medida de cada ángulo interior? Explica.
- d.** Si las medidas de los lados fueran distintas entre sí, ¿sería útil el paso 3?
- e.** Si la carpa tuviese 5 lados de 130 cm cada uno, ¿cuál sería la medida de cada ángulo interior de la base?
- f.** Calcula la suma de la medida de los ángulos interiores de un cuadrado, un heptágono y un octógono regular realizando la descomposición en triángulos.

La suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier polígono de n lados se obtiene aplicando la siguiente expresión matemática:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

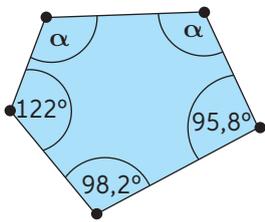
➤ Verifica el resultado de los ejercicios anteriores aplicando la expresión.

2. Calcula la suma de las medidas de los ángulos interiores de los siguientes polígonos:
- Decágono.
 - Octágono.
 - Dodecágono.
 - Pentadecágono.
 - Icoságono.
 - Polígono de 100 lados.
- ¿Qué harías para saber la medida de un ángulo interior de un dodecágono regular? Describe tu procedimiento.

La medida de cada ángulo interior de un polígono regular de n lados se obtiene aplicando la siguiente expresión matemática:

$$\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

3. Determina la medida de cada ángulo interior de los siguientes polígonos:
- Cuadrado.
 - Hexágono regular.
 - Heptágono regular.
 - Nonágono regular.
 - Icoságono regular.
 - Polígono regular de 50 lados.
- ¿A qué medida tiende cada ángulo interior a medida que se aumenta el número de lados?
4. Determina las medidas incógnitas de los siguientes polígonos irregulares. Observa el ejemplo.

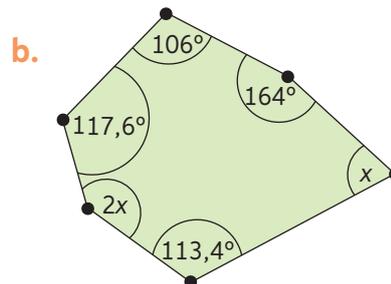
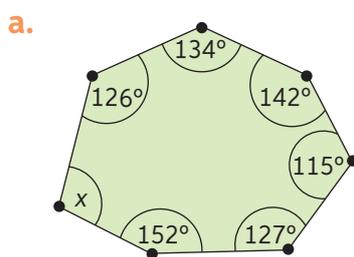


$$\alpha + \alpha + 122^\circ + 95,8^\circ + 98,2^\circ = 540^\circ$$

$$2\alpha + 316^\circ = 540^\circ$$

$$2\alpha = 224^\circ$$

$$\alpha = 112^\circ$$

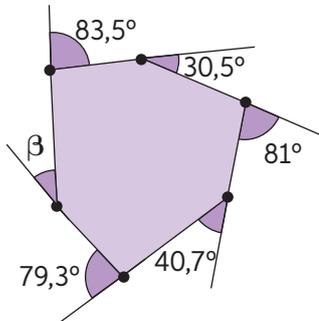


- ¿Cómo calcularías la medida de un ángulo exterior de cualquier polígono? Explica tu procedimiento y compártelo con un compañero.
- Replica los polígonos de **a** y **b** y traza sus ángulos exteriores. Luego, mídelos con transportador y suma sus medidas. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono?

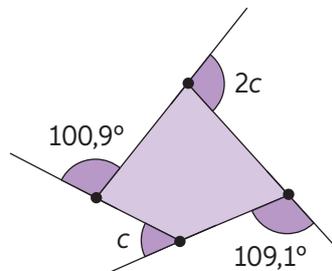
La suma de las medidas de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360° .

5. Determina las incógnitas de los ángulos exteriores de los siguientes polígonos:

a.

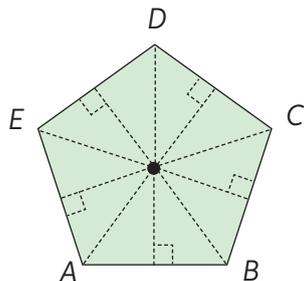


b.

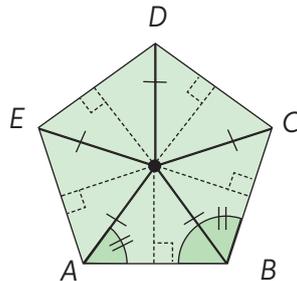


6. Analiza el procedimiento y responde.

1.º Determinar el centro trazando segmentos perpendiculares desde un vértice al punto medio del lado opuesto.

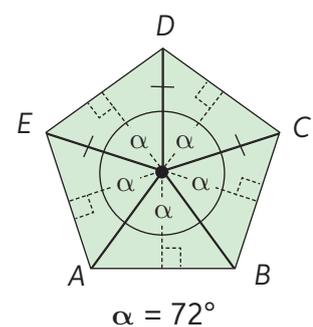


2.º Trazar segmentos desde el punto centro a cada vértice del polígono. Esto dividirá la figura en triángulos isósceles.



3.º Dividir los 360° centrales en la cantidad de ángulos del centro. Ejemplo:

$$360 : 5 = 72^\circ$$



4.º Hallar la medida de cada ángulo basal de los triángulos isósceles. Esto permitirá identificar la medida del ángulo interior del polígono y la suma de estos.

a. Determina la medida del ángulo central, de las bases de los triángulos isósceles en que se dividen y de los ángulos interiores de los polígonos regulares de 6 y 10 lados.

b. Explica el procedimiento que utilizaste para poder determinarlas.



62 a 64

Para concluir

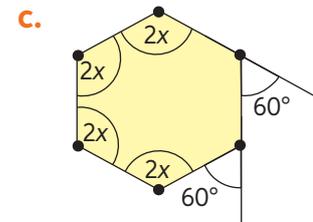
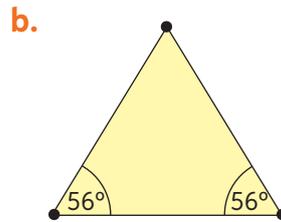
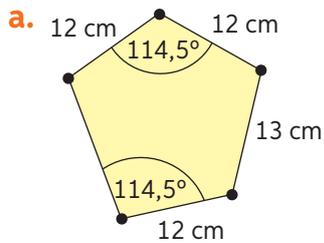
- En un polígono regular de 17 lados ¿cuánto mediría uno de sus ángulos interiores y exteriores? Explica detalladamente el procedimiento utilizado.
- ¿Cómo podrías recordar siempre los procedimientos vistos en el tema?
- ¿Qué usos podrías dar a los contenidos aprendidos en el tema?

Antes de continuar

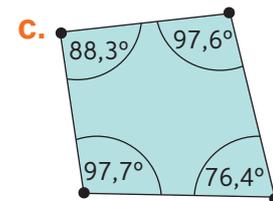
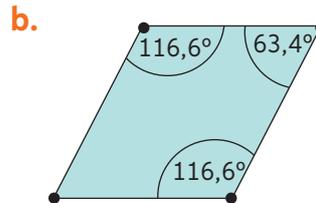
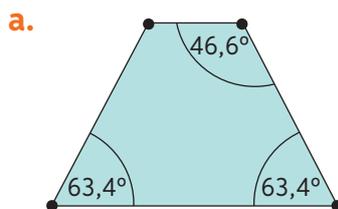
Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Clasifica los siguientes polígonos como regulares o irregulares, determinando las medidas incógnitas de ser necesario. Justifica tu respuesta.



2. Clasifica los siguientes cuadriláteros:



3. Determina las medidas de cada ángulo interior y exterior de los siguientes polígonos regulares:

a. Triángulo

c. Pentágono

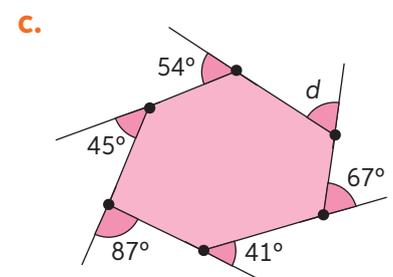
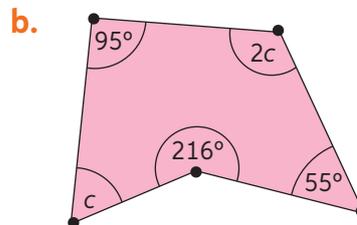
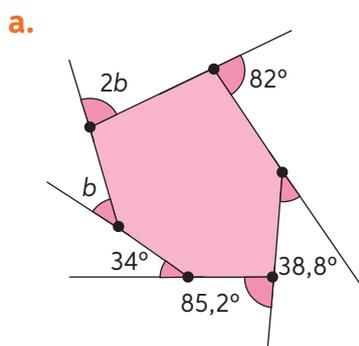
e. Dodecágono

b. Cuadrilátero

d. Hexágono

f. Octadecágono

4. Determina las incógnitas en los siguientes polígonos:



Reflexiono

- Respecto de las actividades de esta página, ¿cuál te pareció más fácil? ¿Por qué crees que fue así? Fundamenta.
- ¿Qué contenidos debes reforzar? Para hacerlo, busca las definiciones en este texto y construye un esquema que resuma los contenidos débiles.



65

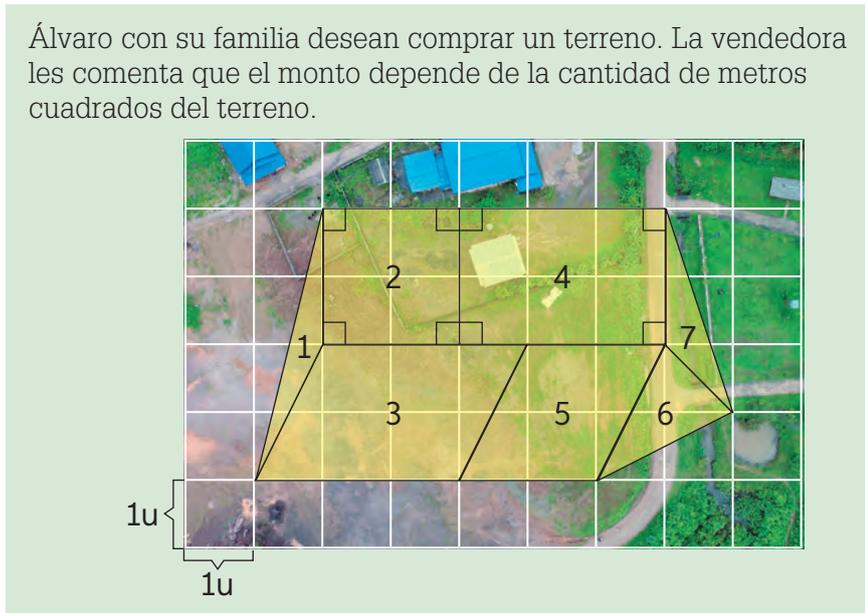
Área de paralelogramos

Objetivo: Determinar área de paralelogramos en el contexto de la resolución de problemas.

- ¿Qué recuerdas de los paralelogramos? Menciona 3.
¿Recuerdas cómo calcular el área del cuadrado?

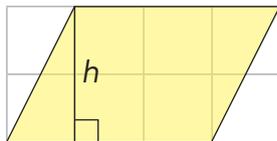
1. Analiza la situación y realiza las actividades propuestas.

Álvaro con su familia desean comprar un terreno. La vendedora les comenta que el monto depende de la cantidad de metros cuadrados del terreno.

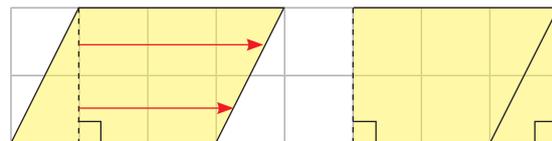


- a. ¿A qué tipo de polígono corresponde cada terreno? Enuméralos.
b. ¿Qué terrenos cuestan lo mismo? Justifica tu respuesta.
c. ¿Cuál crees que es el terreno más barato?, ¿y el más caro? Justifica.
2. Observa el procedimiento para calcular el área del terreno 3. Luego, realiza las actividades propuestas.

Paso 1: Dibuja el polígono en una hoja cuadrículada. Luego, traza la altura (h) desde un vértice hacia la base.



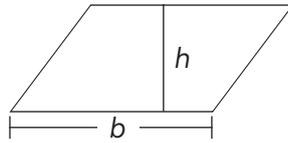
Paso 2: Recorta el triángulo formado con la altura y trasládalo como se indica en la imagen. Cuenta las unidades cuadradas que contiene el paralelogramo.



- ¿Servirá este procedimiento para otros paralelogramos? Explica.
- a. Utiliza el mismo procedimiento para calcular el área del terreno 5.
b. ¿Crees que existe otra forma de calcular el área de un paralelogramo? Explícala.

El área (A) de un paralelogramo de base b y altura h es:

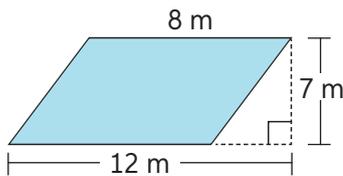
$$A = b \cdot h$$



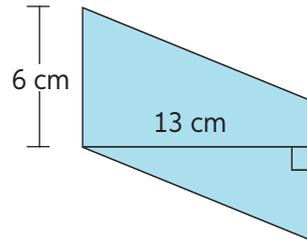
- ¿Podrías calcular el área de la cubierta de tu mesa del colegio?, ¿y el área de la pizarra? Explica.
- ¿Es posible que dos polígonos de igual base tengan la misma área? ¿Cuál es la condición? Reúnete con un compañero y prueben con distintos polígonos.

3. Determina el área de los siguientes paralelogramos utilizando la fórmula propuesta.

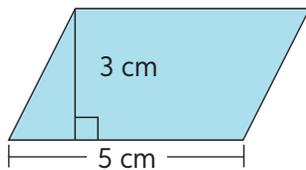
a.



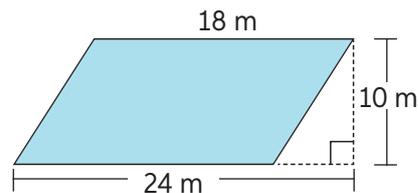
c.



b.



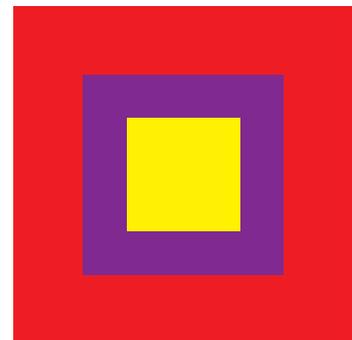
d.



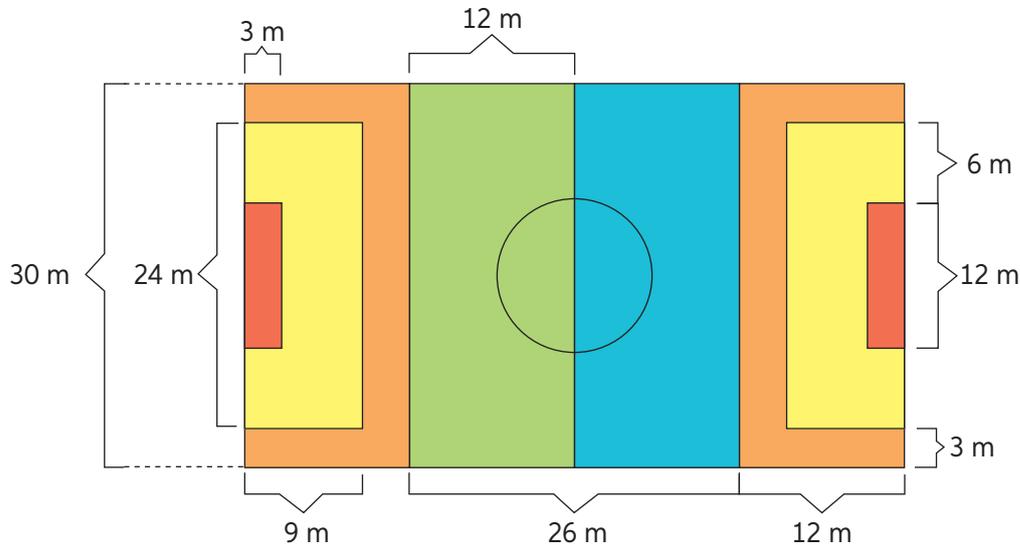
- ¿Cuál crees que es el propósito del aprendizaje del cálculo del área de distintos paralelogramos? Explica.

4. El siguiente es el piso de la entrada de una escuela. Las cerámicas de colores están dispuestas en cuadrados de modo tal que el cuadrado mayor tiene un lado de 15 m, el mediano de 9 m y el pequeño de 5 m.

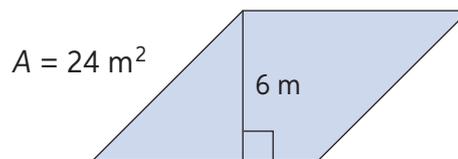
- a. ¿Cuál es la medida de la superficie correspondiente al color amarillo?
- b. ¿Cuál es la medida de la superficie de color morado? Explica el procedimiento utilizado.
- c. ¿Cuál es el área de la superficie roja?
- d. Si cada caja de cerámicas contenía 3 m^2 de cada color, ¿cuántas cajas se necesitaron para cubrir cada color de la entrada de la escuela?



5. La junta de vecinos decidió pintar sobre el pavimento una cancha de fútbol 7 para los niños de la villa. Analiza el esquema y responde considerando que los sectores del mismo color son simétricos.



- ¿Cuál es la medida de la superficie de la cancha?
 - ¿Qué área se pintará de cada color?
 - Si la pintura que se utilizará rinde 9 m^2 por litro, ¿cuántos litros de pintura de cada color serán necesarios?
 - Si los tarros de pintura que se utilizarán son de 4 litros y tienen un valor de \$12 000, ¿cuántos tarros de pintura se necesitarán? ¿Cuánto dinero se gastará en adquirirlos?
6. Sigue los pasos y resuelve las actividades a continuación:
La siguiente figura es un paralelogramo, del cual se conoce su área y la medida de su altura, pero se desconoce la medida de la base.



Paso 1: Reemplaza los datos en la expresión:

$$A = b \cdot h \Rightarrow 24 = b \cdot 6$$

Paso 2: Determina el valor de la incógnita por medio de la resolución de ecuaciones:

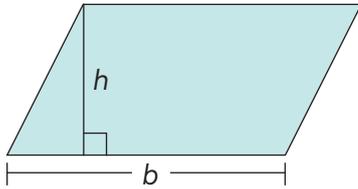
$$\begin{aligned} 24 &= b \cdot 6 & /: 6 \\ \frac{24}{6} &= \frac{b \cdot 6}{6} \\ 4 &= b \end{aligned}$$

El lado b mide 4 m.

De esta manera, es posible determinar la medida de lados incógnitos conociendo el área y la medida de la base o la altura.

Si A es el área de cada paralelogramo, determina las medidas faltantes de cada figura.

a.

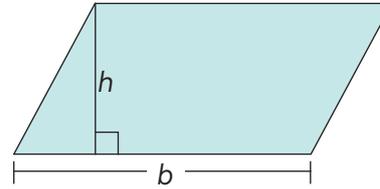


$$A = 115 \text{ cm}^2$$

$$h = 5 \text{ cm}$$

$$b = \blacksquare \text{ cm}$$

b.

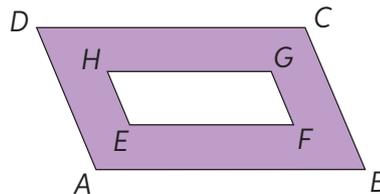


$$A = 126 \text{ cm}^2$$

$$h = \blacksquare \text{ cm}$$

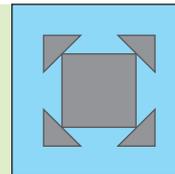
$$b = 18 \text{ cm}$$

7. Las figuras $ABCD$ y $EFGH$ son paralelogramos y sus alturas son 12 cm y 5 cm respectivamente. Si sus bases respectivas miden 18 cm y 10 cm, ¿cuál es el área de la región morada?



8. **Desafío** En parejas, lean el enunciado del siguiente problema geométrico, respondan las preguntas y describan el procedimiento utilizado para responder cada una de ellas.

La imagen tiene un cuadrado celeste de lado 16 cm, uno gris de lado 4 cm y cuatro triángulos congruentes entre sí, con los cuales puedes formar la superficie del cuadrado gris si es que los unes.



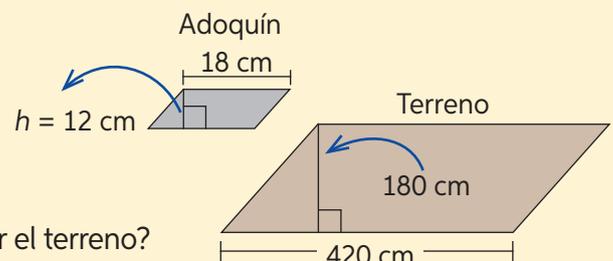
- ¿Cuánto mide la superficie gris de la imagen?
- ¿Cuánto mide la superficie celeste de la imagen?
- ¿Cuánto mide la superficie de cada uno de los triángulos de la figura?



66 y 67

Para concluir

- Se quiere completar el terreno con adoquines grises como el que se muestra.
 - ¿Qué área cubre el adoquín?
 - ¿Qué superficie tiene el terreno?
 - ¿Cuántos adoquines se necesitan para cubrir el terreno?
- ¿En qué situaciones de tu vida el calcular áreas de paralelogramos podría ser útil? Menciona tres.
- A lo largo del tema, ¿qué actividad te resultó más difícil de realizar?, ¿por qué?, ¿cómo pudiste superar esa dificultad? En parejas, compartan sus reflexiones.



Área de triángulos

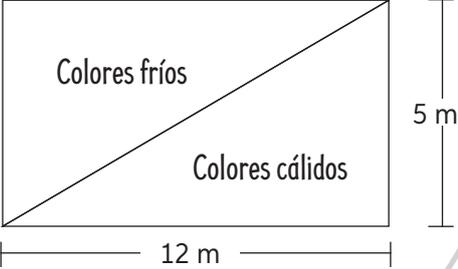
Objetivo: Determinar el área de triángulos aplicando su fórmula en la resolución de problemas geométricos.

Escribe la expresión para calcular el área de paralelogramos.
¿Cómo piensas que esta expresión te permitirá conocer el área de triángulos?

1. Observa la siguiente situación y desarrolla las actividades propuestas.

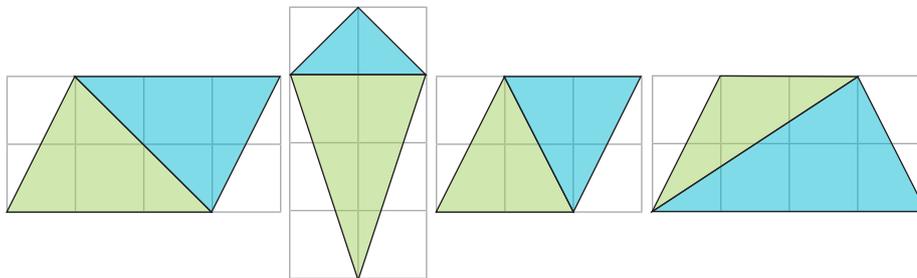


MURAL



Aldana es muralista y está planificando su próxima obra: un muro rectangular en el que utilizará colores cálidos y fríos, tal como se muestra en la imagen. Pero antes necesita conocer la cantidad de metros cuadrados que pintará. ¡Ayúdala a planificar su trabajo!

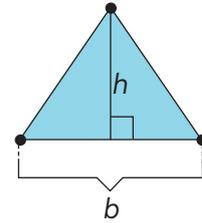
- ¿Cuántos metros cuadrados tiene el mural?
- Comprendiendo que se pintarán la misma cantidad de metros cuadrados con colores cálidos y fríos, ¿cuántos metros cuadrados serán de cada color?
- Describe los pasos y datos que necesitaste seguir o conocer para determinar la medida del área de estos polígonos.
- ¿Para cuál(es) de los siguientes casos, los pasos que describiste te permitirían determinar el área de cada color? Justifica tu respuesta.



- ¿En qué casos no se puede aplicar la estrategia? Justifica.

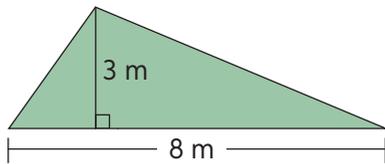
Por lo tanto, si la medida de la base multiplicada por la altura es igual al área de un paralelogramo de igual base y altura, la mitad de la base multiplicada por altura será igual al área del triángulo.

$$b \cdot h = A_{\square} \Rightarrow \frac{b \cdot h}{2} = A_{\triangle}$$

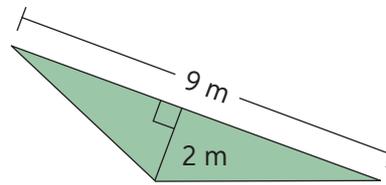


2. Calcula el área de los triángulos aplicando la estrategia que prefieras.

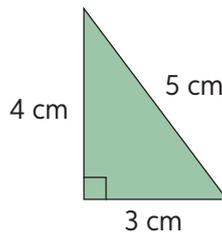
a.



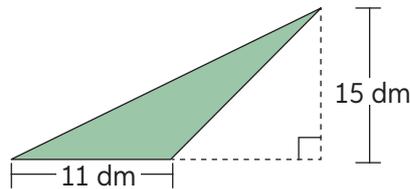
c.



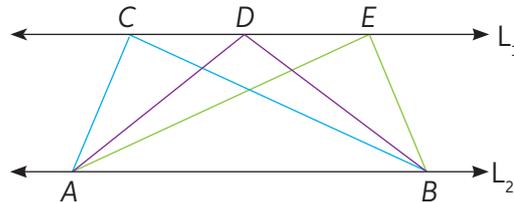
b.



d.



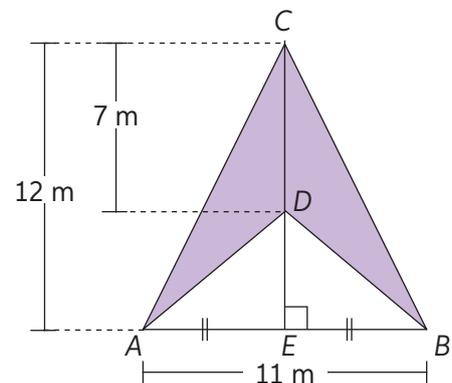
3. Compara el área de los siguientes triángulos sabiendo que $L_1 \parallel L_2$.



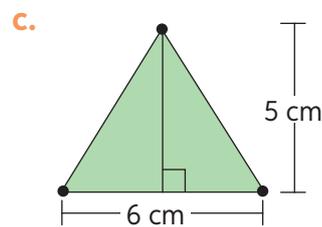
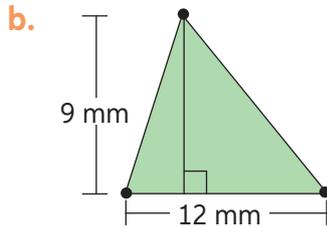
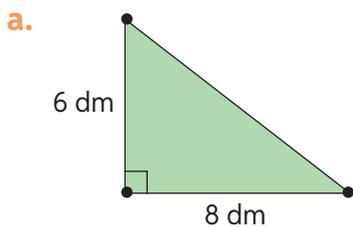
- ¿Es posible comparar el área de estas figuras geométricas sin conocer sus medidas?, ¿por qué?
- Si la medida de la base fuese 10 m y la distancia entre las rectas paralelas 4 m, ¿cuál sería el área de cada triángulo?

4. En la imagen, $\triangle ABC$ isósceles de base \overline{AB} . Determina las siguientes medidas:

- Área del $\triangle ABD$.
- Área de la región morada de la imagen.
- Área del $\triangle CEB$.
- Área del $\triangle CAD$.
- Área del $\triangle AED$.



5. Se quiere duplicar y triplicar la superficie de los siguientes triángulos, pero sin cambiar la longitud de su base. ¿Cómo debe variar la altura en cada caso?



- ¿Pudiste apreciar alguna regularidad en la variación de la altura con respecto a la variación del área?

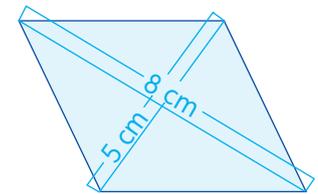
6. Determina el área de un rombo conociendo sus diagonales. Sigue el ejemplo.

Paso 1: Determina el área de uno de los triángulos congruentes.

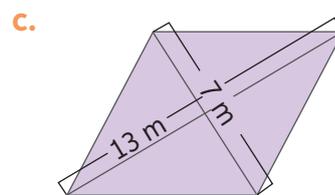
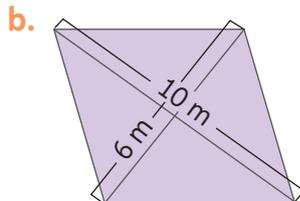
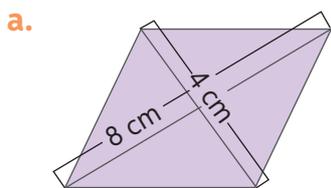
$$A_{\Delta} = \frac{2,5 \cdot 4}{2} = 5 \rightarrow A_{\Delta} = 5 \text{ cm}^2$$

Paso 2: Calcula el área del rombo replicando cuatro veces esta medida.

$$A_{\square} = 5 \text{ cm}^2 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2$$

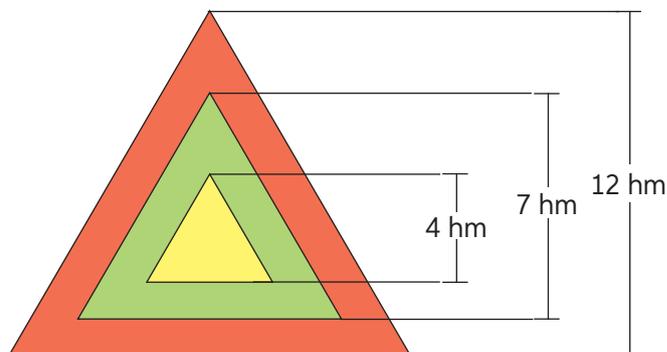


Un rombo está formado por cuatro triángulos congruentes.

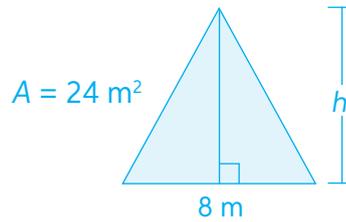


- ¿Cuándo puede ser útil aplicar esta estrategia?, ¿por qué?
- ¿Podrá aplicarse esta estrategia para determinar el área de otras figuras geométricas? Explica.

7. Se sabe que las medidas basales de los triángulos rojo, verde y amarillo son de 13 hm, 8 hm y 4 hm respectivamente. Calcula el área que ocupan las regiones de cada uno de estos colores.



8. Dada el área (A) de cada triángulo, calcula el valor de x en cada caso. Guíate por el ejemplo.



Paso 1: Reemplaza los valores en la expresión:

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 24 = \frac{8 \cdot h}{2}$$

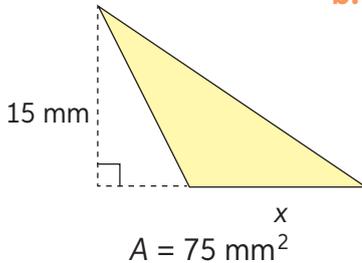
Paso 2: Resuelve la ecuación:

$$24 = \frac{8 \cdot h}{2} \quad / \cdot 2$$

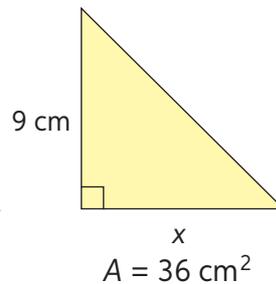
$$48 = 8h \quad / : 8$$

$$6 = h \Rightarrow h = 6 \text{ m}$$

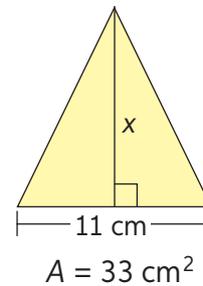
a.



b.

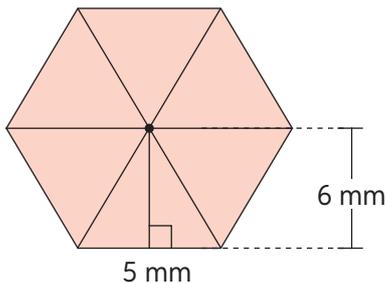


c.

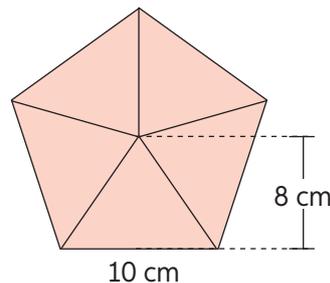


9. **Desafío** Determina la medida de la superficie de los siguientes polígonos considerando que la figura **a** es un hexágono regular y los triángulos trazados en su interior son congruentes. La figura **b** es un pentágono regular.

a.



b.



68 y 69

Para concluir

- Realiza un resumen de las expresiones y estrategias vistas a lo largo del tema. Luego, construye una lámina con esquemas que te ayuden en tu aprendizaje.
- ¿En qué ámbitos de la vida cotidiana podría ser útil lo trabajado en este tema?
- ¿Qué fue lo más difícil de calcular el área de triángulos?, ¿qué puedes hacer para superar esta dificultad? Reflexionen en parejas.

Área de trapecios

Objetivo: Determinar el área del trapecio de forma concreta y mediante expresiones.

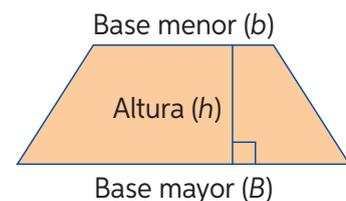
¿Recuerdas las partes de un trapecio? ¿Qué es un trapecio?

¿Qué elementos permiten calcular las áreas de paralelogramos y triángulos?

1. Observa las imágenes y responde.

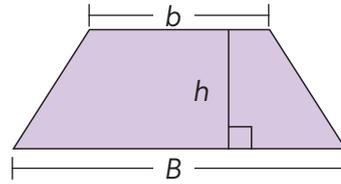


- ¿Qué figura formaron María y Miguel con sus mesas?
 - ¿Cómo se calcula el área de esta figura?
 - ¿Cómo se debiesen utilizar las partes del trapecio en la expresión de cálculo de área de paralelogramos para calcular el área de la figura formada por los niños? Justifica.
 - Sabiendo que las áreas de la cubierta de las mesas de María y Miguel son iguales, ¿qué debiésemos hacer con el área de la figura para obtener el área de cada una de las cubiertas de sus mesas? ¿Por qué?
 - Si la base menor (b) de la cubierta de la mesa mide 60 cm, la base mayor (B) 120 cm y su altura (h) 45 cm, ¿cuál es el área de cada cubierta?
 - Si la sala tiene 40 alumnos, ¿cuál sería el área mínima de las planchas de madera utilizada para construir las mesas?
- Antes de comenzar este tema, ¿qué sabías sobre los trapecios? ¿Qué conocimientos nuevos tienes ahora?

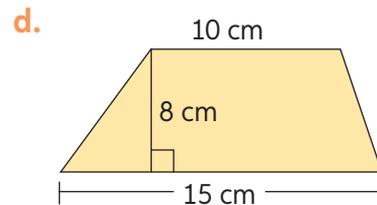
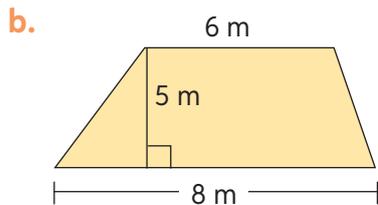
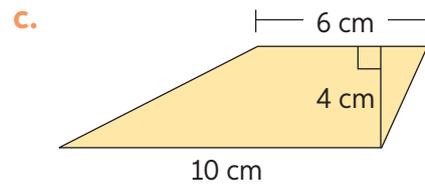
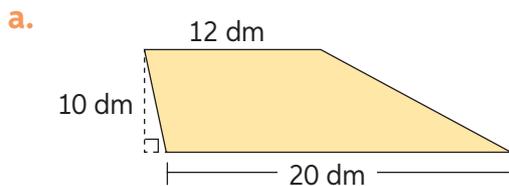


Para calcular el área de un trapecio (A), puedes usar la siguiente expresión. Considera que B es la base mayor, b la menor y h la altura del trapecio:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

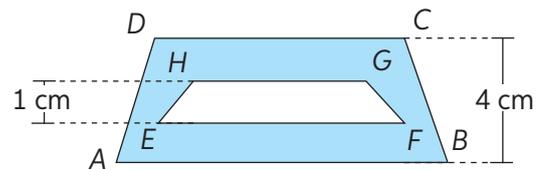


2. Determina el área de los siguientes trapecios utilizando la fórmula.



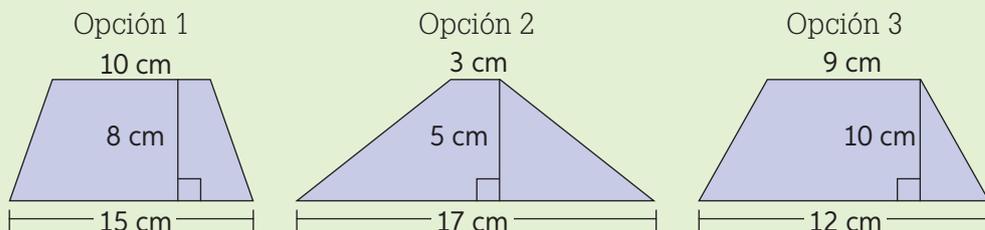
3. Considerando que $ABCD$ y $EFGH$ son trapecios y que $m(\overline{AB}) = 12$ cm, $m(\overline{DC}) = 8$ cm, $m(\overline{EF}) = 6$ cm y $m(\overline{HG}) = 5$ cm:

- a. ¿Cuál es la superficie de la región pintada?
 b. Describe los pasos que seguiste para determinar la superficie.



4. Analiza la siguiente situación y responde.

Para una reunión con un cliente, un ceramista debe llevar un modelo de cerámica con forma de trapecio que le encargaron. No recuerda cuál de los tres modelos de cerámica que tiene en su taller es el que corresponde al pedido, pero tiene un registro en el que se detalla que el área de la cerámica debe ser 100 cm^2 y su altura debe ser menor que 10 cm.



- a. ¿Cuál de las cerámicas es la que debe llevar a su reunión?

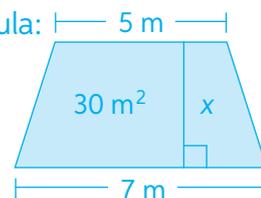
5. Determina la medida de las alturas de los trapecios. Guíate por el ejemplo.

Paso 1: Identifica los valores conocidos y reemplázalos en la fórmula:

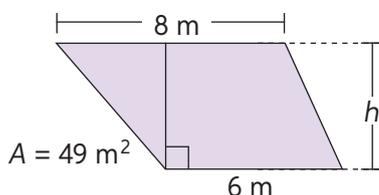
$$h \cdot \frac{(B+b)}{2} = A \Rightarrow \frac{(5+7)}{2} \cdot h = 30$$

Paso 2: Despeja el valor de la incógnita:

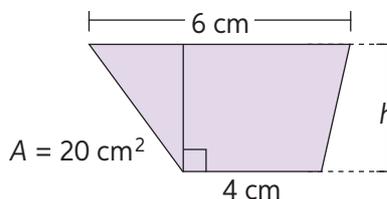
$$\begin{aligned} \frac{(5+7)}{2} \cdot h &= 30 & / \cdot 2 \\ 6 \cdot h &= 30 & / : 6 \text{ m} \\ h &= 5 \end{aligned}$$



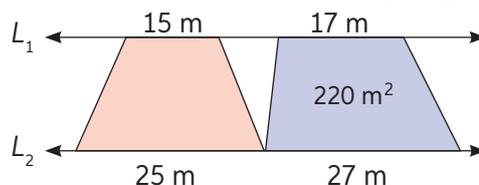
a.



b.



6. Un mueblista necesita hacer una estructura con listones de madera siguiendo el modelo de un trapecio. Los listones que utilizará para hacer las bases miden 60 cm y 20 cm. Si el área del trapecio es 560 cm^2 , ¿qué distancia debe existir entre las bases?
7. Calcula el área del trapecio naranja sabiendo que $L_1 \parallel L_2$.



8. **Desafío** En parejas, resuelvan el problema.

La altura de un trapecio es 8 hm y una de sus bases mide 10 hm. Si la superficie que ocupa esta figura mide 120 hm^2 , ¿cuánto mide la otra base? ¿Es mayor o menor que la explicitada?

- Describan un proceso para determinar la medida de una de las bases.
- Comprueben su propuesta desarrollando un ejercicio ya revisado.
- Soliciten a otro compañero que lo aplique en la resolución de un ejercicio y, de ser necesario, modifíquelo hasta que sea claro para quien lo siga.



70 y 71

Para concluir

- ¿Cómo podrías recordar siempre el cálculo de áreas del trapecio? Crea un esquema que te permita facilitar este proceso.
- ¿Qué estrategia te hizo resolver de forma más simple los problemas? ¿Por qué?
- ¿Qué fue lo más difícil del cálculo de áreas de trapecios?, ¿qué puedes hacer para superar esta dificultad?

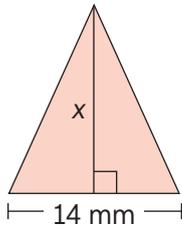
Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades. Luego, responde las preguntas propuestas en la sección Reflexión.

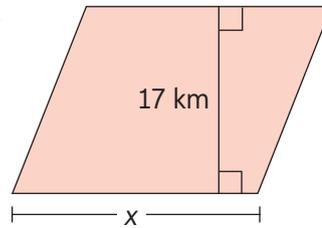
1. Determina los valores incógnitos (x) de las siguientes figuras geométricas:

a.



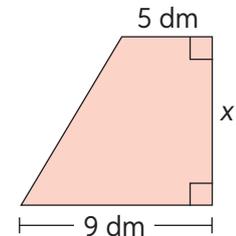
$$A = 12 \text{ mm}^2$$

b.



$$A = 408 \text{ km}^2$$

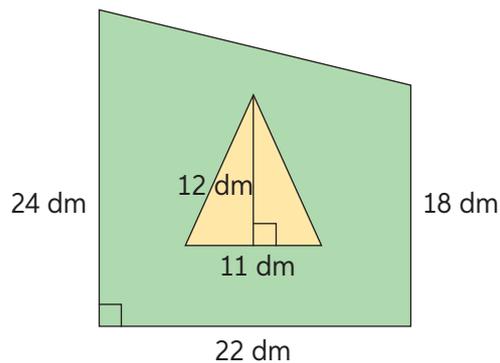
c.



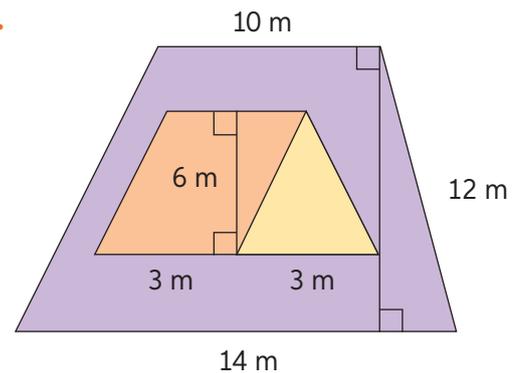
$$A = 70 \text{ dm}^2$$

2. Calcula el área de cada color en los siguientes polígonos:

a.

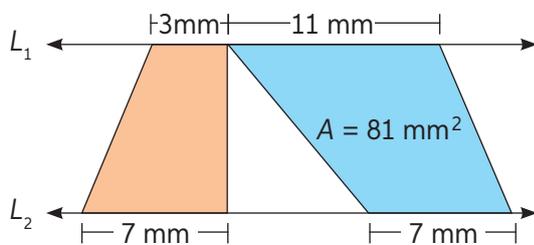


b.

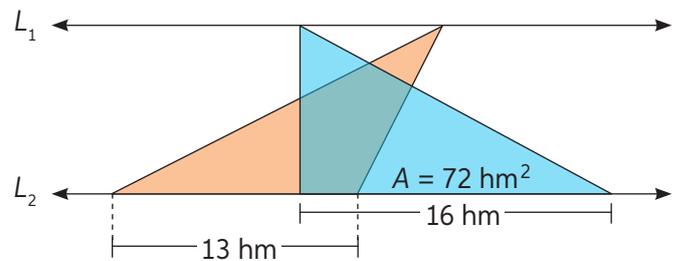


3. Determina el área de las superficies naranjas considerando que $L_1 \parallel L_2$.

a.



b.



Reflexión

- ¿Qué actividades de esta página te resultaron más simples de desarrollar? ¿Con qué contenido se relacionan?
- ¿Qué temas te provocaron mayor dificultad en la lección? ¿Por qué crees que ocurre esto?



72

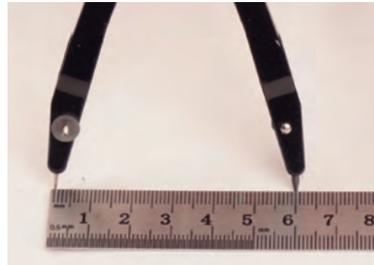
Círculo y circunferencia

Objetivo: Caracterizar el círculo y la circunferencia como lugares geométricos e identificar sus elementos.

¿Es lo mismo un círculo que una circunferencia? ¿Por qué?
¿Conoces los términos radio y diámetro? ¿Con qué los relacionas?

1. Desarrolla la siguiente actividad y responde las preguntas a continuación.

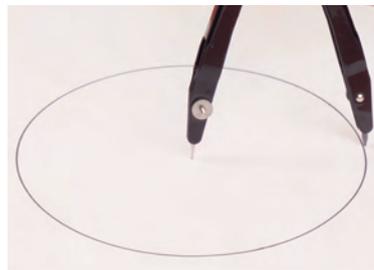
Paso 1: Abre el compás 6 cm utilizando la regla.



Materiales

- Compás
- Regla
- Lápices de colores (azul, rojo, verde y amarillo)
- Hoja blanca

Paso 2: Sin mover la abertura del compás, apoya su punta sobre la hoja de block y gira cuidadosamente la mina del compás formando un círculo.



- a. Dibuja o pinta los elementos solicitados con los colores indicados.

Verde	Rojo	Azul	Amarillo
El punto central que dejó el compás al interior del círculo.	5 segmentos desde el centro del círculo hasta sus extremos.	5 segmentos que pasen por el centro y que toquen dos puntos de la circunferencia.	Pinta el círculo completo.

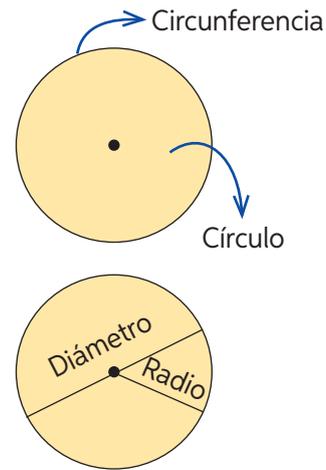
- b. El punto marcado con verde corresponde al centro de la circunferencia. ¿Cómo es la distancia desde este a cualquier punto de la circunferencia?
- c. Los segmentos rojos reciben el nombre de radio. ¿Cuál es la relación entre sus medidas?, ¿por qué crees que ocurre esto?
- d. Los segmentos azules reciben el nombre de diámetro. ¿Puede existir un segmento más extenso que este al interior de la circunferencia?
- e. Mide un diámetro y un radio. ¿Cuál es la relación entre sus medidas?
- f. La región amarilla corresponde al círculo, pero la línea perimetral o límite recibe el nombre de circunferencia. ¿Cómo es la distancia entre cualquier punto del círculo y su centro?
- g. Define los conceptos de radio, diámetro, centro del círculo, círculo y circunferencia. Escríbelo en la hoja.

Circunferencia: lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes a un punto de un plano, que forman una línea cerrada, limitando una región interior.

Círculo: lugar geométrico formado por todos los puntos que se encuentran a menor o igual distancia del centro que la circunferencia.

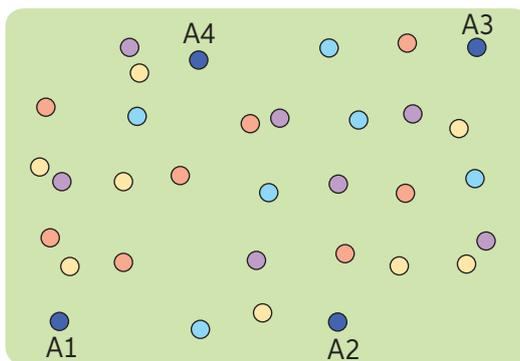
Radio (r): segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella.

Diámetro (d): segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por su centro.



2. Construye una circunferencia con las medidas indicadas. Pinta con color rojo 4 diámetros e identifica sus medidas. Pinta, además, 5 radios de azul, identificando también sus medidas, y con amarillo la región circular.
- a. Circunferencia O con $r = 6$ cm. b. Circunferencia Q con $d = 6$ cm.
3. El siguiente es un esquema de un jardín. Cada punto representa un sector de plantado según se indica y cada punto azul representa un aspersor cuyo radio de riego es 3 m. Estos aspersores giran en 360° regando según su radio de alcance. Si en la imagen 1 cm equivale a 1 m en la realidad, responde usando regla y compás:

Un aspersor es un mecanismo para el riego. Dispersa el agua en forma circular.



●	Rosas
●	Violetas
●	Lirios
●	Jazmines

Copia el diagrama en tu cuaderno.

- a. ¿Cuántos sectores y de qué tipo es capaz de regar cada aspersor?
 b. ¿Existen sectores que reciban agua de más de un aspersor?
 c. ¿Cuál aspersor es el más eficiente? ¿Por qué?
 d. ¿Cómo se podría haber aprovechado de mejor forma el agua para el riego?



73

Para concluir

- a. Construye un mapa conceptual en el describas todos los conceptos del tema Círculo y circunferencia. En parejas, compártanlo y compleméntenlo de ser necesario.
 b. ¿Qué conocías del tema trabajado? ¿Qué aprendiste de nuevo?
 c. ¿Qué fue lo más complejo de las páginas de Círculo y circunferencia?, ¿cómo pudiste resolverlo?

Perímetro del círculo

Objetivo: Determinar el perímetro de un círculo en diversos contextos.

¿Qué es el perímetro en una figura geométrica? ¿Qué debes hacer para calcularlo?

1. Observa la situación y realiza las actividades propuestas.



Calcular el perímetro de figuras de lados rectos es algo que vienes practicando desde hace algunos años. Sin embargo, para calcular el perímetro de un círculo, tendremos que utilizar otra estrategia.

- a. Sigue los pasos para calcular el perímetro de un círculo.

Paso 1: Mide el diámetro de uno de los objetos solicitados en los materiales utilizando la regla. Asegúrate de que la medida pase por el centro del círculo.

Paso 2: Con la lana, mide el contorno de los objetos (longitud de la circunferencia) y córtala según la medida.

Paso 3: Mide la longitud de la lana cortada con una regla.

Paso 4: Repite el proceso con los otros 3 objetos.

- b. Completa la tabla en tu cuaderno. Utiliza calculadora de ser necesario.

Objeto	Diámetro (d)	Contorno de la circunferencia (P)	$P : d$
■	■	■	■
■	■	■	■
■	■	■	■
■	■	■	■

- c. Analiza y describe la relación que existe entre los cocientes. ¿A qué número es cercano?

Materiales

- 4 objetos en los que se observe un círculo
- Lana
- Regla
- Tijeras

El valor del cociente entre el perímetro y el diámetro de un círculo es un número que llamaremos pi, y denotaremos con la letra griega π , que corresponde a un decimal infinito (3,141592653589793238462643483279...) que se puede aproximar de diferentes formas, por ejemplo:

Aproximado a la unidad $\pi \approx 3$

Aproximado a la centésima $\pi \approx 3,14$

El número pi (π) permite modelar una expresión para calcular el perímetro (P):

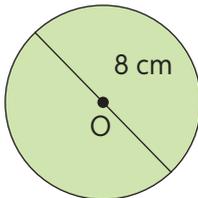
$$P = d \cdot \pi \text{ o bien } P = 2r \cdot \pi.$$

Experimenta con la relación entre el perímetro y el radio de la circunferencia ingresando el código **T20M7BP135A** en www.enlacesmineduc.cl

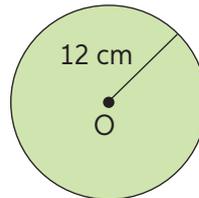
Refuerza ingresando el código **T20M7BP135B** en www.enlacesmineduc.cl

2. Determina el perímetro de los siguientes círculos. Considera $\pi \approx 3,14$.

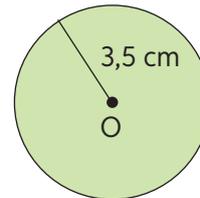
a.



b.



c.



➤ ¿Por qué crees que se utiliza 3,14 como aproximación de π ? ¿Por qué no se usa el número completo?

3. Resuelve los problemas considerando 3,14 para π .

a. Ana desea cambiar la pantalla de su lámpara por otra que tenga las mismas medidas. En la tienda, las pantallas están rotuladas por la medida perimetral de las bases. Si Ana anotó las medidas de la imagen, ¿qué perímetros debería tener su nueva pantalla?

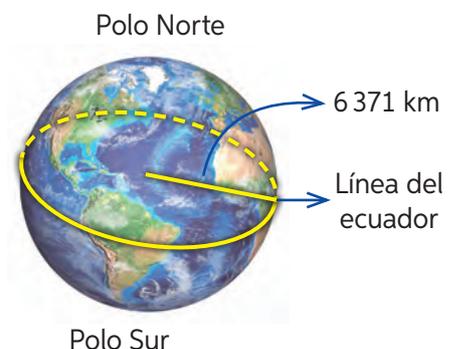


Geografía

b. Analiza la imagen y realiza las actividades propuestas.

- Calcula la medida de la línea del ecuador utilizando la medida aproximada del radio ecuatorial presente en la imagen.
- Determina la medida del diámetro que existe al trazar una circunferencia a través de los polos, sabiendo que el radio polar (desde el centro de la Tierra hasta un polo) mide aproximadamente 6356 km.

c. Una rueda de bicicleta tiene 26 pulgadas diametrales. Si una pulgada equivale aproximadamente a 2,5 cm, ¿cuántas vueltas debiese dar la rueda para recorrer 100 m? Si José logra que la rueda de su bicicleta gire completamente en 3 segundos, ¿cuánto demorará en recorrer 100 m?



4. Determina el radio o diámetro. Guíate por el ejemplo.

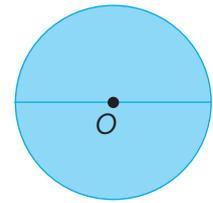
Paso 1: Divide el perímetro por π y obtendrás el diámetro:

$$P = \pi \cdot d \Rightarrow P : \pi =$$

$$43,96 = 3,14 \cdot d \Rightarrow 43,96 : 3,14 = 14$$

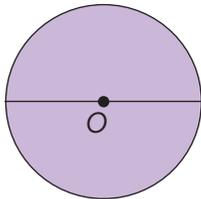
Paso 2: Divide el diámetro por 2 y obtendrás el radio:

$$2r = d \Rightarrow r = \frac{d}{2} \quad 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7 \rightarrow r = 7 \text{ cm}$$



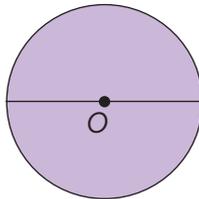
$P \approx 43,96 \text{ cm}$

a.



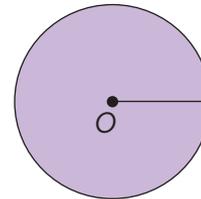
$P \approx 31,4 \text{ cm}$

b.



$P \approx 15,7 \text{ m}$

c.



$P \approx 47,1 \text{ mm}$

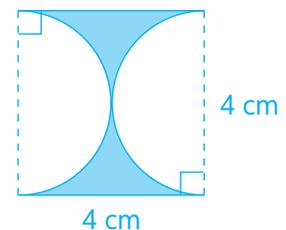
5. Calcula el perímetro de figuras sombreadas. Guíate por ejemplo.

Paso 1: Identifica las figuras existentes.

Las dos líneas curvas forman una circunferencia y las rectas corresponden a lados de un cuadrado.

Paso 2: Identifica las partes que componen la figura.

Las líneas rojas de la circunferencia, de diámetro 4 cm, y las líneas azules continuas del cuadrado, cada una de 4 cm.



Paso 3: Calcula el perímetro de la figura (formada por las líneas rojas y azules continuas).

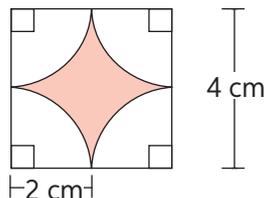
Calcularemos la longitud de la circunferencia (P):

$$P = \pi \cdot d \rightarrow P = 3,14 \cdot 4 = 12,56 \text{ cm}$$

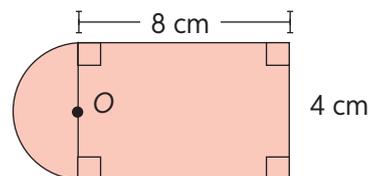
A este resultado le sumamos la medida de las líneas azules:

$12,56 + 4 + 4 = 20,56 \text{ cm}$, y obtenemos el perímetro de la figura formada.

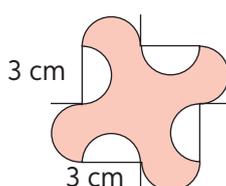
a.



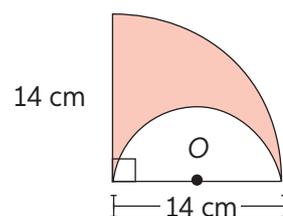
c.



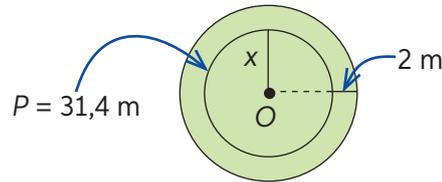
b.



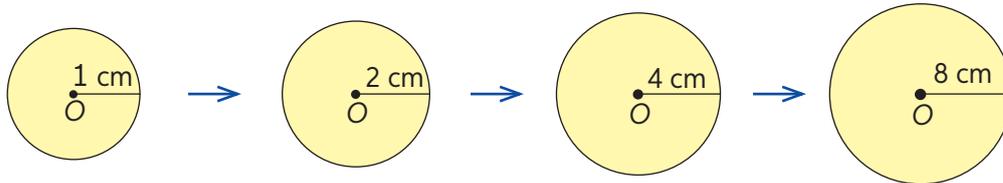
d.



6. Determina el perímetro del círculo exterior conociendo el de la interior. Describe los pasos utilizados para resolver el problema.



7. Calcula el perímetro de cada círculo. Luego, responde.

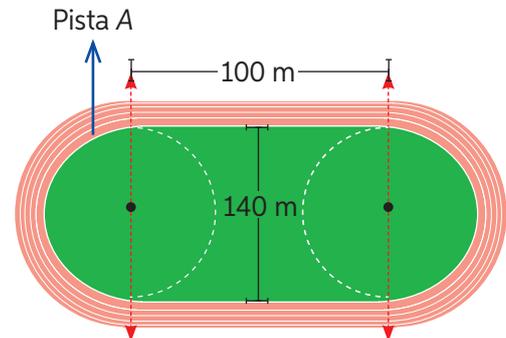


- A medida que el radio de la circunferencia se duplica, ¿qué ocurre con el perímetro?
- ¿Cuánto debiese medir el perímetro de un círculo cuyo radio mide 16 cm? Justifica tu respuesta.

➤ ¿En qué casos esta regularidad podría serte útil?

8. **Desafío** En parejas, observen la siguiente imagen y resuelvan el problema asociado a ella.

- Un ciclista quiere entrenar en su bicicleta bordeando la cancha por la pista A. Si pretende hacer este trabajo en una bicicleta con ruedas de 24 pulgadas de diámetro y demora 2,5 segundos promedio en girar su rueda completa, ¿cuánto tiempo demorará en recorrer la cancha?



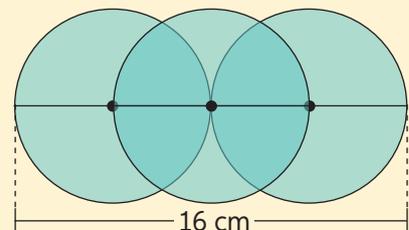
- Describan el procedimiento utilizado para responder esta situación y compártalo con otra pareja.



74 y 75

Para concluir

- Las tres figuras presentes en la imagen tienen radios congruentes. ¿Cuál es el perímetro de cada círculo?, ¿qué pasos seguiste para determinarlos?
- ¿Qué estrategia utilizaste para resolver el problema 8? ¿Crees que fue la mejor o podrías haberlo hecho de otra forma?
- ¿Qué usos le darías al cálculo del perímetro de un círculo en tu vida cotidiana?



Área del círculo

Objetivo: Estimar y determinar el área y elementos de círculos en diversos contextos.

¿En qué situaciones podría ser importante saber calcular el área de un círculo? Menciona 3.

1. El profesor entrega a sus estudiantes las siguientes figuras en una lámina y les solicita que reflexionen cómo pueden estimar el área de los círculos de las imágenes.

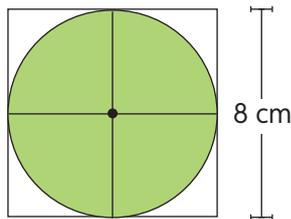


Figura 1

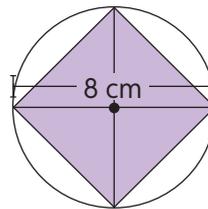


Figura 2

Observa lo realizado por dos estudiantes y responde las preguntas.

Paso 1: Recortamos los triángulos inferiores de la figura 2, en los que se divide el cuadrado inscrito en la circunferencia (dibujado al interior de esta). Luego, los superpusimos, como muestra la figura 3.

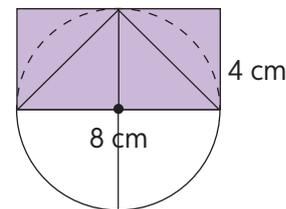
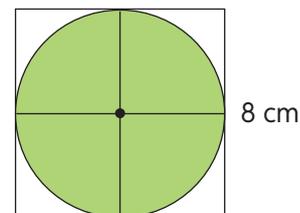


Figura 3

- a. ¿Qué figura se formó?
- b. ¿Cuál es el área de esta figura?
- c. ¿Es menor o mayor que el área del círculo?
- d. ¿A qué partes del círculo corresponden las medidas explicitadas en la imagen?

Paso 2: Posteriormente, calculamos el área del cuadrado de lado 8 cm y estimamos el área del círculo.



- e. ¿Cuál es el área del cuadrado circunscrito (exterior al círculo)?
- f. ¿Es menor o mayor que el área del círculo?

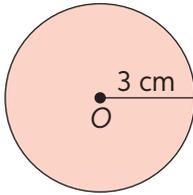
Paso 3: Finalmente, establecimos una relación de orden entre las medidas, es decir, el área del círculo (A) puede clasificarse como mayor que el doble de su radio al cuadrado y menor que el cuádruple de su radio al cuadrado.

$$2r^2 < A < 4r^2$$

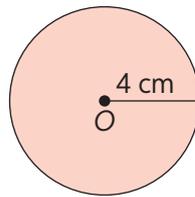
- g. Reemplaza los valores de las figuras en la relación establecida y observa lo que ocurre. ¿Cuál crees que sería una buena estimación de A ?

2. Estima el área (A) de cada círculo considerando para $A \approx 3r^2$.

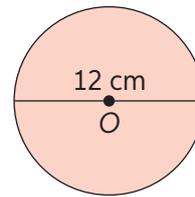
a.



b.

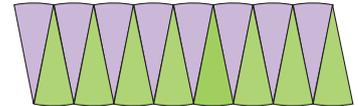
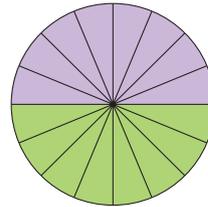


c.

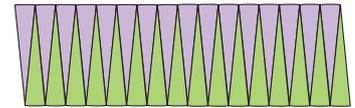
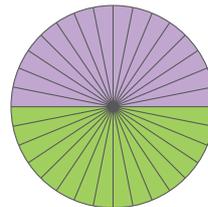


3. Otra pareja de estudiantes estima el área del círculo utilizando otra estrategia. Analiza y responde.

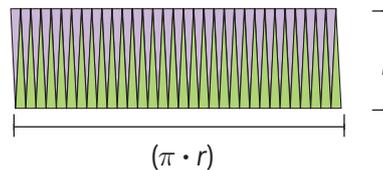
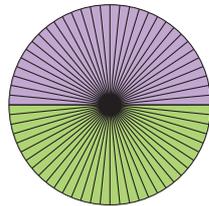
Paso 1: Primero, dividen el círculo en 16 secciones iguales y las ubican una al lado de la otra.



Paso 2: Luego, dividen un círculo idéntico en 32 partes iguales y nuevamente colocan las secciones una al lado de la otra.



Paso 3: Ven que mientras más divisiones hacen, más pequeñas resultan estas. Además, al unirlas, la figura se parece cada vez más a un rectángulo, cuya base corresponde a la mitad del perímetro y su altura es igual al radio del círculo (r).

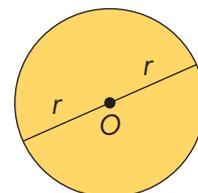


Paso 4: Deducen que, como la figura se parece a un rectángulo, se puede estimar el área del círculo calculando el área del rectángulo.

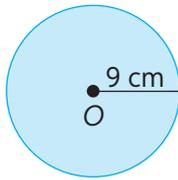
- ¿Cuál es la base del rectángulo formado con el círculo?
- ¿A qué elemento del círculo corresponde la altura del rectángulo?
- Plantea la fórmula para el cálculo del área del rectángulo con los elementos del círculo.

El área de un círculo (A) de radio r corresponde a la medida de la superficie del círculo y se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$A = \pi \cdot r^2$$



4. Determina el área de los siguientes círculos aplicando la fórmula. Guíate por el ejemplo:



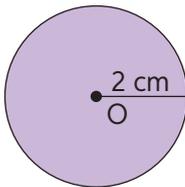
$$A = \pi r^2$$

$$A \approx 3,14 \cdot 9$$

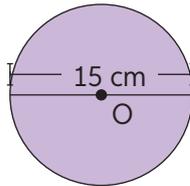
$$A \approx 254,34 \Rightarrow A \text{ 254,34 cm}^2$$

Si quieres practicar, ingresa el código T20M7BP140A en www.enlacesmineduc.cl

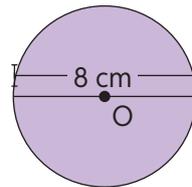
a.



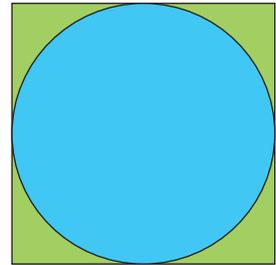
b.



c.



5. La piscina circular de la imagen se encuentra en un terreno cuadrado, cuya superficie mide 144 m^2 . En el esquema, el color celeste corresponde a la piscina y el verde al pasto que la rodea.



- ¿Cómo se calcula el lado de un cuadrado conociendo el área?
- ¿A qué medida del círculo equivale el lado del cuadrado?
- ¿Cuál es el área de la piscina?
- ¿Qué área corresponde al pasto?

➤ Describe el procedimiento utilizado para resolver el problema.

6. Calcula el área de cada círculo dada su descripción.

- La longitud del diámetro del círculo es 12 cm.
- El círculo está inscrito en un cuadrado cuyos lados miden 9 mm cada uno.
- El círculo tiene inscrito un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm, y su lado mayor es además un diámetro del círculo.
- El perímetro del círculo es 31,4 cm, considerando $\pi \approx 3,14$.

➤ ¿Qué contenidos de geometría tuviste que recordar para resolver las actividades anteriores?

7. Un caballo se encuentra en un corral rectangular de ancho 7 m y largo de 8 m. En el centro del corral hay una estaca con una cuerda que ata al caballo, pero le permite moverse dentro del corral.

- Si la cuerda que ata al caballo mide 3 m, ¿cuál es la superficie máxima por la que puede moverse el caballo?
- ¿Qué superficie del corral sería inaccesible para el caballo?

➤ ¿De qué forma resolviste el problema? ¿Podrías resolverlo de una manera diferente?

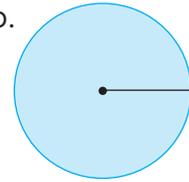
8. Conociendo el área (A) de un círculo, determina la medida de su radio.

Paso 1: Divide el área de un círculo en $\pi \approx 3,14$:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{A}{\pi} = r^2 = \frac{113,04}{3,14} = 36$$

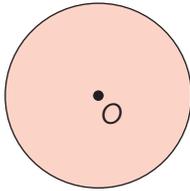
Paso 2: Determina r^2 buscando dos números iguales cuyo producto sea igual a r^2 :

$$r^2 = r \cdot r = 36 \text{ cm}^2 \Rightarrow 36 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \therefore r = 6 \text{ cm}$$



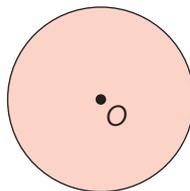
$A = 113,04 \text{ cm}^2$

a.



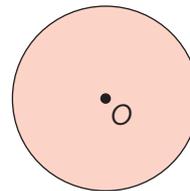
$A = 28,26 \text{ m}^2$

b.



$A = 78,5 \text{ m}^2$

c.



$A = 254,34 \text{ cm}^2$

9. El siguiente espejo circular debe ser completamente restaurado y se sabe que un restaurador especializado cobra \$100 por cm^2 .

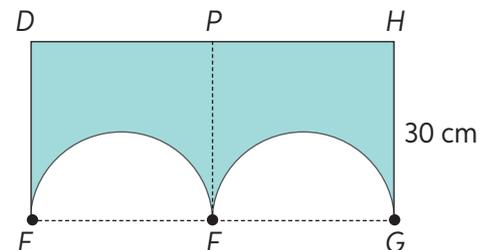
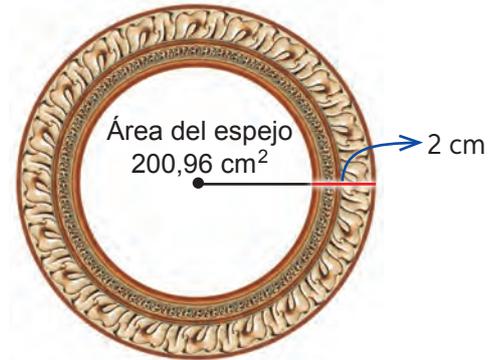
- ¿Cuál es el diámetro del vidrio del espejo?
- ¿Cuánto dinero se deberá invertir para realizar la restauración?
- Si se quisiera realizar solo la restauración del marco del espejo, ¿cuánto dinero costaría?

➤ Describe el procedimiento que seguiste para responder.

10. **Desafío** Reúnanse en parejas y resuelvan la siguiente situación.

Las figuras $EFPD$ y $FGHP$ son cuadrados.

- Sabiendo que \widehat{EF} y \widehat{FG} corresponden a media circunferencia, ¿cuál es el área de la figura coloreada?
- Justifiquen su procedimiento con conocimientos geométricos.



Para concluir

- ¿Qué ocurre con el área de un círculo si se duplica la medida de su radio? Prueba con 5 casos, Luego, compartan en parejas lo analizado.
- Haz un listado de tus fortalezas y debilidades relacionadas con el área del círculo. Elabora un plan de refuerzo para las debilidades.
- Nombra a lo menos 3 aprendizajes relacionados con el cálculo de área del círculo y compártelos con tu curso.



76 y 77

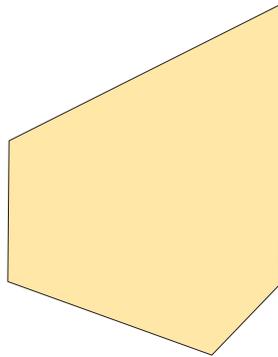
Área de figuras compuestas

Objetivo: Calcular y estimar áreas de figuras compuestas en la resolución de problemas geométricos y cotidianos.

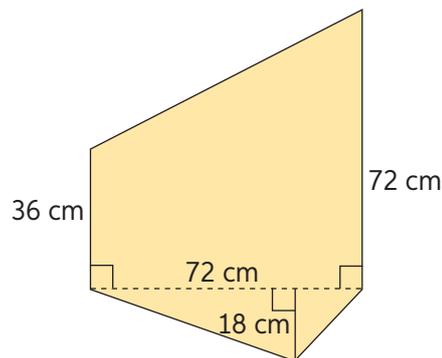
Escribe un listado con todas las expresiones de cálculo de área de polígonos vistos anteriormente.

¿Qué entiendes por figuras compuestas? ¿Cómo crees que se podría calcular su área?

1. Simón debe hacer un trabajo con Sofía y para ello necesitan usar cartulina. Él tiene un trozo y lo debe repartir de forma equitativa con ella.



Observa la figura con sus medidas. Luego, responde las preguntas asociadas y aplica los pasos para obtener el área de la figura incógnita.



Paso 1: Divide la figura desconocida en figuras de las cuales sepas calcular el área.

- a. ¿En qué polígonos puedes descomponer la figura?

Paso 2: Verifica que las medidas sean las suficientes para calcular el área.

- b. ¿Las medidas son suficientes para calcular el área de los polígonos?

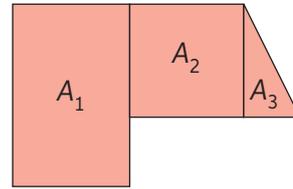
Paso 3: Suma las áreas de cada figura y encontrarás el área de la figura incógnita.

- c. ¿Cuál es el área de cada figura?
 - d. ¿Cuánta superficie le corresponderá a cada niño?
- El área total de la figura es 4536 cm^2 . ¿Fueron correctos los cálculos que realizaste? Comprueba y describe el proceso utilizado.

Llamamos **figura compuesta** a aquella formada por más de una figura geométrica, igual o distinta, juntas o una contenida en la otra.

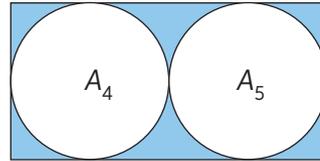
Si las **figuras están una al lado de la otra**, el área total se obtiene sumando las áreas parciales de cada figura:

$$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$$



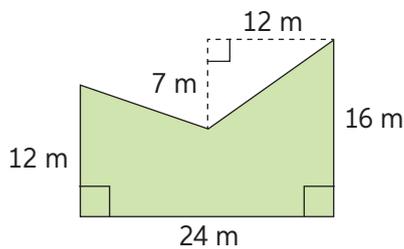
Si algunas **figuras están contenidas en otras**, el área de lo que queda entre ellas se obtiene restando el área menor al área mayor:

$$A_{celeste} = A_{\square} - (A_4 + A_5)$$

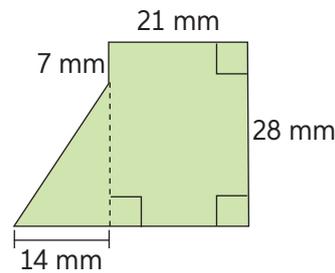


2. Estima el área de las siguientes figuras compuestas. Describe la estrategia utilizada para responder.

a.



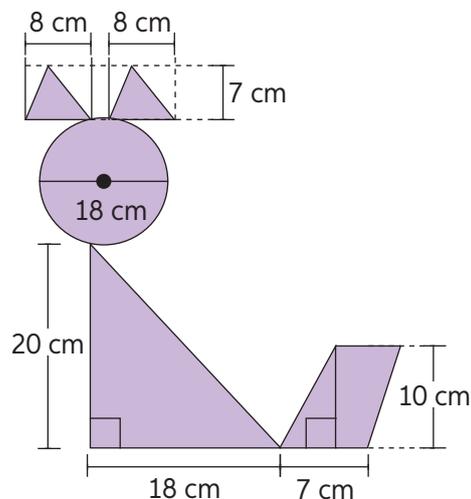
b.



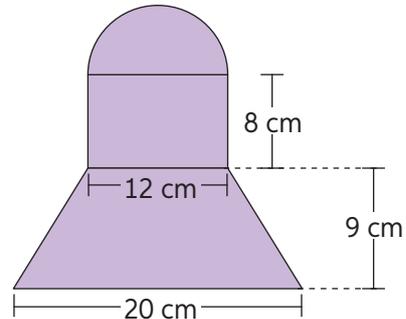
c. ¿Es posible calcular con exactitud la superficie de las figuras? Justifica.

3. Determina el área de las siguientes figuras compuestas. Considera que en las figuras existen círculos y semicírculos, y que las líneas punteadas son paralelas.

a.



b.



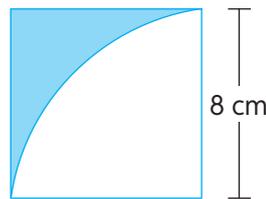
- Explica paso a paso el procedimiento seguido para el cálculo del área total de las figuras. ¿Podrías haberlo hecho de otra manera? En parejas, comenten y comparen sus resultados.

4. Calcula el área de la región coloreada en las figuras. Observa el ejemplo:

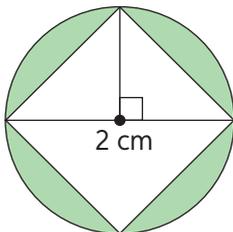
$$A_{\square} = 8 \cdot 8 = 64$$

$$\frac{A_{\circ}}{4} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} \Rightarrow \frac{3,14 \cdot 64}{4} = 50,24$$

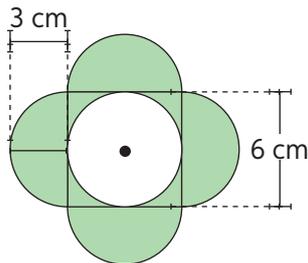
$$A_{\square} - A_{\circ} = 64 - 50,24 = 13,76$$



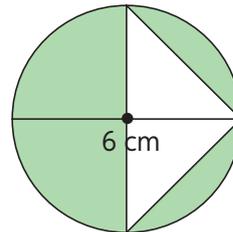
a.



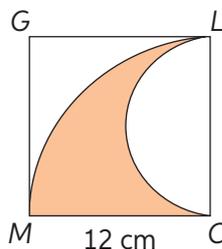
b.



c.



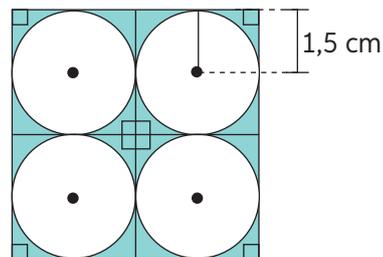
5. Patricio pintará el camino de la imagen, el cual diseñó en un cuadrado trazando media circunferencia y la cuarta parte de otra.



- ¿Cuál es la superficie del camino en la imagen?
- ¿Qué superficie permanecerá de color blanco?
- Describe el procedimiento utilizado para resolver el problema.

6. Se utiliza el siguiente baldosín para cubrir completamente el piso de una maqueta de 540 cm² de superficie.

- ¿Cuántas baldosas se necesitarán para lograrlo?
- ¿Qué superficie del piso de la maqueta será blanca?
- ¿Cuál será la superficie verde de la maqueta?



Para concluir

- Resume las estrategias mostradas en Áreas de figuras compuestas. Luego, en una cartulina pequeña, construye un esquema para preparar la evaluación.
- ¿Qué actividades te generaron mayor dificultad?, ¿qué hiciste al respecto?
- ¿Cómo evalúas tu aprendizaje de Áreas de figuras compuestas? Fundamenta.



78 y 79

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades. Luego, responde las preguntas dispuestas en la sección Reflexiono.

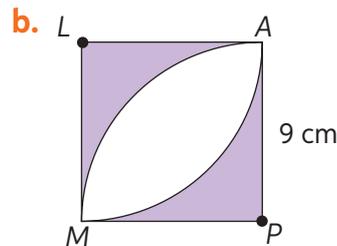
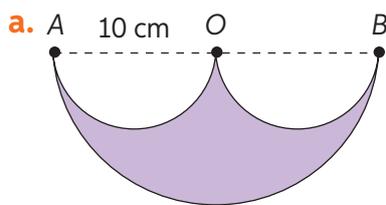
Ciencias.

1. Observa la información y calcula la longitud de la circunferencia máxima de cada planeta. Luego, ordénalos de mayor a menor según esta medida.



*Medidas expresadas en cientos de kilómetros.

2. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras. Considera que las figuras están formadas por cuadrados, semicírculos y cuartos de círculo.



3. En unas bodegas cúbicas que se encuentran en construcción, se instalaron ampolletas en la parte central del techo, las que alumbran óptimamente en un radio de 7,5 m y 9,5 m. Si el área del piso del galpón tiene 289 m² y el otro tiene una medida lateral de 21 m:
 - a. ¿Cuántos metros cuadrados logra iluminar cada ampolleta?
 - b. ¿Cuántos metros cuadrados no reciben la luminosidad necesaria?



80

Reflexiono

- ¿Qué temas debes reforzar? Verifica las definiciones de las páginas 132 a 144.
- Construye un esquema de los principales contenidos de la Lección y sus definiciones. Utilízalo para reforzar los contenidos débiles.

Plano cartesiano

Objetivo: Identificar y ubicar puntos en el plano cartesiano.

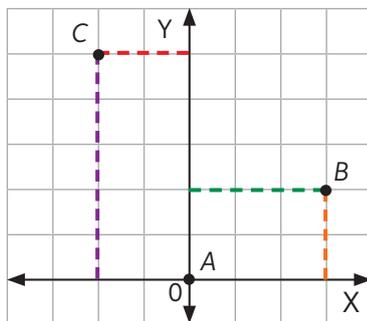
¿Cómo ordenas los números enteros en la recta numérica?

¿Qué entiendes por coordenadas?

- Lucas y María juegan a ser piratas. Lucas simula que esconde un tesoro en el siguiente plano y María debe adivinar la posición.

<p>María apuesta por la posición (1, 3). Lucas ubica una ficha azul contando horizontalmente un lugar a la derecha desde el cero y luego tres lugares hacia arriba.</p>	<p>Luego, intenta con la posición (5, 2). Lucas ubica una ficha roja, contando cinco lugares a la derecha del cero y dos hacia arriba.</p>	<p>Posteriormente, María apuesta por otra posición, como se muestra en la imagen.</p>

- ¿Qué posición le habrá indicado María a Lucas para que este haya ubicado la ficha verde?
 - ¿Cuál es la posición que debió haber dicho María para llegar al cofre?
- ¿Recuerdas cómo describir la posición de un punto? ¿Qué sucede con la posición de un punto si se invierte el orden de las coordenadas?
- Un dron se mueve vertical y horizontalmente.



- Explica cuántos espacios se movió para ir desde el punto A al punto B.
 - ¿Cuántos espacios y en qué dirección se movió para llegar de A a C?
- Si el punto A es el origen, ¿cuál crees que es la coordenada del punto C?

El plano cartesiano está formado por dos rectas perpendiculares llamadas ejes.

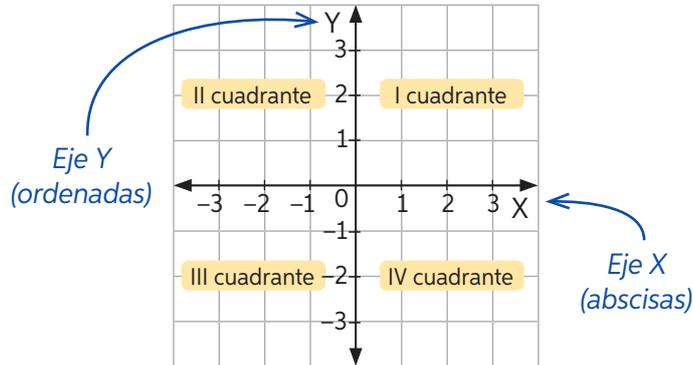
Eje X o de las abscisas.

← Recta horizontal

Eje Y o de las ordenadas.

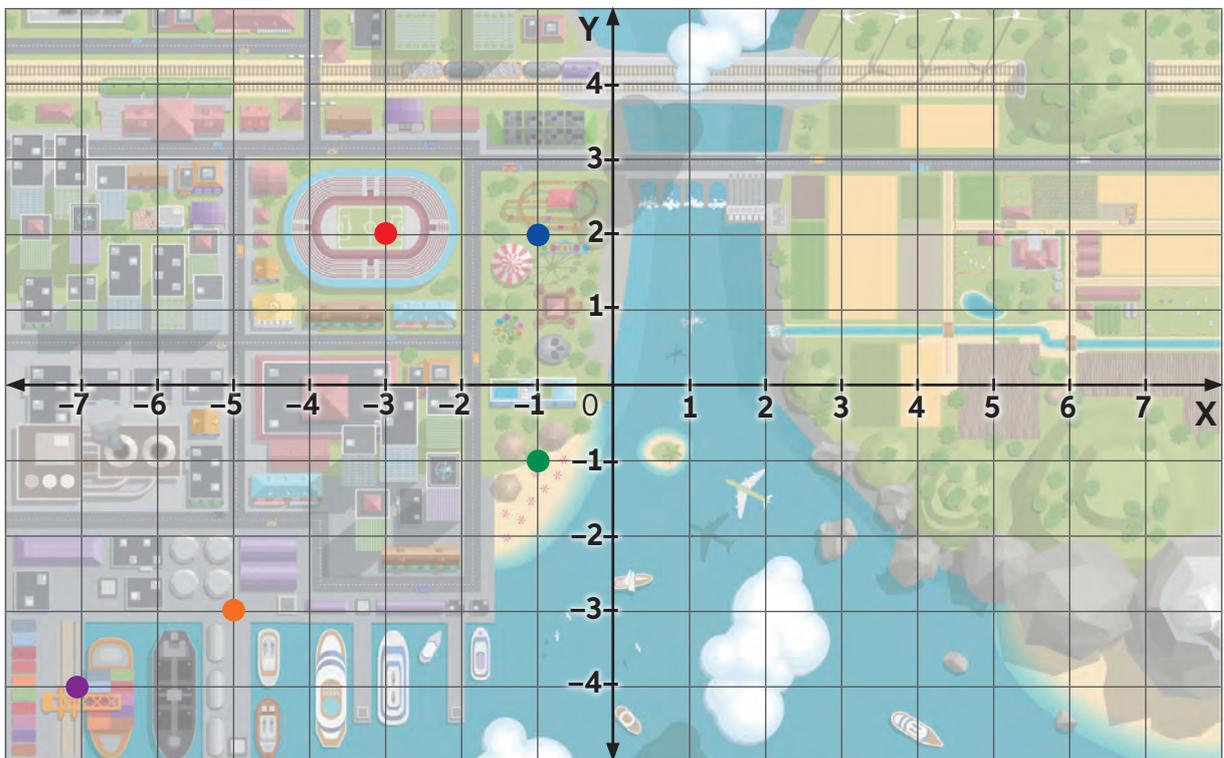
← Recta vertical

El punto de intersección entre ellos se denomina origen y corresponde a $(0, 0)$.



Los puntos del plano cartesiano se representan con un par ordenado (x, y) .

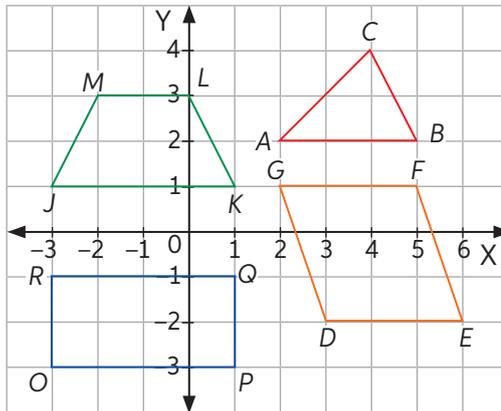
3. Observa el siguiente mapa de una ciudad. Martina vive en el $(6, 2)$.



- ¿Cuáles son las coordenadas del estadio (●)?, ¿y del parque de diversiones (●)?, ¿y de la playa (●)?
- ¿Es correcto decir que el puerto (●) está en $(-3, -5)$? ¿Por qué?
- Si Martina debe llegar al sector de carga de *containers* (●), ¿cuál debe ser el recorrido, según el plano cartesiano, desde su casa?

4. Identifica y describe la posición de cada figura en el plano cartesiano. Revisa el ejemplo.

Trapezio isósceles $JKLM$. Ubicado en los cuadrantes I y II.
 Vértices: $J(-3, 1)$; $K(1, 1)$; $L(0, 3)$ y $M(-2, 3)$.

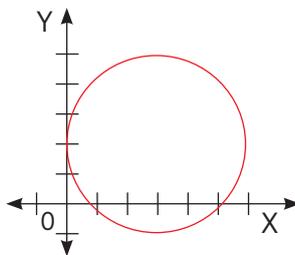


Practica ingresando el código T20M7BP148A en www.enlacesmineduc.cl

5. Determina qué figuras forman los siguientes pares ordenados y en qué cuadrante se encuentran.
- $A(2, 2)$; $B(4, 2)$; $C(3, 5)$
 - $F(-4, 2)$; $G(0, 2)$; $H(1, 4)$; $I(-3, 4)$
 - $L(-5, -5)$; $M(-2, -5)$; $N(-2, -2)$; $O(-5, -2)$
 - $P(2, -1)$; $Q(5, -1)$; $R(5, 1)$; $T(2, 1)$
 - En las figuras que presentan segmentos paralelos, ¿qué regularidad observas en sus coordenadas?

Dibuja un plano cartesiano con valores entre -5 y 5 en cada eje.

6. Resuelve los problemas.
- Las coordenadas del punto $A(4, 7)$ han cambiado: el valor de la abscisa se duplicó y el de la ordenada disminuyó 4 unidades. ¿Cuáles son las coordenadas del nuevo punto?
 - Si los extremos de una de las diagonales de un rectángulo son $(1, 2)$ y $(7, 5)$, y uno de sus vértices es $(7, 2)$, ¿cuáles son los vértices del rectángulo?
7. Diseña un procedimiento que te permita dibujar la siguiente circunferencia en el plano cartesiano. ¿Qué información deberías conocer de la circunferencia para marcar cualquiera de sus puntos en el plano?

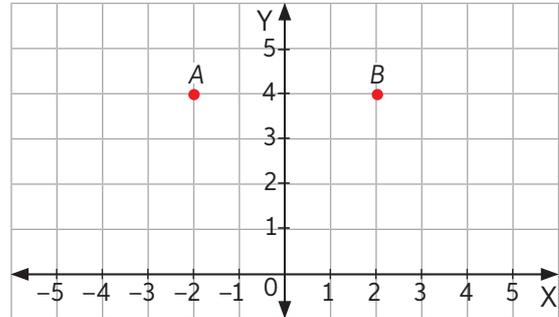


- ¿El procedimiento diseñado será el único para llegar a la respuesta de la actividad? En parejas, comenten su respuesta.

8. **Desafío** Considerando los cuatro pares ordenados que podrían ser los vértices de un cuadrado, ¿cómo puedes saber qué coordenadas debes unir para formar un lado vertical del cuadrado? ¿Sucederá lo mismo con un lado horizontal?

9. Considera los puntos A y B como vértices en la construcción y responde:

- Si se forma un triángulo rectángulo en A y su altura respectiva es 3 unidades, ¿qué coordenadas (en \mathbb{Z}) podría tener el tercer vértice?
- Si se construye un cuadrado, ¿qué coordenadas tendrían los otros dos vértices? ¿Existen más opciones? Justifica.
- ¿Es posible formar un triángulo equilátero agregando un tercer punto?, ¿y uno isósceles? Justifica.

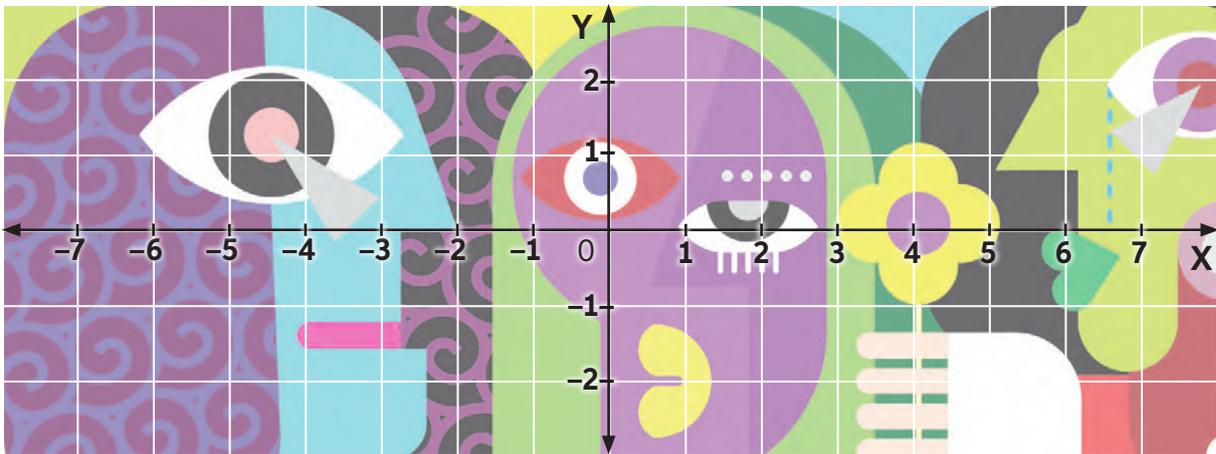


81 y 82

Artes visuales

10. La siguiente imagen es una muestra de arte abstracto.

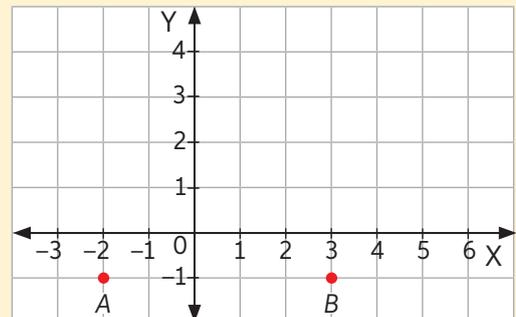
- Reproduce la obra en una hoja blanca guiándote con el plano cartesiano.



- ¿Qué coordenadas fueron tu guía para copiar la imagen? ¿Por qué?

Para concluir

- Al unir los puntos A y B del plano, se forma la base de un trapecio isósceles que tiene una altura de 3 unidades. ¿Cuáles podrían ser las coordenadas de la figura? Explica paso a paso el procedimiento seguido para responder.
- ¿Qué estrategia utilizas para ubicar un par ordenado en el plano cartesiano? ¿Existirá más de una?
- ¿Cometiste algún error frecuente? ¿Qué aprendiste a partir de él y qué harías para remediarlo?

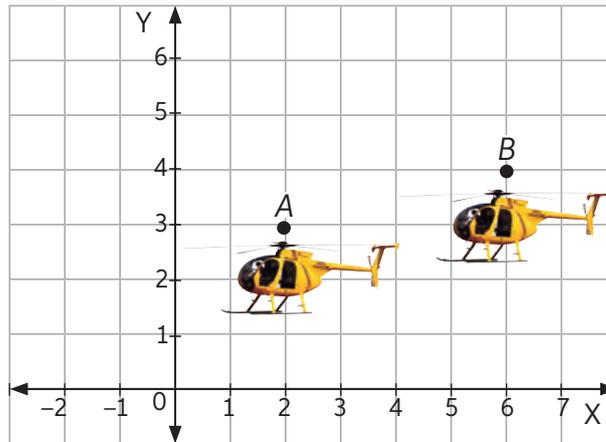


Vectores

Objetivo: Identificar vectores en el plano cartesiano.

- ¿Cómo describirías el movimiento en un plano?
- ¿Cómo graficarías un desplazamiento?

- Un helicóptero se desplaza hacia nuevas posiciones. ¿Cómo podrías representar el desplazamiento del helicóptero en el plano cartesiano?



Paso 1: Identifica el punto final (B) e inicial (A) del desplazamiento.

La **abscisa** del punto A se incrementa en **4 unidades** y su **ordenada** se incrementa en **1 unidad**, por lo tanto:

El punto inicial es (2, 3) y el punto final es (2 + 4, 3 + 1).

- ¿Cuál es el punto resultante de la operación propuesta en el paso 1?

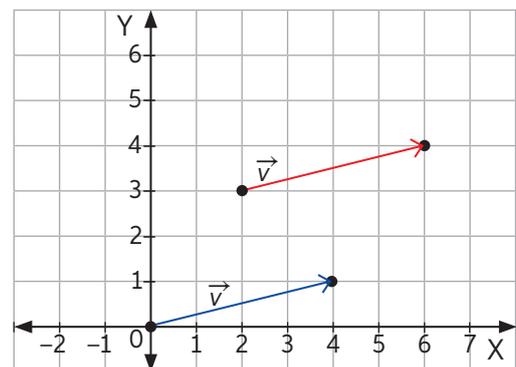
Paso 2: Representa el desplazamiento mediante un vector \vec{v} . La posición inicial del avión corresponderá al inicio del vector y la posición final al extremo de la flecha del vector.

Paso 3: Determina las coordenadas del vector de desplazamiento \vec{v} . Para ello, resta las abscisas de los puntos final e inicial y luego resta las ordenadas.

$$\vec{v} = \overset{\text{punto final}}{(6, 4)} - \underset{\text{punto inicial}}{(2, 3)} = (6 - 2, 4 - 3) = (4, 1)$$

Paso 4: Identifica el vector de desplazamiento. El vector desplazamiento \vec{v} es el que inicia en (0, 0) y finaliza en (4, 1), es decir, el vector trasladado al origen del plano cartesiano.

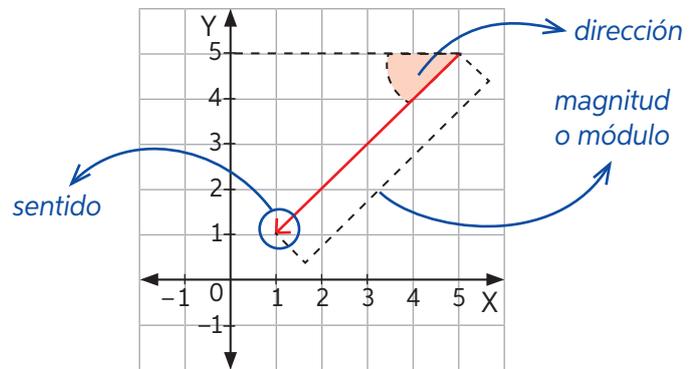
- ¿Por qué podemos decir que el vector que une A y B es equivalente al vector de desplazamiento?



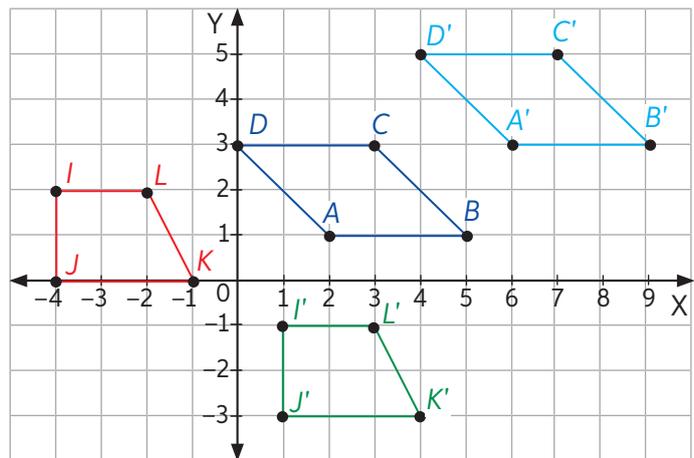
Un **vector** \vec{v} es un segmento de recta dirigido que tiene cierta dirección, sentido y módulo o magnitud.

El módulo es la longitud del vector, la dirección es el ángulo que forma con una recta horizontal y el sentido es hacia dónde va dirigido en esa recta.

Se llama **vector desplazamiento** cuando separa un punto inicial y otro final en cierta distancia. El punto final también se denomina **imagen**.



2. A partir de la imagen, responde:
- Determina los vectores desplazamiento de las siguientes figuras. Considera las letras con comilla como imagen.
 - ¿Cuáles serían los vectores desplazamiento si las imágenes fueran las figuras iniciales desplazadas?



3. Construye las figuras y traslada cada vértice según el vector dado. Luego, identifica las coordenadas de las imágenes.
- Figura 1: $E(1, 1)$, $F(4, 1)$, $G(2, 4)$. Vector: $\vec{p} = (4, 2)$.
 - Figura 2: $J(5, 1)$, $L(2, 1)$, $M(2, 3)$, $N(5, 3)$. Vector: $\vec{r} = (6, 3)$.
- ¿Qué relación tienen las coordenadas x de un vértice, su imagen y el vector desplazamiento? ¿Sucede lo mismo con las coordenadas y ?
4. **Desafío** Si solo conoces las coordenadas de un punto y de su imagen, ¿cómo determinarías las coordenadas del vector desplazamiento? Explica.

Para concluir

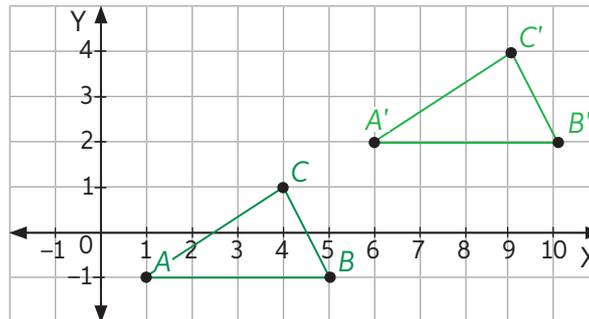
- ¿Cuál es la imagen de punto $(4, 6)$ si se desplaza con el vector $\vec{v} = (5, 1)$? Explica tu procedimiento paso a paso.
- ¿Qué estrategia utilizas para encontrar los vectores desplazamiento? ¿Existirá otra forma de realizar ese procedimiento?
- De todas las actividades, ¿cuál te pareció más difícil? Fundamenta.



83 y 84

Realiza las actividades planteadas a continuación. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

- Representa las figuras en un plano cartesiano:
 - $A(-3, 1), B(1, 1), C(2, 3), D(0, 3)$.
 - $E(1, -4), F(3, -4), G(2, -1)$.
 - $J(5, -2), K(8, -2), L(8, 1), M(5, 1)$.
 - $N(1, -2), O(-3, -1), H(-4, -2), I(-3, -4)$.
- Determina el vector traslación del triángulo ABC:



- Si el paralelogramo $P(4, 2), Q(6, 2), R(5, 4), S(3, 4)$ se desplaza según el vector $\vec{v} = (-3, -1)$, ¿cuáles serán las coordenadas de la figura imagen?
- Observa la situación y realiza las actividades solicitadas.

En la Zona Sur de Chile habita el pingüino magallánico, un ave que nada a gran velocidad y se zambulle desde elevadas alturas.



- Recrea en un plano cartesiano, con puntos y vectores, la siguiente situación: Usa solo el cuadrante IV y toma como posición inicial el punto $(0, 0)$.
 - Un pingüino se sumerge en el mar. En este movimiento se desplaza cinco lugares hacia abajo y dos lugares a la derecha.
- ¿Cuáles son las coordenadas del vector desplazamiento que representa el movimiento?

Reflexiono

- Elabora una tabla donde describas lo que te resultó sencillo y lo que te trajo dificultades en relación con los contenidos de la Lección.
- Elige las rutinas que te puedan ayudar a mejorar tus debilidades.

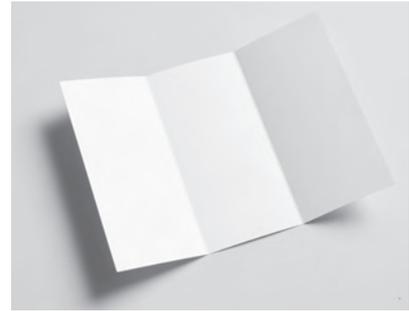


Rectas paralelas y perpendiculares

Objetivo: Construir rectas paralelas y perpendiculares.

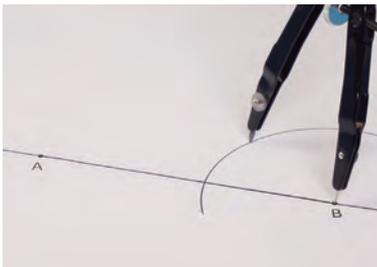
- ¿Cuánto mide un ángulo recto? ¿Con qué figura se representa?
 ¿De cuántas maneras se pueden posicionar dos rectas en un plano?
 ¿En qué objetos o lugares cotidianos has visto rectas?

1. Raúl desea hacer un tríptico para entregar información al curso en una disertación. Guiándose por las líneas de los bordes, dobla la hoja en tres partes.
 - a. ¿Cómo son las líneas que dividen el tríptico? ¿Qué relación tienen con las líneas del borde superior?
 - b. Si se dobla el tríptico por la mitad cruzando los dobleces, ¿qué relación habría entre todas las líneas?

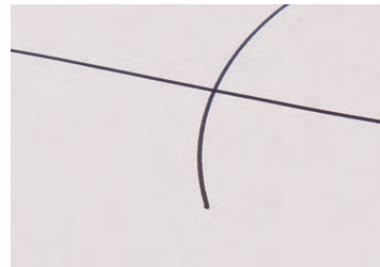


2. Replica la siguiente actividad con regla y compás en una hoja blanca.

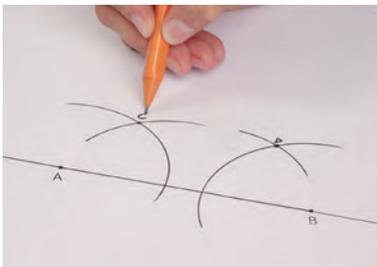
Paso 1: Marca los puntos A y B , y traza una recta que los contenga. Luego, en el punto B , traza un arco de circunferencia de cualquier radio.



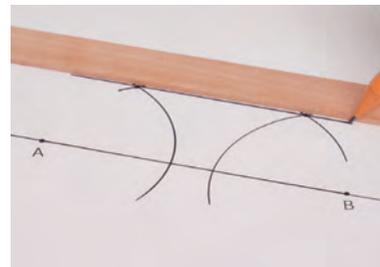
Paso 2: Desde la intersección con la recta, traza otro arco de circunferencia manteniendo la misma medida y marca la intersección con la letra D .



Paso 3: Realiza el mismo procedimiento en el punto A . Luego, marca el punto de intersección con la letra C .



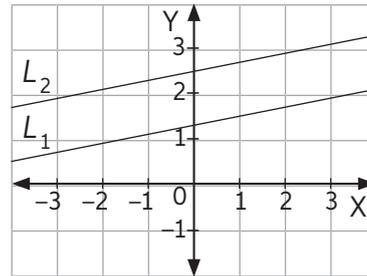
Paso 4: Une los puntos C y D con una regla. Luego, mide en tres puntos distintos la distancia que separa las dos rectas.



- a. ¿A qué distancia se encuentra una recta de la otra?
- b. Si extendieras las líneas, ¿crees que podrían cruzarse en un algún punto?

Las rectas paralelas son aquellas que se encuentran en un mismo plano y son equidistantes, es decir, se encuentran siempre a la misma distancia una de la otra. Por lo tanto, nunca se intersecarán, ya que no poseen puntos en común.

$$L_1 // L_2$$



➤ ¿En que contextos y situaciones observas líneas paralelas? Escribe tres.

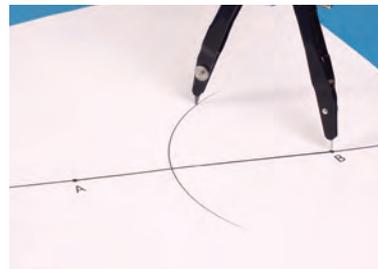
3. Camilo decorará su dormitorio con diseños de su creación. Uno de ellos requiere el cruce de dos líneas de forma perpendicular y cuenta solo con una regla no graduada y un compás.

a. Replica en una hoja de block los siguientes pasos:

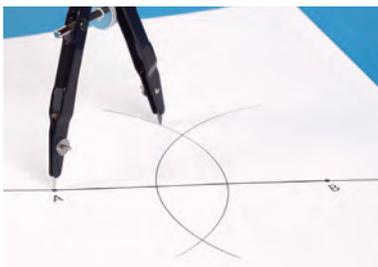
Paso 1: Marca los puntos A y B. Luego, dibuja con una regla una recta que contenga los dos puntos.



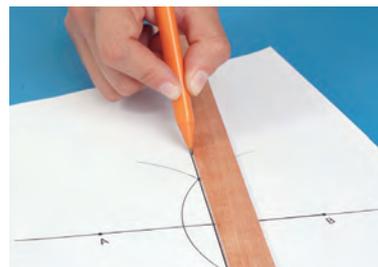
Paso 2: Con el compás, marca un radio desde B a una distancia mayor que la mitad del segmento AB. Luego, dibuja un arco de circunferencia.



Paso 3: Con el mismo radio, dibuja un arco con el centro en el punto A.



Paso 4: Marca las intersección de los arcos y traza una recta.

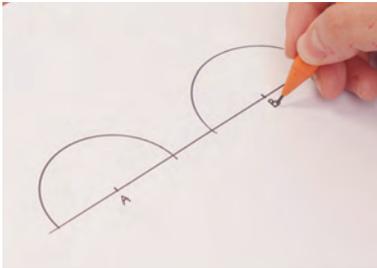


- b. ¿Cómo podemos verificar si efectivamente las rectas son perpendiculares?
- c. ¿Cuál crees que es el propósito de este paso a paso? ¿Para qué crees que lo utilizan en la vida cotidiana?
- d. Mide los ángulos formados con un transportador. ¿Cuánto mide cada uno?

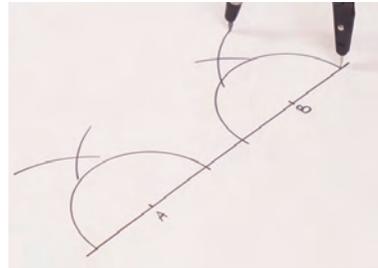
Las rectas perpendiculares (\perp) son aquellas que se encuentran en un mismo plano y se intersecan en un punto, formando 4 ángulos rectos.

4. **Desafío** Dos líneas, L_1 y L_2 , son perpendiculares. Si se traza una línea L_3 perpendicular a L_2 , ¿qué relación tendrá L_1 con L_3 ? Comprueba tu resultado haciendo dobleces con una hoja.
5. Construye con regla y compás el rectángulo de 8 cm de largo y 5 cm de ancho siguiendo estos pasos:

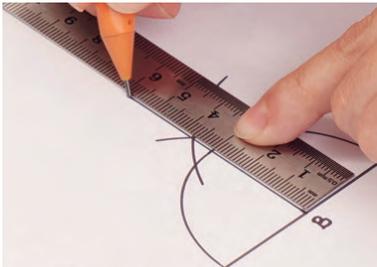
Paso 1: En una recta marca los puntos A y B separados por 8 cm. Luego traza dos semicircunferencias de radio 3 cm y manten la apertura del compás.



Paso 2: En las intersecciones de las semicircunferencias marca un arco de circunferencia sobre los puntos A y B .



Paso 3: Une las intersecciones de los arcos con los puntos A y B . Marca una altura de 5 cm y traza una recta que será perpendicular al punto A y B .



Paso 4: Une con una recta los puntos C y D . Así obtendrás el rectángulo $ABCD$.



Dibuja las siguientes figuras utilizando los mismos procedimientos.

- Rectángulo $WXYZ$ de base 7 cm y altura 3 cm.
 - Una ventana.
 - Rectángulo $FGHI$ de base 2 cm y altura 5 cm.
 - Una escalera.
- Además de la estrategia mostrada, ¿de qué otra forma podrías construir un rectángulo con la certeza de que tenga 4 ángulos rectos?

Para concluir

- Resume los procesos de construcción de rectas paralelas y perpendiculares.
- ¿Son útiles las estrategias mostradas en el tema? ¿Consideras que podrías encontrar una estrategia mejor?, ¿cuál?
- ¿Aprendiste los contenidos propuestos o crees que debes reforzar? Justifica.



86 y 87

Segmentos y figuras congruentes

Objetivo: Construir segmentos y figuras congruentes.

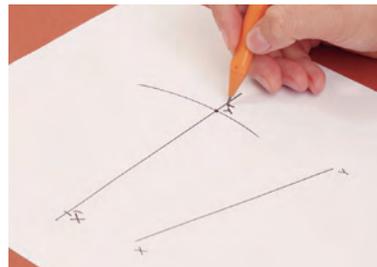
- ¿Cuáles son todos los elementos que componen un triángulo?
- ¿Con qué información puedes copiar un triángulo?

1. Sigue los pasos para construir un segmento congruente para cada caso utilizando compás y regla no graduada.

Paso 1: Dado un segmento XY , traza una recta que no lo contenga y dibuja un punto cualquiera en ella. Nómbralo como X' .



Paso 2: Considerando la abertura del compás igual a la distancia XY , dibuja el punto Y' en la recta. El segmento $X'Y'$ es de igual longitud que el segmento XY , es decir, son congruentes.



- a.
- b.
- c.
- d.

➤ ¿De qué otra forma dibujarías segmentos congruentes?

Dos segmentos son **congruentes** si tienen la misma medida.
 Si \overline{AB} y \overline{CD} son dos segmentos congruentes, se utiliza la siguiente notación:

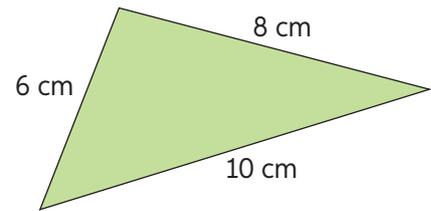
$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Lengua y literatura

2. Investiga la etimología de la palabra congruencia y verifica cuál es la relación entre lo aprendido y su origen. Compara tu análisis con el de un compañero.

3. Violeta está dibujando el plano de una plaza donde pondrá áreas verdes en forma de triángulo. Para ello dibujará triángulos congruentes al de la imagen.

Observa el procedimiento de Violeta y realiza las actividades a continuación.



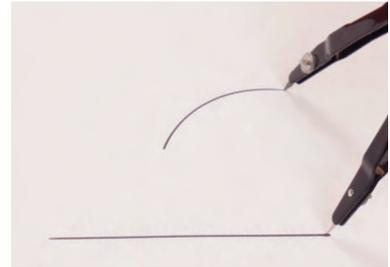
Paso 1:



Paso 2:



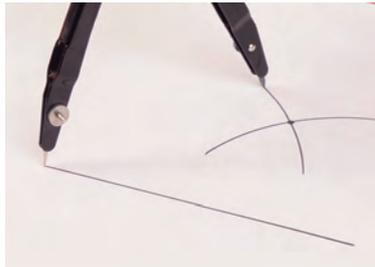
Paso 3:



Paso 4:



Paso 5:



Paso 6:



- Describe el paso a paso seguido por Violeta. Luego, construye un triángulo congruente con el de Violeta siguiendo los pasos.
 - ¿Qué similitud tiene el triángulo construido con el triángulo verde?
 - ¿De qué otra forma podrías dibujar un triángulo congruente con el inicial?
 - Si solo tuvieras información de la medida de dos ángulos internos y un lado del triángulo, ¿podrías dibujar el mismo triángulo?
4. **Desafío** Investiga cómo copiar segmentos y ángulos utilizando GeoGebra. Luego, describe paso a paso la estrategia y pide a un compañero que la lleve a cabo y concluya si se logra el objetivo.

Las **figuras congruentes** tienen igual dimensión (medidas) y forma sin importar posición u orientación.

Dos triángulos son **congruentes** si cumplen con alguno de los siguientes **criterios**:

Lado – Lado – Lado (LLL) \Rightarrow Sus lados correspondientes son congruentes.

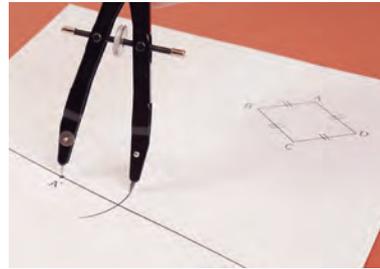
Lado – Ángulo – Lado (LAL) \Rightarrow Dos ángulos y el lado en común son congruentes.

Ángulo – Lado – Ángulo (ALA) \Rightarrow Dos ángulos correspondientes y el lado comprendido entre ellos son congruentes.

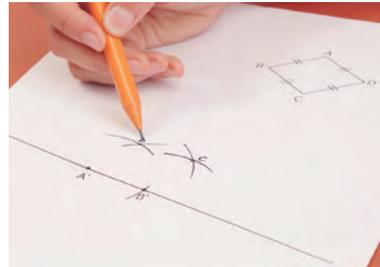
Lado – Lado – Ángulo (LLA) \Rightarrow Dos lados correspondientes y el ángulo opuesto mayor de estos lados son congruentes.

5. Sigue los pasos para construir una figura congruente con la dada verificando que se cumplen las condiciones:

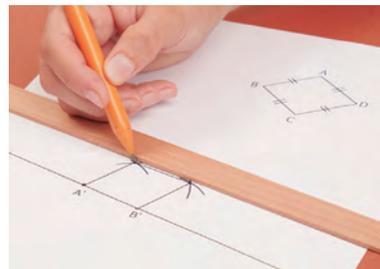
Paso 1: Dibuja el primer vértice. Luego, tomando la medida del lado con la apertura del compás, dibuja el segundo vértice.



Paso 2: Dibuja los vértices restantes haciendo centro con el compás en los puntos ya copiados de la figura original. Considera las aberturas correspondientes a las distancias de dichos vértices con respecto al punto que se quiere copiar de la figura original.



Paso 3: Dibuja los lados del polígono. Finalmente, traza los lados del polígono uniendo los vértices copiados. En este caso, la figura $A'B'C'D'$ es congruente con el polígono $ABCD$.

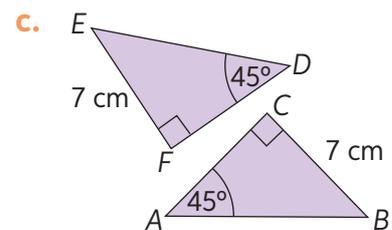
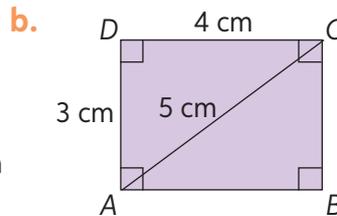
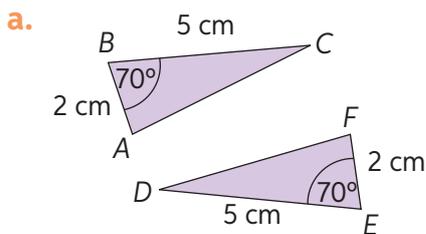


- a. Dibuja tres cuadriláteros. Luego, construye un cuadrilátero congruente con cada uno de los cuadriláteros dibujados siguiendo los pasos anteriores.



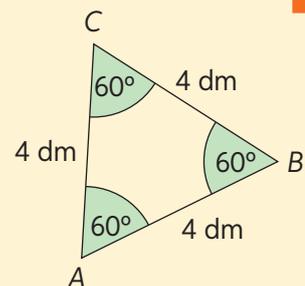
88 y 89

6. Determina mediante qué criterio(s) los siguientes pares de triángulos son congruentes.



Para concluir

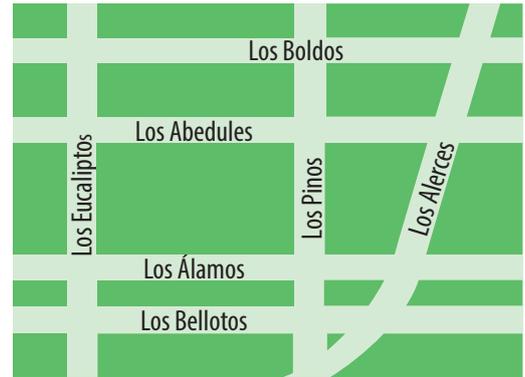
- a. Fabián quiere adivinar como es la figura que esconde Claudio. Hasta el momento solo sabe que es un triángulo. ¿Qué información necesita para que adivinar sus dimensiones? Considera los criterios de congruencia.
- b. ¿Cómo identificarías dos figuras congruentes?
- c. Si un compañero ausente en esta clase te pidiera que le explicarás el contenido, ¿podrías?, ¿Cómo lo harías?



Antes de continuar

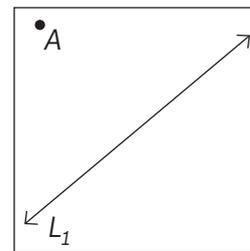
Evaluación intermedia

Realiza las actividades planteadas a continuación. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexión.

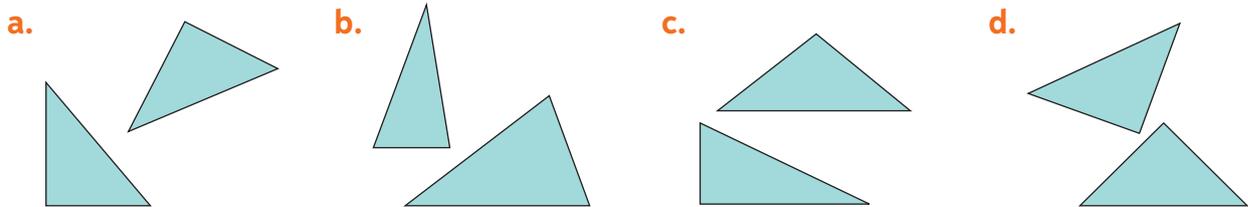


1. Observa el siguiente mapa y responde.
 - a. ¿Qué calles son paralelas a Los Álamos?
 - b. ¿Qué calles son perpendiculares a Los Eucaliptos?
 - c. ¿Qué calle no es paralela ni perpendicular a Los Abedules?
2. Realiza una composición que contenga solo rectas paralelas y perpendiculares. Utiliza regla no graduada y compás.

3. Observa la recta L_1 y el punto A.
 - a. ¿Es posible trazar dos rectas perpendiculares a L_1 que no sean coincidentes y que pasen por el punto A?
 - b. ¿Cuántas rectas perpendiculares a L_1 y que pasen por A se pueden dibujar?



4. Utilizando regla y transportador, determina cuál de los siguientes pares de triángulos son congruentes. Especifica qué criterio utilizaste.



5. Construye un ángulo congruente a cada uno de los dados. Utiliza regla no graduada y compás.



Reflexión

- ¿Cuál de las actividades de esta página te costó menos realizar? Fundamenta.
- ¿Cuál de las actividades de esta página te costó más realizar? ¿Qué hiciste para resolverla? Comenta.



Simetral o mediatriz

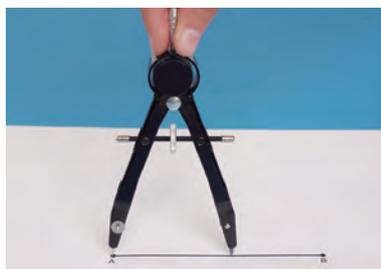
Objetivo: Construir simetrales y puntos medios de un triángulo.

¿Qué técnica utilizas para dividir un segmento en dos partes?

¿Qué significa que una figura este circunscrita a otra?

1. Traza un segmento con regla sin considerar la medida. Luego, sigue los pasos para encontrar el punto medio del mismo.

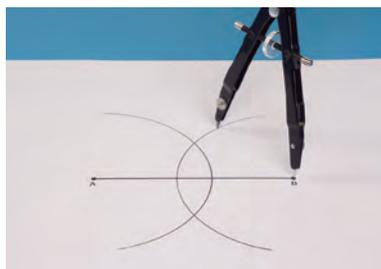
Paso 1: Abre el compás con una medida mayor que la distancia entre el punto medio del segmento y uno de sus extremos.



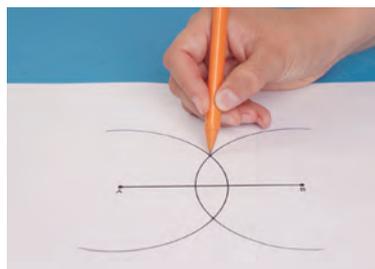
Paso 2: Haz centro en uno de los extremos del segmento y dibuja el arco.



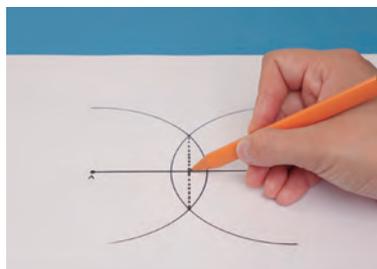
Paso 3: Con la misma abertura, haz centro en el otro extremo del segmento y dibuja otro arco.



Paso 4: Marca los puntos de intersección de los arcos y únelos con un segmento.

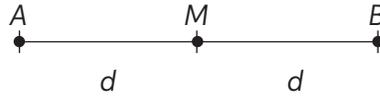


Paso 5: Marca el punto de intersección entre los segmentos. Dicho punto es el punto medio del segmento AB.



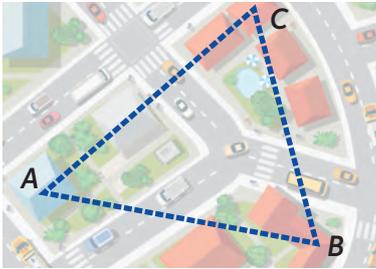
- a. ¿Hay una manera más eficiente de encontrar el punto medio de tu segmento?
- b. ¿A qué otra construcción de una recta se asemeja el proceso anterior?

El **punto medio** de un segmento es aquel que está a igual distancia (d) de los puntos inicial y final del segmento, y que además está contenido en él:

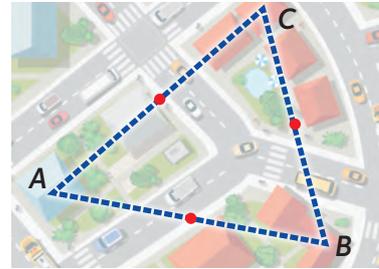


2. Tres amigas observan el mapa del sector donde viven. Desean fijar un punto de encuentro que quede a la misma distancia (lineal) de cada una de las viviendas.

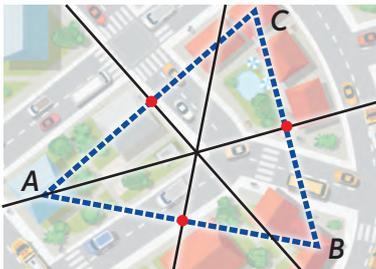
Paso 1: Unen las viviendas formando un triángulo.



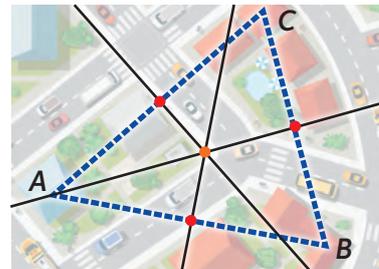
Paso 2: Marcan el punto medio de cada lado del triángulo.



Paso 3: Trazan una perpendicular a cada punto medio.



Paso 4: Marcan el punto de intersección de las tres rectas.



- Realiza el mismo procedimiento con un triángulo escaleno obtusángulo, uno rectángulo isósceles y uno acutángulo.
- ¿En qué posición queda el punto naranja? ¿Será igual en todos los triángulos con la misma clasificación?
- Traza una circunferencia con centro en el punto naranja. ¿Qué ocurre?

La **simetral** o **mediatriz** de un segmento es una recta que lo corta en su punto medio, de tal forma que la recta y el segmento son perpendiculares.

En un triángulo cualquiera, si se traza la simetral a cada lado del mismo, el punto de intersección se denomina **circuncentro**.

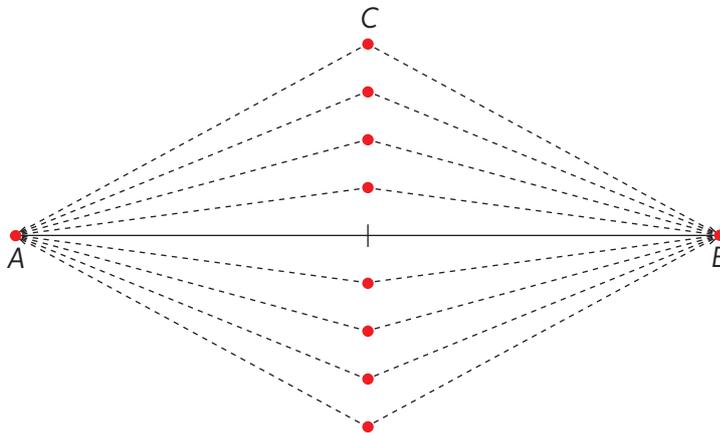
Si se tiene un triángulo con su circuncentro respectivo, es posible trazar la circunferencia circunscrita al triángulo, es decir, los vértices del triángulo pertenecerán a la circunferencia.

- ¿Qué usos cotidianos puedes darle a la simetral y al circuncentro?

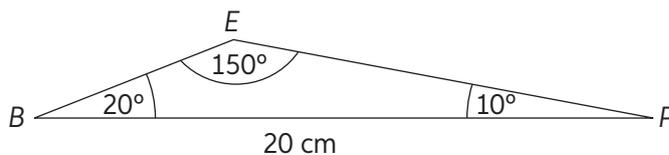
3. Identifica en cuáles de los siguientes triángulos se ha construido una simetral. Justifica tu respuesta.

$\triangle 1$	$\triangle 2$	$\triangle 3$	$\triangle 4$

4. Tres amigos juegan cartas en el patio a una distancia de 80 cm y a la misma distancia del mazo que está al centro de ellos.
- Representa la situación. Considera que 1 cm del dibujo son 10 cm reales.
 - Traza las simetrales y el circuncentro.
 - ¿A qué distancia del mazo de cartas se encuentra cada uno?
5. Observa la imagen en la que se muestra que el punto C se acerca y se aleja del punto medio del segmento AB.



- Mide las distancias de AC y BC en cada posición del punto C y compáralas.
 - ¿Qué puedes concluir con respecto a las medidas? ¿Cómo se relaciona esta actividad con la simetral?
6. Los puntos marcados representan la biblioteca (B), la escuela (E) y un parque (P). Al unir estos puntos, se forma un triángulo. Replica el dibujo en tu cuaderno considerando las medidas dadas y responde:

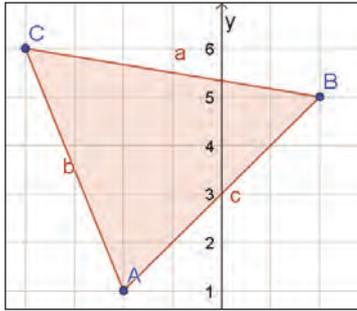


¿Dónde deben ubicar un quiosco si desean que se encuentre a la misma distancia de los tres puntos?

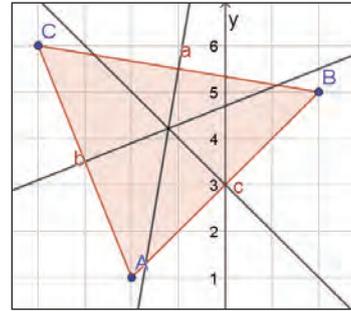
GeoGebra.

7. Realiza la siguiente actividad en GeoGebra.

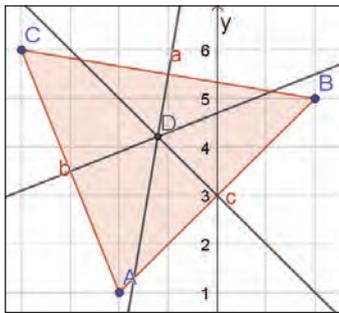
Paso 1: Con la herramienta  (polígono) crea un triángulo de vértices cualquiera.



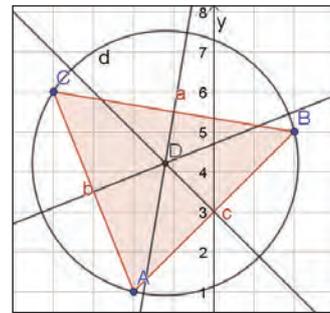
Paso 2: Luego, pincha en la herramienta  y selecciona la opción  (mediatriz). Haz clic en cada uno de los lados del triángulo.



Paso 3: Con , marca el punto D, que será el circuncentro del triángulo.



Paso 4: Por último, con la herramienta , pincha el punto D y cualquier vértice del triángulo para crear una circunferencia.



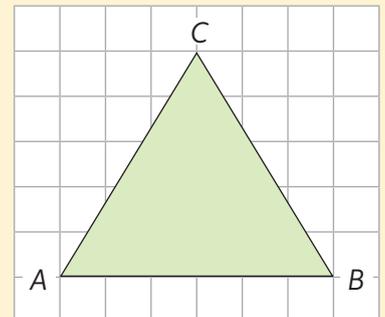
- ¿Cómo explicas que la circunferencia recorra los tres vértices si tú seleccionaste solo uno?
- Con la herramienta , pincha el vértice B y muévalo para modificar el triángulo. ¿Cómo son los triángulos cuyo circuncentro se encuentra en su interior, en uno de sus lados o fuera de la figura?



91 y 92

Para concluir

- Copia el triángulo y dibuja la circunferencia circunscrita.
 - ¿Cuántos cuadrados mide aproximadamente su diámetro?
 - Para trazar la simetral, ¿qué pasos previos debes realizar con regla y compás?
- ¿Qué estrategias te permitieron realizar las construcciones geométricas de mejor manera?
- ¿Qué actividad crees que sirvió más para la comprensión del contenido? Fundamenta tu respuesta.

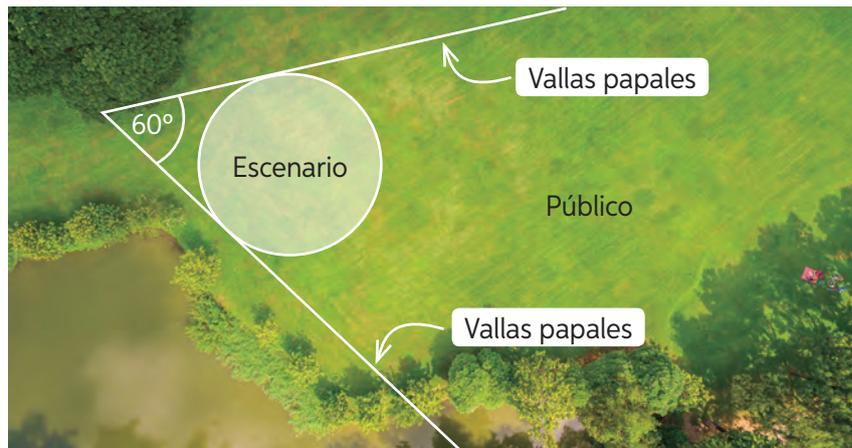


Bisectriz

Objetivo: Construir bisectrices con instrumentos geométricos y utilizando *software*.

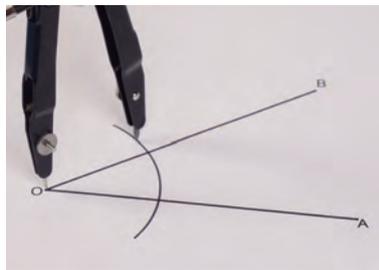
- ¿Cómo comprobarías que un ángulo está dividido en dos partes?
- ¿Qué significa que una figura esté inscrita en otra?

- Justo frente al escenario de un evento comunal, se necesita construir un pasillo que divida la superficie para el público en dos mitades iguales.

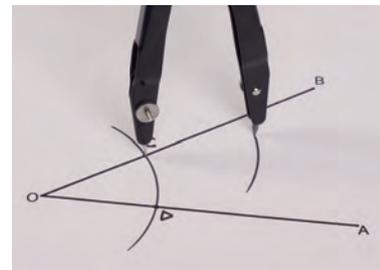


- Construye el mismo esquema en tu cuaderno y sigue los pasos a continuación. Utiliza solo regla y compás.

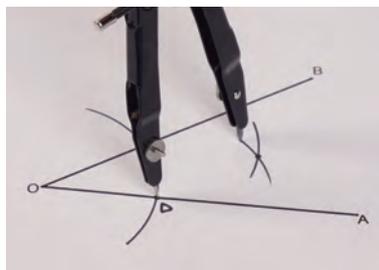
Paso 1: Traza un arco de circunferencia con centro en O . No modifies la apertura del compás.



Paso 2: Marca las intersecciones del arco con los puntos C y D .



Paso 3: Marca un arco de circunferencia con centro en C . Realiza lo mismo con D .



Paso 4: Une el punto de intersección con el vértice del ángulo.

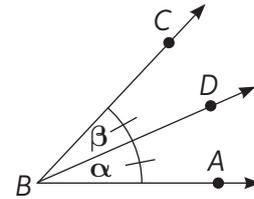


- Utilizando un transportador responde: ¿cuánto miden los ángulos que se formaron al trazar la línea del pasillo?, ¿cuál es su relación con el ángulo original?

La bisectriz de un ángulo es un rayo que lo divide en dos ángulos de igual medida.

$$\overrightarrow{BD} \text{ es bisectriz del } \angle ABC.$$

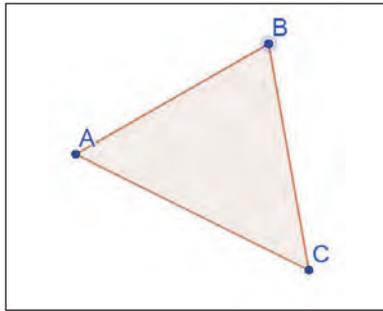
$$\alpha = \beta$$



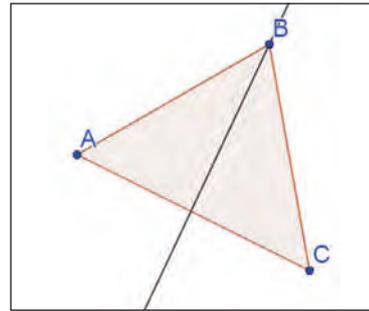
Geogebra.

2. Construye las bisectrices de un triángulo usando Geogebra.

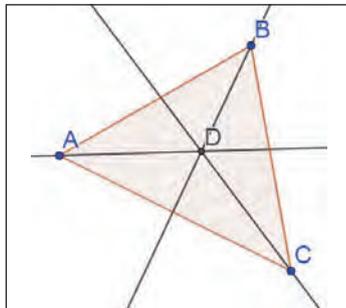
Paso 1: Crea un triángulo con la herramienta  (polígono).



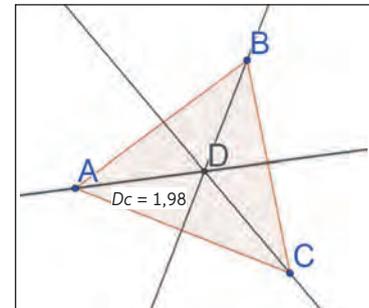
Paso 2: Pincha en el botón  y selecciona la opción  (bisectriz). Luego, marca los tres puntos de los vértices en sentido antihorario.



Paso 3: Repite este procedimiento hasta trazar las tres bisectrices. Marca la intersección con un punto. Usa .

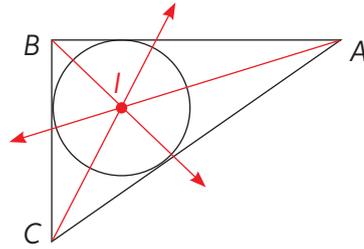


Paso 4: Con la herramienta  selecciona  (medir). Pincha el punto del centro y luego el de intersección de la recta con los lados.



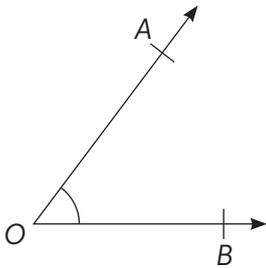
- ¿Cuánto miden los segmentos que unen el centro con los lados?
 - Con la herramienta  selecciona circunferencia (centro, radio). Pincha el centro D y luego, en la ventana que emerge para ingresar el valor del radio, pon la distancia que analizaste en la parte anterior.
- ¿Se podrá construir, dentro del triángulo, una circunferencia que sea de mayor tamaño que la que construiste?

Las bisectrices de un triángulo son los rayos que dividen sus ángulos interiores en dos ángulos congruentes. Estas se intersectan en un punto llamado **incentro** (I), que corresponde al centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

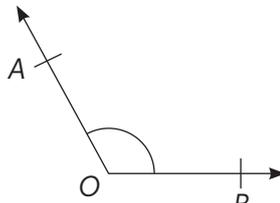


3. Dibuja los siguientes ángulos en tu cuaderno y construye la bisectriz usando regla y compás. Comprueba el resultado midiendo los ángulos con un transportador.

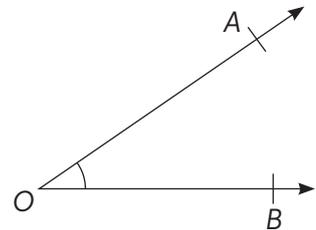
a.



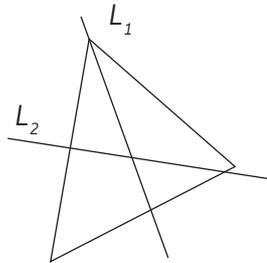
b.



c.

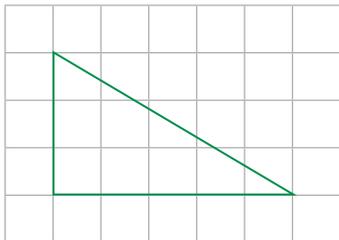


4. Analiza el siguiente triángulo. Determina cuál de las rectas es mediatriz y cuál es bisectriz. Justifica encontrando los ángulos correspondientes usando un transportador.

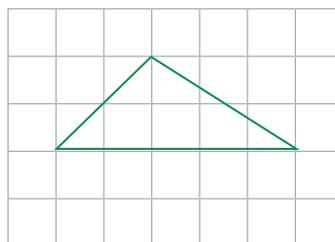


5. En tu cuaderno, dibuja los siguientes triángulos y construye la bisectriz, el incentro y la circunferencia inscrita.

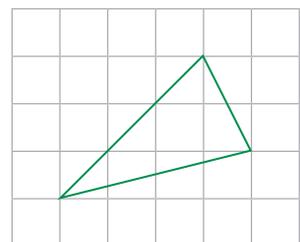
a.



b.

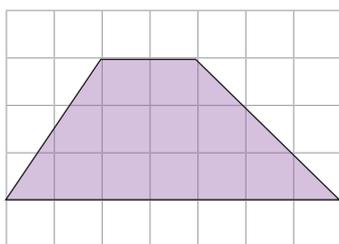


c.

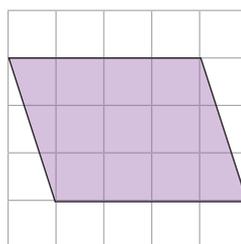


6. Dibuja las bisectrices de los siguientes cuadriláteros:

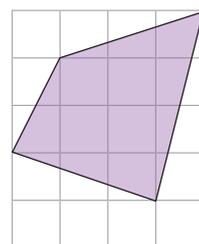
a.



b.



c.

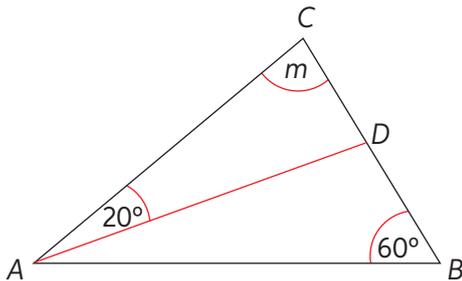


7. Un grupo de estudiantes desea dividir la sala de clases en cuatro partes trazando las bisectrices en las cuatro esquinas. La profesora se posiciona al centro, donde se unen todas las bisectrices.
- a. ¿A qué tipo de cuadrilátero debe corresponder la forma de la sala para que se cumpla la situación? Realiza una representación usando regla y compás.

Para responder, dibuja cuadriláteros como trapecios, paralelogramos, rombos y cuadrados.

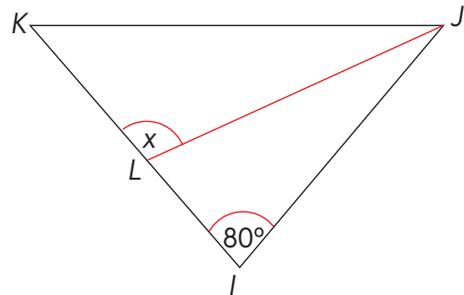
- b. ¿Es posible dibujar una circunferencia inscrita? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué otra recta se puede trazar que divida el terreno en dos partes iguales?
8. Calcula lo pedido utilizando la información entregada.

- a. En el $\triangle ABC$, \overline{AD} es bisectriz del $\sphericalangle BAC$.
¿Cuál es la medida de m ?

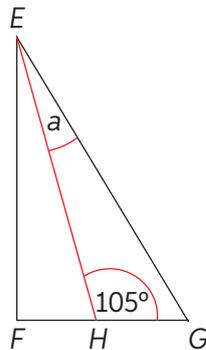


- c. En el $\triangle IJK$ isósceles de base \overline{KJ} se ha trazado la bisectriz \overline{JL} .

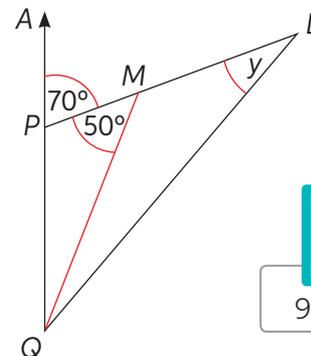
Calcula $\frac{1}{2}x$.



- b. En el $\triangle EFG$, $\overline{EF} \perp \overline{FG}$ y \overline{EH} es bisectriz del $\sphericalangle FEG$. ¿Cuál es el triple de la medida de a ?



- d. En la figura, A, P y Q son colineales y en el $\triangle QLP$ se ha trazado la bisectriz \overline{QM} . ¿Cuál es la medida de y ?



93 y 94

Para concluir

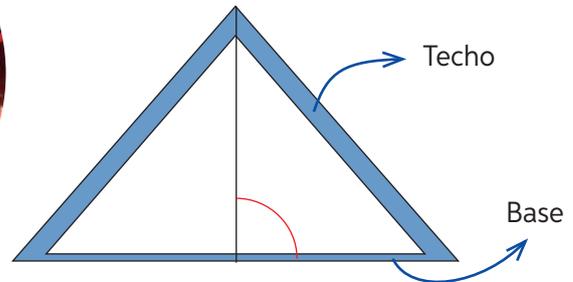
- a. ¿Cuál es la diferencia entre bisectriz y mediatriz?
- b. ¿Qué estrategias de las vistas en el tema bisectriz consideras que te ayudaron en tu aprendizaje? Comenta con un compañero argumentando tu respuesta.
- c. ¿Podrías explicar qué es y cómo se traza una bisectriz a un compañero que haya faltado a esta clase? Si tu respuesta es sí, ¿cómo lo harías? Si tu respuesta es no, ¿qué deberías reforzar?

Alturas

Objetivo: Construir alturas de un triángulo.

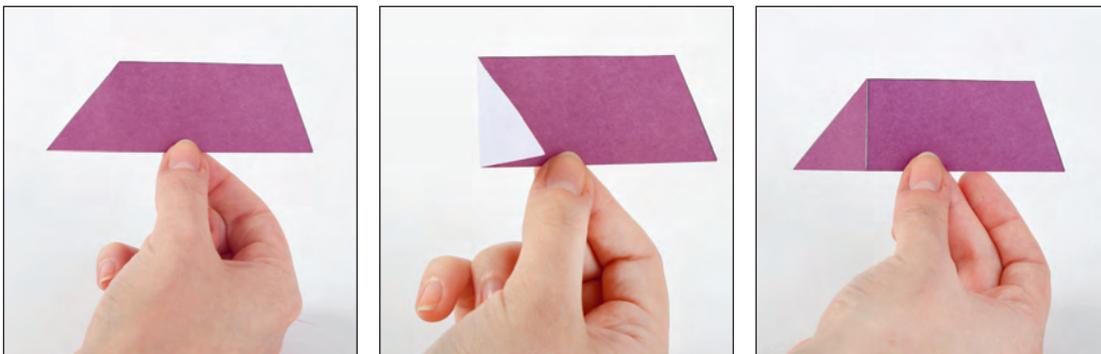
- ¿Cuál es la recta que define la menor distancia entre un punto y un segmento?
- ¿Qué medidas necesitas para calcular el área de un triángulo?
- ¿En qué contextos necesitar medir la altura de un objeto?

1. Las caídas del techo de una casa están construidas a diferentes ángulos de la horizontal.



Si un carpintero deja caer una piola con un plomo desde el vértice del techo hasta su base, ¿qué ángulo debe formar la piola con la base del techo.

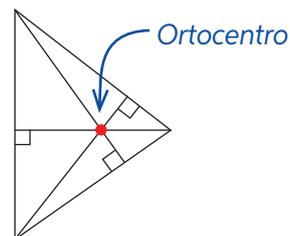
2. Analiza el dobléz que se realiza al siguiente cuadrilátero de papel:



- a. ¿Qué representa el segmento formado por el dobléz del papel?
- b. ¿Qué característica observaste que confirmó tu respuesta anterior?

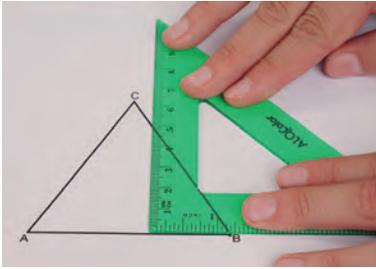
Las alturas de un triángulo son los segmentos que unen perpendicularmente un vértice con su lado opuesto o la prolongación de este.

Las alturas o sus prolongaciones se intersecan en un punto llamado ortocentro.

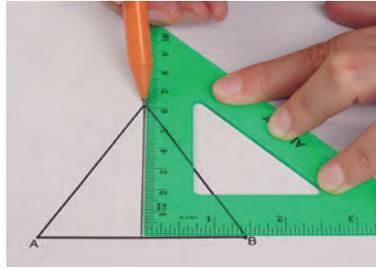


3. A partir de la definición anterior, observa las imágenes y describe el proceso para dibujar las alturas de un triángulo acutángulo utilizando regla y escuadra.

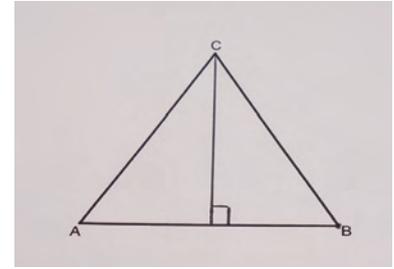
Paso 1:



Paso 2:

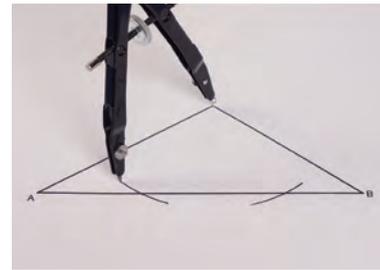


Paso 3:

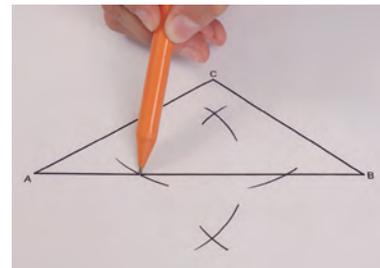


4. El siguiente es el proceso para construir la altura de un triángulo utilizando regla no graduada y compás.

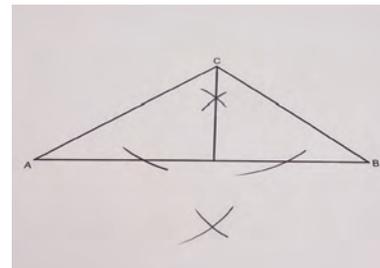
Paso 1: Construye un triángulo ABC . Luego, apoya el compás en el vértice C y marca dos arcos de circunferencia que crucen el lado AB , como muestra la imagen.



Paso 2: Fija la apertura del compás a una distancia menor que la anterior y dibuja otros dos arcos de circunferencia tomando como centros las intersecciones marcadas antes.



Paso 3: Traza una línea desde el vértice C hasta el lado AB en dirección del punto construido.



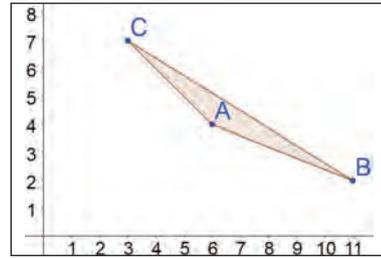
- ¿Qué ángulo forma el segmento construido con el lado AB ? Comprueba usando transportador.
- Repite el proceso con todas las alturas y determina el ortocentro.
- Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo y traza todas las alturas para determinar el ortocentro. ¿Dónde se encuentra?

Lección 15

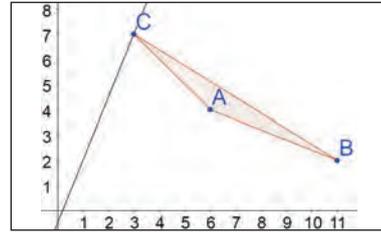
GeoGebra

5. Realiza la siguiente construcción para determinar el ortocentro de un triángulo.

Paso 1: Con la herramienta , construye un triángulo de vértices $A(6, 4)$, $B(11, 2)$ y $C(3, 7)$.



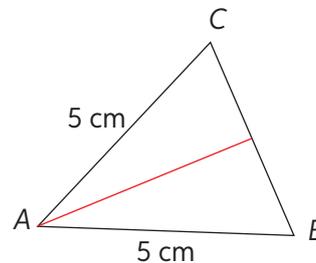
Paso 2: Con la herramienta , pincha en el vértice C y en el lado opuesto BA : se generará la recta que contiene la altura.



- Repite el procedimiento para trazar las 3 alturas.
- Determina en qué coordenada se ubica el ortocentro.
- ¿El ortocentro está dentro o fuera de la figura?
- Con la herramienta , mueve los vértices del triángulo y observa cómo cambia de posición el ortocentro. ¿En qué tipo de triángulos el ortocentro no está en la superficie del triángulo?

Para comprobar las distintas posiciones del ortocentro dependiendo de la clasificación del triángulo, ingresa el código **T20M7BP170A** en www.enlacesmineduc.cl

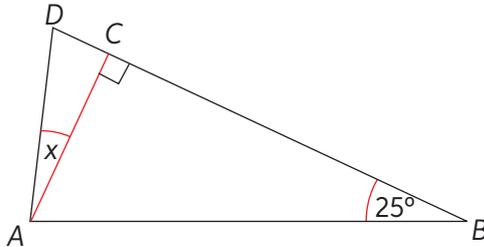
- En el triángulo ABC de la figura se ha trazado un segmento.
 - El segmento dibujado, ¿corresponde a una altura o a una bisectriz?
 - ¿Qué criterios utilizas para la identificación?
 - Justifica tus afirmaciones.
- Construye un triángulo ABC isósceles rectángulo en C .
 - Traza la altura desde \overline{AB} hasta el vértice C .
 - ¿Cuál es la clasificación de los triángulos que se forman? Justifica.



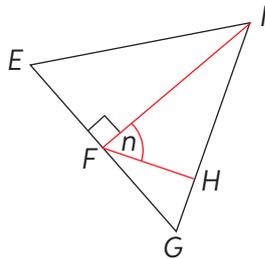
- En parejas analicen la pregunta y respondan: ¿es posible que el incentro y el ortocentro coincidan en un mismo triángulo? Fundamenta tu respuesta con un ejemplo o contraejemplo.
 - ¿Qué beneficios tiene trabajar en parejas? ¿Tuviste alguna complicación?
 - Hasta el momento, ¿qué tipo de problemas han sido más difíciles de resolver? Comenten en parejas.

9. Resuelve los siguientes problemas:

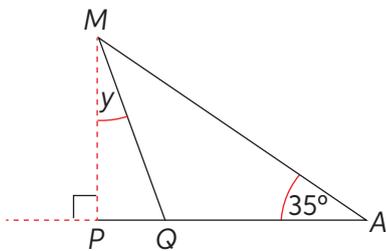
- a. En el triángulo ABD se ha trazado la altura AC . ¿Cuál es el doble de la medida de x si el ángulo BAD mide 80° ?



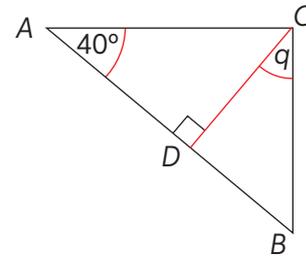
- b. El triángulo EGL es equilátero y IF es una de sus alturas. Si FH es altura del triángulo FGI , ¿cuál es el valor de la mitad de la medida n ?



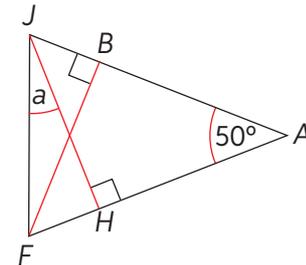
- c. En el triángulo QAM isósceles de base AM , MP es altura. ¿Cuál es el 25% de la medida de y ?



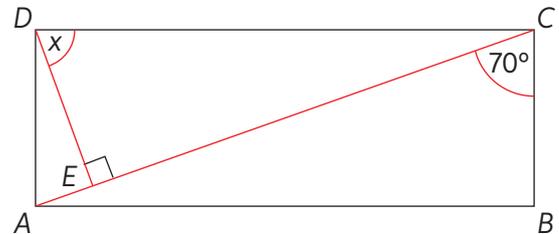
- d. El triángulo ABC es rectángulo en C . Si DC es altura, ¿cuál es la medida de q ?



- e. El triángulo FAJ es isósceles de base JF y se han trazado las alturas JH y FB desde los vértices J y F respectivamente. ¿Cuál es el triple de la medida de a ?



- f. En el rectángulo $ABCD$ se ha trazado la diagonal AC y la altura DE del triángulo ACD . ¿Cuál es la medida de x ?



Para concluir

- Alicia fabricó un cartel triangular de lados 2, 3 y 4 metros. Para instalarlo en el suelo, quiere apoyarlo en uno de los tres lados de tal manera que quede lo más alto posible. ¿Sobre qué lado debe ubicar su letrero? Explica paso a paso.
- ¿Cuál crees que es el proceso más sencillo para determinar la altura y su medida? Explica.
- ¿Con qué problemas o dificultades te encontraste a lo largo del tema Alturas? ¿Cómo pudiste superarlas?



95 y 96

Transversal de gravedad

Objetivo: Construir transversales de gravedad.

¿Cómo se denomina el punto que divide un segmento en dos partes iguales?

¿Cómo debe ser el punto donde se apoya un objeto para que esté en equilibrio?

1. Los platos chinos son un show circense que suele dejar maravillado al público.

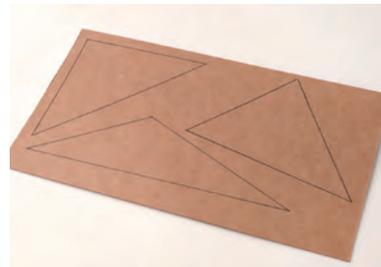
En grupos de tres personas, equilibrarán triángulos con palillos o palos de brocheta. Utilicen los materiales y sigan los pasos.

Materiales

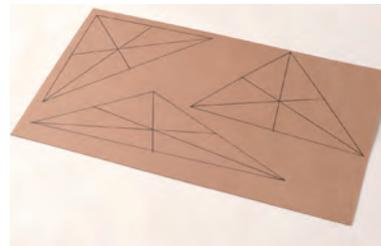
- Cartón piedra o madera
- Tijeras
- Regla
- Compás
- 3 palillos o palos de brocheta



- Paso 1:** Dibujen 3 triángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo) en el cartón con ayuda de regla y compás. Procuren que el tamaño de cada triángulo sea cercano a la mitad de una hoja de cuaderno.



- Paso 2:** Marquen el punto medio de cada lado de los triángulos y unan este punto con el vértice opuesto. Luego, marquen el punto de intersección de estos 3 segmentos.



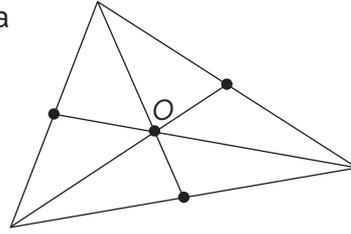
- Paso 3:** Recorten cada triángulo y equilíbralos en cada palillo, colocándolos en la punta de estos, justo en el punto de intersección.



- ¿Los triángulos se equilibran solo en ese punto? Compruébenlo tratando de equilibrarlos en otra parte de la superficie.

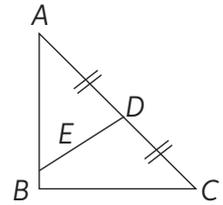
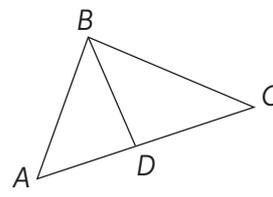
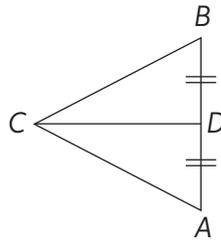
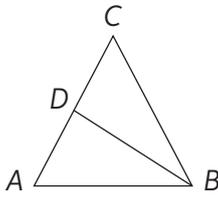
La transversal de gravedad es un segmento que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

El punto de intersección de las tres transversales de gravedad de un triángulo se denomina **baricentro** o **centro de gravedad**.



2. Observa los siguientes triángulos:

a.



b. Determina si en cada triángulo fue trazada la transversal de gravedad. Justifica tu respuesta en cada caso.

3. Dibuja un triángulo en tu cuaderno.

a. Construye las transversales de gravedad y marca el baricentro.

b. Mide la distancia desde un vértice al baricentro y desde al baricentro al punto medio del segmento opuesto.

c. ¿Qué relación observas en las dos distancias encontradas?

d. ¿Sucederá lo mismo con la mediatriz, la bisectriz o la altura? Investiga.

4. Dibuja un triángulo equilátero de 8 cm de lado.

a. Construye las transversales de gravedad.

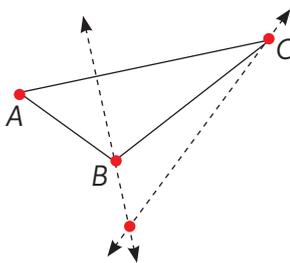
b. Con otro color dibuja las rectas que componen la mediatriz, la bisectriz y los segmentos de las alturas.

c. Marca el incentro, el ortocentro y el circuncentro. ¿Qué concluyes con respecto a la posición de las rectas, los segmentos y los puntos?

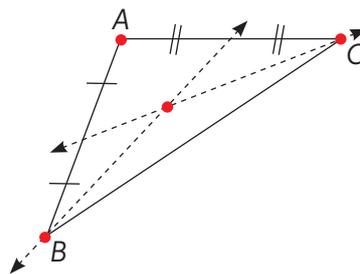
➤ ¿Cómo debería ser el triángulo para que el incentro, el ortocentro y el circuncentro coincidan?

5. Usando regla y compás, identifica qué rectas se han trazado en los siguientes triángulos.

a.



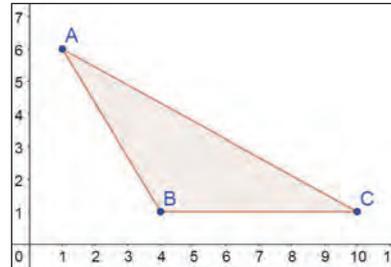
b.



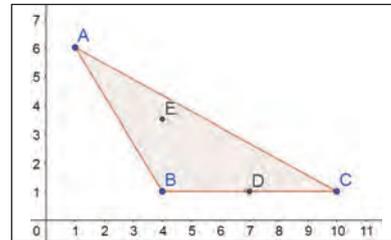
GeoGebra.

6. Realiza la siguiente construcción de un triángulo y sus transversales con GeoGebra. Luego, desarrolla las actividades a continuación.

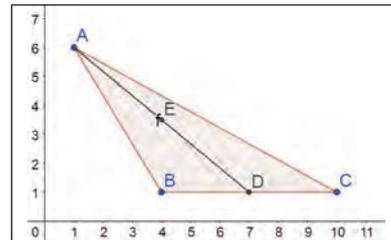
Paso 1: Pincha en  y construye un triángulo obtusángulo de vértices $A(1, 6)$, $B(4, 1)$ y $C(10, 1)$.



Paso 2: Selecciona  y luego  (medio o centro). Pincha un vértice, luego otro y se marcará el punto medio.



Paso 3: Selecciona  y luego  (segmento). Pincha sobre el vértice A y el punto medio H del lado opuesto.



- Marca el punto medio del resto de los lados del triángulo.
- Construye todas las transversales de gravedad. ¿En qué lugar se encuentra el baricentro?
- Con la herramienta , selecciona un vértice y muévelo para formar otro triángulo. ¿Es posible construir un triángulo cuyo baricentro se encuentre fuera de la figura?

7. **Desafío** Cristián afirma que en un triángulo rectángulo dos transversales de gravedad coinciden con los lados del triángulo. ¿Estás de acuerdo con la afirmación? ¿Es posible que eso suceda? ¿Hay otra recta o que cumpla la afirmación? Justifica tu respuesta con ejemplos.

Para concluir

- Construye un triángulo ABC escaleno obtusángulo y sus transversales de gravedad. Luego, marca el baricentro. Explica paso a paso tu procedimiento.
- ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de construir las transversales de gravedad con instrumentos geométricos?, ¿y con un software?
- ¿En qué procedimiento es más probable que cometas errores al construir transversales de gravedad con instrumentos geométricos? ¿Cómo lo evitarías?



97 y 98

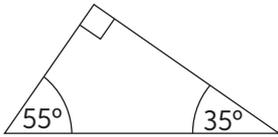
Antes de continuar

Evaluación intermedia

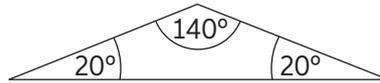
Realiza las actividades planteadas a continuación. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Dibuja los siguientes triángulos respetando las medidas dadas. Luego, construye sus mediatrices y traza la circunferencia circunscrita.

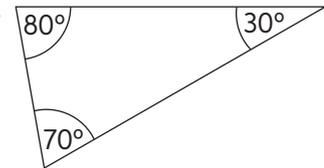
a.



b.



c.



2. Tres estudiantes lanzan una pelota que debe caer en una canasta ubicada a la misma distancia de cada uno.

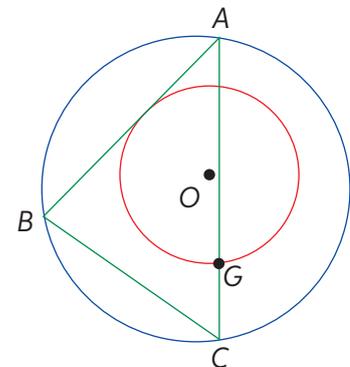
- Replica la situación en tu cuaderno dibujando un triángulo isósceles de lados 6 cm y base 8 cm.
- ¿Qué rectas debes construir para determinar la posición de la canasta?
- ¿Cómo se denomina el punto que representa la ubicación?



3. Dibuja nuevamente los triángulos de la primera actividad. Luego, determina sus alturas y transversales de gravedad, y determina sus respectivas intersecciones.

4. Analiza la imagen y evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica en cada caso.

- La circunferencia roja está inscrita en el triángulo ABC .
- La circunferencia azul está circunscrita en el triángulo ABC .
- El segmento AG es radio de la circunferencia roja.
- El segmento OG es radio de la circunferencia azul.



Reflexiono

- Evalúa tu aprendizaje realizando un resumen de los siguientes elementos del triángulo sin apoyo del texto ni otro elemento.

<ul style="list-style-type: none"> – Mediatriz – Altura 	<ul style="list-style-type: none"> – Bisectriz – Transversal de gravedad
---	--
- ¿Pudiste recordar todos los conceptos? ¿Qué podrías hacer para recordarlos siempre?



99

Síntesis

¿Qué es un diagrama de flujo?

Es un organizador gráfico, similar a un mapa conceptual, que se va expandiendo con preguntas cuya respuesta es sí o no. Las preguntas definen una ruta en el diagrama.

Es sencillo de armar: se escoge un tema central y las ideas principales se formulan como afirmaciones y se las conecta de forma coherente.

Observa el diagrama de flujo creado para reconocer polígonos y clasificarlos.



Ahora, hazlo tú

1. Continúa el diagrama en tu cuaderno desde el recuadro “Es un triángulo”. Piensa en las preguntas necesarias para la clasificación de triángulos y forma el diagrama.
2. Integra la circunferencia en el diagrama.
3. En parejas, compartan y analicen sus diagramas. ¿Qué aspectos consideró cada uno para crear su síntesis? ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre sus mapas?
4. **Desafío** Crea un diagrama con los elementos notables de un triángulo.

Repaso

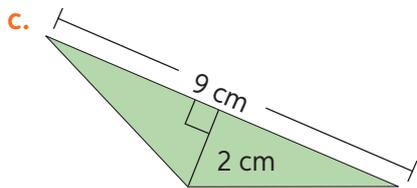
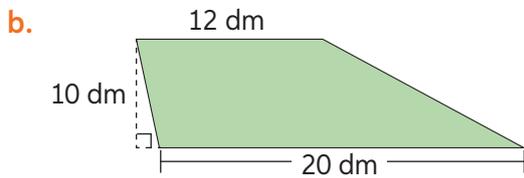
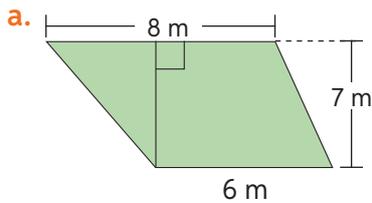
Realiza las siguientes actividades.

Lección 10: Polígonos

- Determina cuánto suman los ángulos interiores de los siguientes polígonos. Luego, calcula la medida de uno de sus ángulos exteriores.
 - Hexágono regular.
 - Decágono regular.
 - Polígono regular de 17 lados.

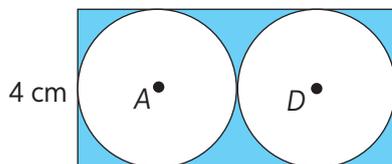
Lección 11: Áreas de polígonos

- Calcula el área de los siguientes polígonos:



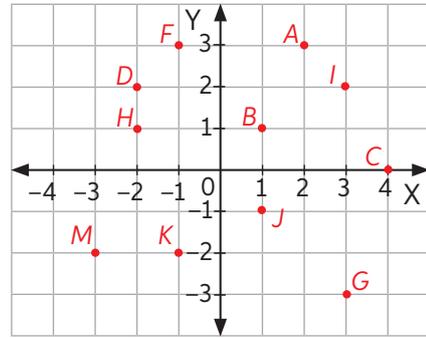
Lección 12: Círculo y circunferencia

- Estima el área y el perímetro de las siguientes circunferencias. Considera $\pi \approx 3,14$.
 - Circunferencia de radio 3,2 cm.
 - Circunferencia de diámetro 12,6 dm.
- ¿Cuál es el área del sector azul? Considera $\pi \approx 3,14$.

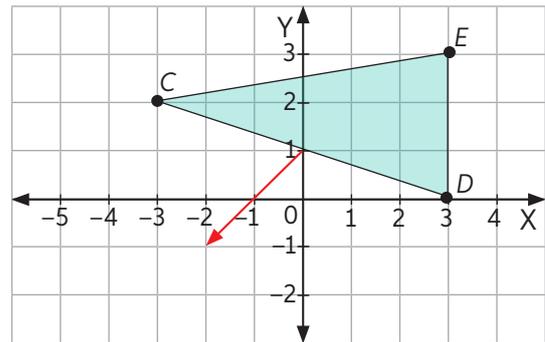


Lección 13: Posición y desplazamiento

- Determina las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos:



- Desplaza la figura y determina las coordenadas de la figura resultante.

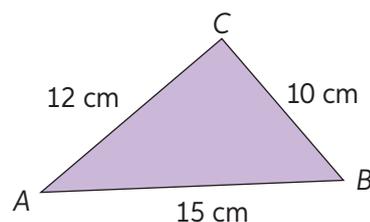


Lección 14: Rectas y congruencia

- Dibuja un segmento \overline{WX} en cualquier posición. Luego, construye una recta paralela y una recta perpendicular que pase por el punto A, que es punto medio.

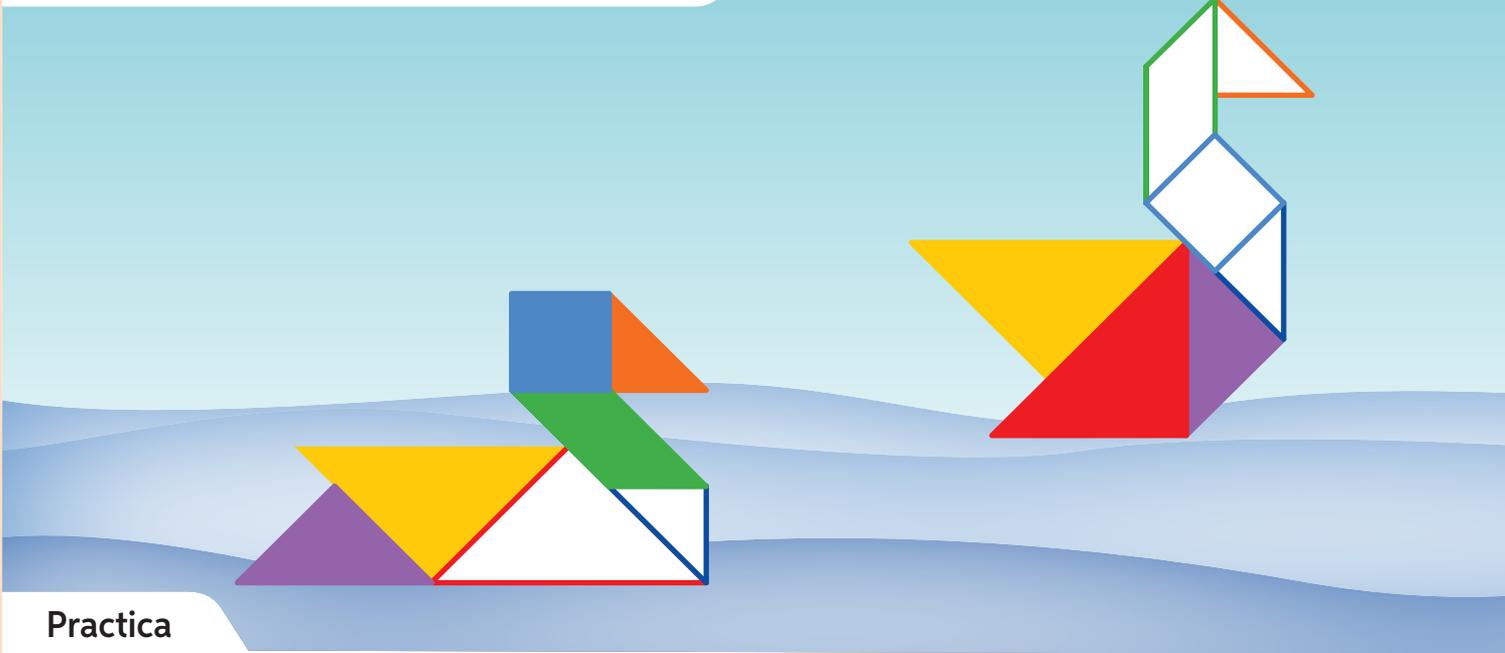
Lección 15: Elementos notables del triángulo

- Dibuja el triángulo respetando sus medidas. Luego, determina las mediatrices, bisectrices, alturas y transversales de gravedad junto con sus puntos de intersección.



¿Qué aprendí?

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.



Practica

Realiza las actividades a partir de la imagen principal.

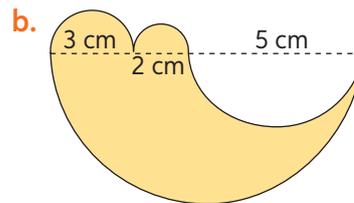
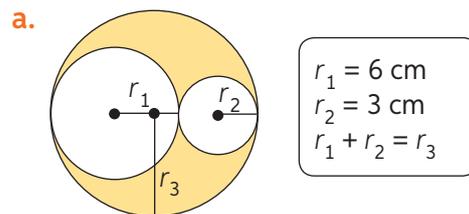
1. Calcula el área coloreada de cada figura.
2. Calcula el área de las superficies blancas de cada figura.
3. Calcula el área total de cada figura.
4. ¿Cómo son las áreas de las figuras entre sí?
¿Por qué sucede esto?
5. ¿Qué otra figura puedes formar utilizando el tangrama? ¿Qué ocurrirá con su área?

Realiza las actividades propuestas a continuación.

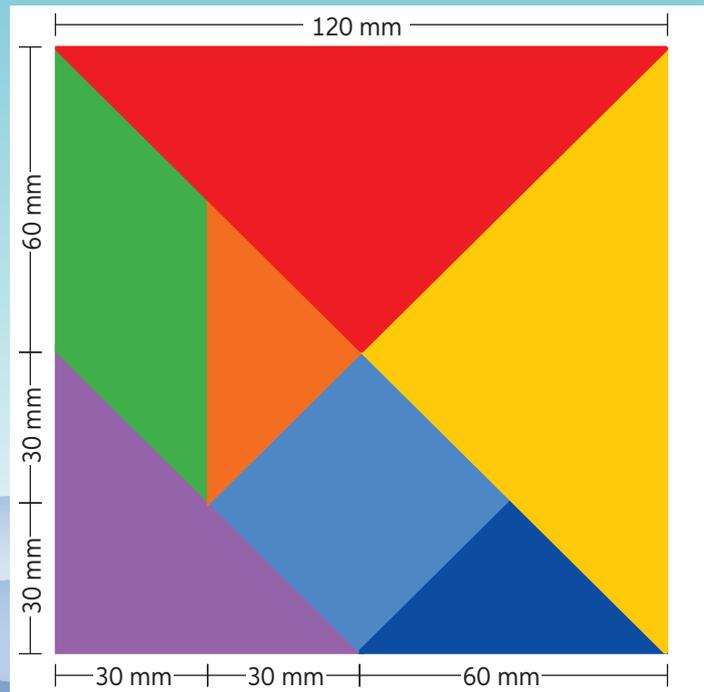
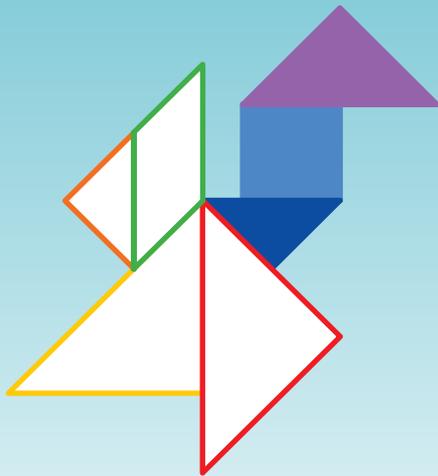
6. Indica cuánto suman las medidas de los ángulos interiores en las siguientes figuras:

a. Triángulo	d. Octógono
b. Pentágono	e. Eneágono
c. Hexágono	f. Icoságono

7. Estima el área sombreada. Considera que $\pi \approx 3,14$ y que las imágenes contienen circunferencias y semicircunferencias.



8. Indica el vector de traslación.
 - a. $A(2, 5) \Rightarrow A'(1, 9)$
 - b. $B(-9, -2) \Rightarrow B'(2, 7)$
9. Calcula el área (A) de cada polígono dadas las coordenadas de sus vértices.
 - a. $A(-5, -1), B(-5, -2), C(-1, -3), D(-1, 0)$
 - b. $O(-3, -4), P(3, -4), Q(2, -1), R(-2, -1)$

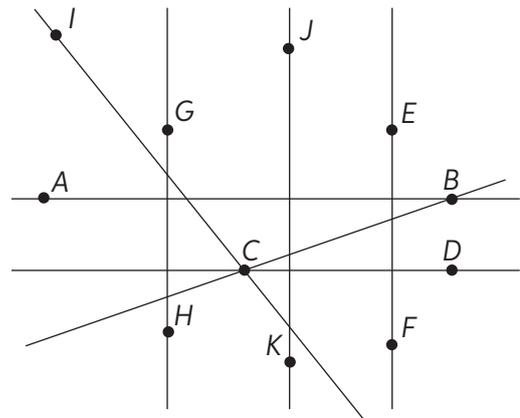


10. Construye un triángulo escaleno acutángulo y luego traza las simetrales de cada lado, las bisectrices, las transversales de gravedad y las alturas. Finalmente, dibuja las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo.

11. Observa la imagen y responde según lo solicitado.

- ¿Qué relación existe entre las rectas AB y CD ?
- ¿Qué relación existe entre las rectas GH y JK ?

c. ¿Qué rectas no son paralelas ni perpendiculares?



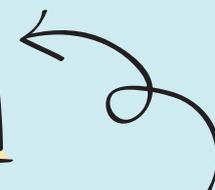
Reflexiono

- ¿Qué lecciones te costó más aprender? ¿Por qué crees que sucedió esto?
- ¿Tuvieron buenos resultados tus planes de mejora o formas de repaso de los contenidos débiles propuestos en las evaluaciones intermedias?
- ¿Qué tan interesante te resultó esta Unidad? ¿Para qué crees que es útil aprender sus contenidos?

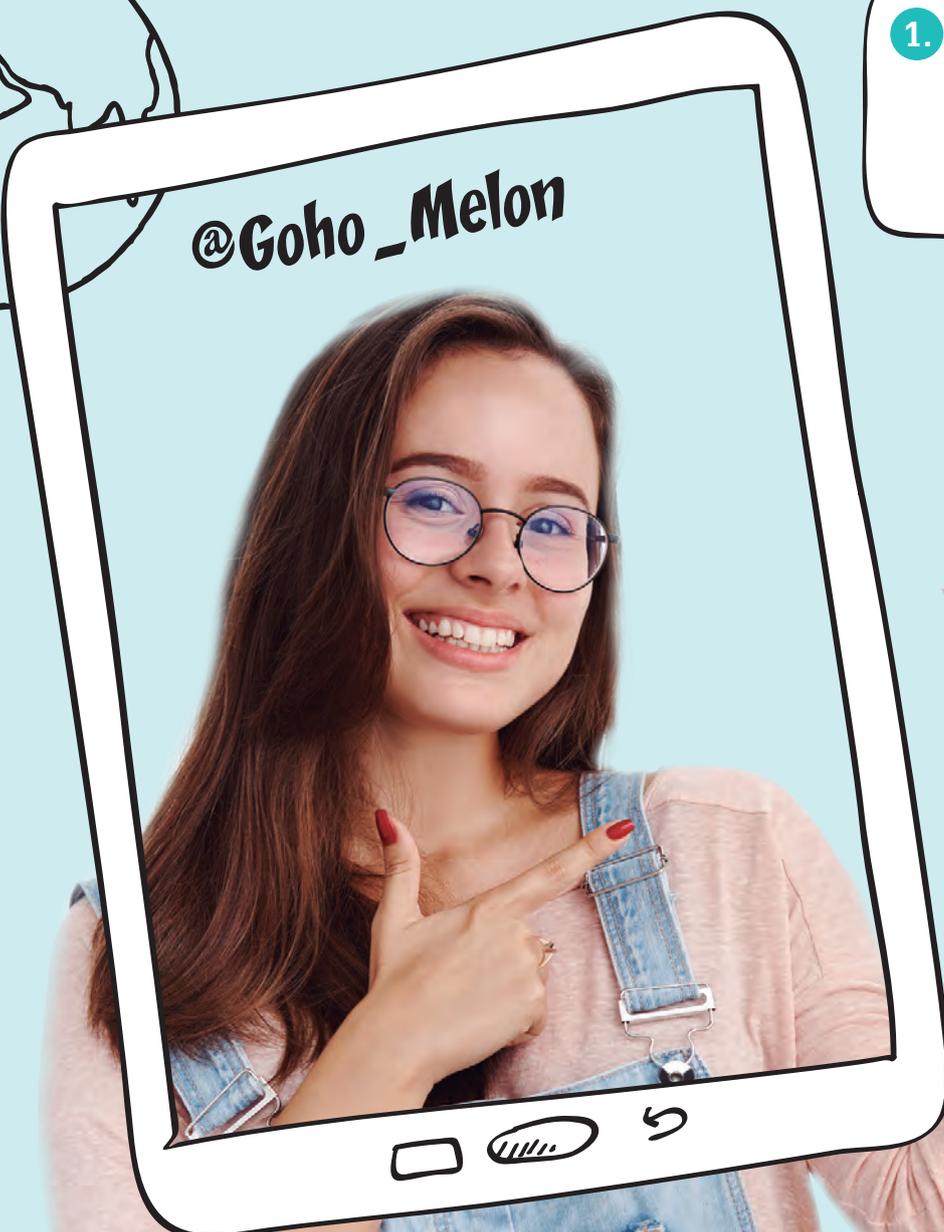
4

Probabilidad y estadística

¿Sabías que Instagram cuenta con más de 900 millones de usuarios activos? Goho_Melon es una *instagrammer* que tiene 200 000 seguidores. Semanalmente revisa las estadísticas de su cuenta.

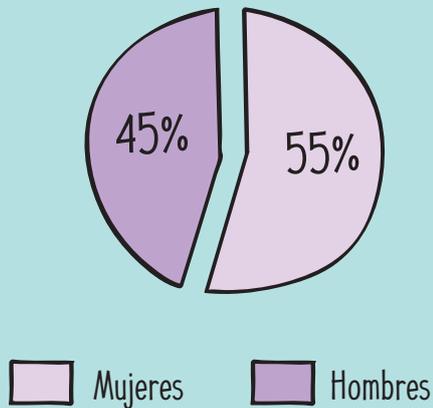


1. Si Goho_Melon realiza un sorteo, ¿qué posibilidad tiene cada seguidor de ganar un premio? Justifica tu respuesta.



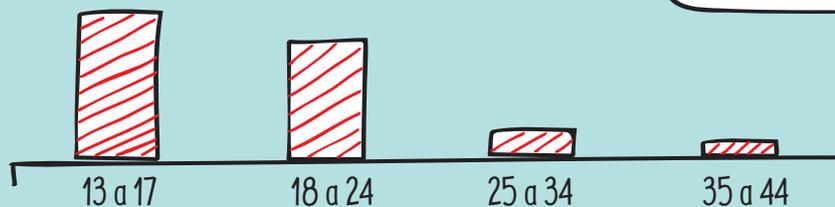
En Instagram, se pueden ver estadísticas de publicaciones, seguidores, historias y el perfil en general, ya sea diaria, semanal o anualmente.

Género



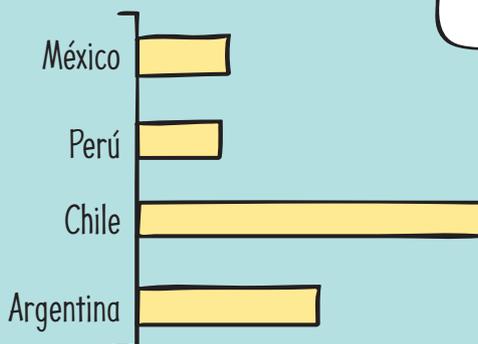
2. A partir de la información dada en estas páginas, ¿cuántas mujeres siguen a Goho_Melon?, ¿cuántos hombres?

Edad de seguidores



3. ¿Es posible saber la cantidad de personas de entre 13 y 17 años que siguen a Goho_Melon? ¿Por qué?

Lugares destacados



4. ¿En qué país cuenta con más seguidores?

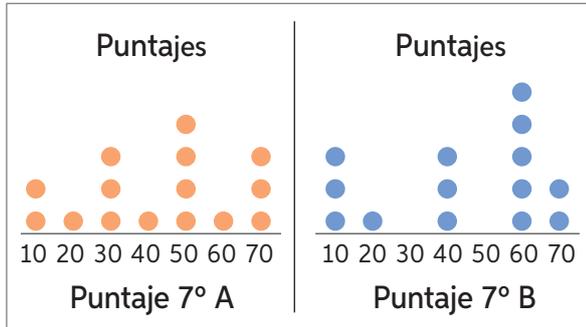
No solo en las redes sociales es posible ver gráficos y estadísticas. De hecho, diariamente nos relacionamos con ellos. Por ello, en esta Unidad profundizaremos en el uso de gráficos y tablas de frecuencias, y conocerás las medidas de tendencia central y las probabilidades.

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para repasar lo que has aprendido anteriormente.

Diagramas

- Analiza el diagrama de puntos que representa los puntajes de dos cursos en las competencias de la semana del colegio. Luego, responde y fundamenta tu respuesta.



- ¿Cuántos puntos obtuvo el 7°A?
 - ¿Cuántos puntos obtuvo el 7°B?
 - ¿De qué curso es el mayor puntaje?
- Analiza el diagrama de tallo y hojas que muestra las edades de los asistentes a dos talleres. Luego, responde fundamentando tu respuesta.

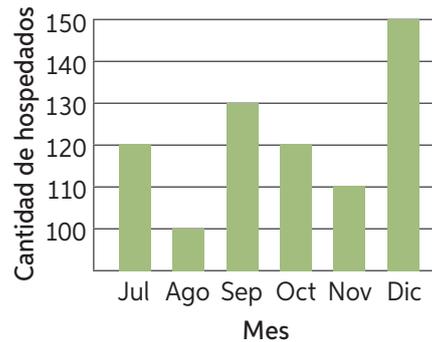
Talleres	
Danza moderna	Violín
5 5 5 4 4 2	1 2 2 3 3 3 4 5
6 3 3 2 0	2 0 0 0 1 5 5 5 7
1 1 1	3 0 2 2 3 7

- ¿Qué taller tiene más asistentes?
- ¿En qué taller hay más participantes de 15 años?
- ¿Qué taller tiene más participantes mayores de 20 años?

Interpretación de gráficos

- Indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas con respecto al gráfico. Justifica.

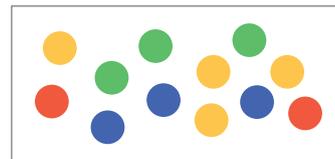
Cantidad de personas hospedadas en un hotel



- Hubo menos huéspedes en octubre que en julio.
- El mes en que menos personas se hospedaron fue agosto.
- La mayor diferencia en la cantidad de hospedados se da entre los meses de agosto y septiembre.

Experimento aleatorio

- A partir del experimento de sacar una bolita al azar de la caja, responde fundamentando tu respuesta.



- ¿Qué color es más probable que salga?, ¿cuál es menos probable?
- ¿Cuántas bolitas rojas se deben agregar como mínimo para que este color tenga mayor probabilidad de salir?

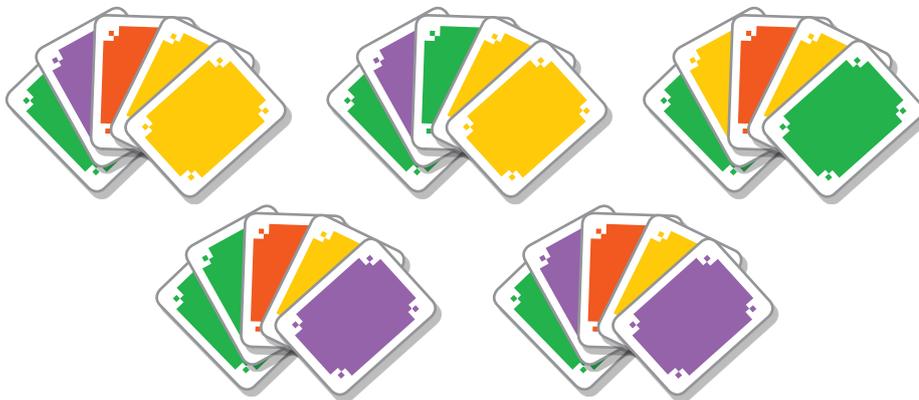
- ¿Qué actividades te resultaron más fáciles de realizar? ¿Por qué?
- ¿Qué temas crees que debes reforzar para enfrentar esta Unidad?

Población y muestra

Objetivo: Estimar el porcentaje de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo.

Para conocer cierta característica de un grupo de 100 000 personas, ¿encuestarías a todos?, ¿cómo lo harías?

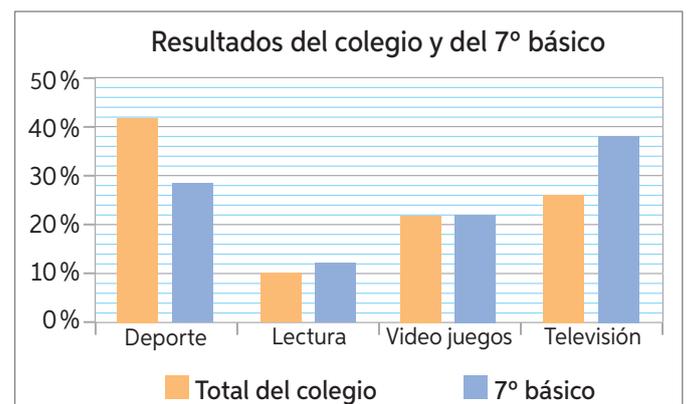
- Manuel puso 50 cartas de 4 colores en una bolsa. Luego, extrajo 5 cartas al azar, anotó el resultado y las volvió a dejar en la bolsa. Este proceso lo realizó 5 veces y los resultados fueron los siguientes:



- Karina piensa que hay más cartas verdes, mientras que Francisca piensa que hay más amarillas. ¿Quién crees que tiene la razón? Justifica.
 - ¿Qué color de carta crees que menos se repite en la bolsa?
 - Realiza una estimación de las cartas que están en la bolsa según tu intuición. Luego, compara tu respuesta con un compañero.
 - Hacer más extracciones, ¿daría más seguridad a tu respuesta? ¿Por qué?
- Reúnanse en parejas y respondan la siguiente actividad.

Un grupo de estudiantes realizó una encuesta en su colegio y la organizó en los siguientes gráficos:

- Identifiquen qué se está investigando en la encuesta.
- ¿Qué pueden inferir acerca de los estudiantes de este colegio? ¿Por qué?
- ¿Se puede considerar el 7° básico como un subconjunto de los estudiantes del colegio? ¿Por qué?
- ¿Por qué varían los resultados al considerar solo el 7° básico?
- ¿Podrían decir que el 7° básico es un buen representante del estudio realizado en todo el colegio? Justifiquen su respuesta.



Se llama **población** al conjunto de individuos o elementos sobre el cual se infiere en relación con alguna materia. Se llama **muestra** a un subconjunto de la población sobre el cual se harán las observaciones de la materia que se quiere estudiar.

Población:



La muestra puede determinarse a través de técnicas de muestreo. Una de ellas es el muestreo aleatorio simple, es decir, aquel en que todos los individuos o elementos de la muestra tienen la misma posibilidad de ser elegidos.

3. En la bolsa hay 100 esferas de dos colores en cantidades no equitativas. Se extrajeron muestras de 10 bolitas y se las dejó nuevamente en la bolsa. Luego, se repitió el procedimiento 3 veces. Responde fundamentando tu respuesta:

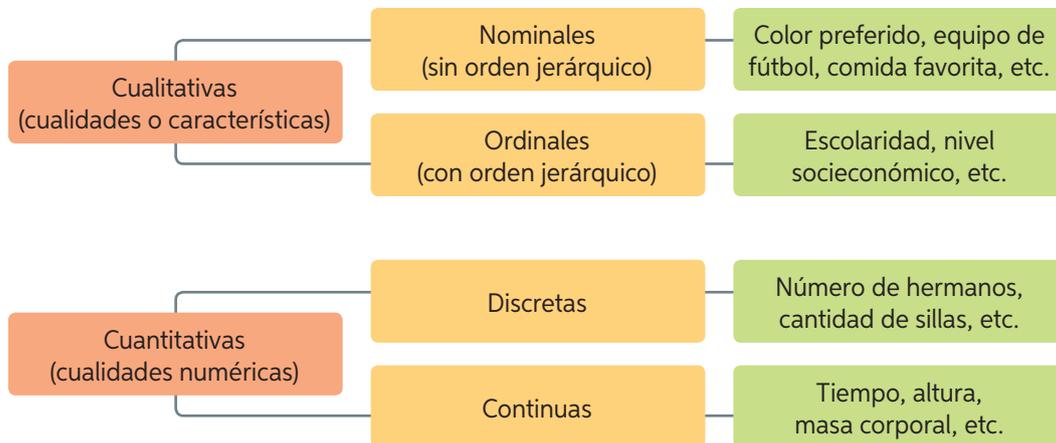


Muestra 1	● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
Muestra 2	● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
Muestra 3	● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
Muestra 4	● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

- ¿Qué color de esfera crees que predomina en la bolsa? ¿Cuál crees que menos se repite?
 - Si se hicieran reiteradas extracciones de la misma forma, ¿cuál crees que sería el porcentaje de esferas de cada color?
 - En parejas, comparen sus respuestas. Si existen diferencias, ¿por qué crees que se producen?
4. Identifica la población y la muestra en cada caso.
- Para sondear el uso del transporte público en escolares, se encuesta a los estudiantes de 10 colegios de Chile.
 - Para estudiar el uso de Internet en un edificio, se realiza una encuesta en 3 departamentos que cuentan con el servicio.
 - Para analizar la mortalidad de los recién nacidos en Chile, se toman en cuenta todos los centros hospitalarios nacionales y se registra cuántos fallecieron.

- d. En un colegio se desea analizar las carreras universitarias en las que se han inscrito los egresados de cuarto medio. Para ello, buscan las bases de datos de inscripción de todos los egresados en 2016, 2017 y 2018.
- e. Una empresa desea conocer la cantidad de dinero que le gustaría ganar a cada empleado. Para ello, consulta a 5 funcionarios por cada departamento.

Se llama **variable estadística** la característica que varía entre los diferentes individuos o elementos de una población, por ejemplo, edad, color de pelo, equipo de fútbol preferido, tipo de música favorita, etc. Las variables estadísticas se clasifican en:



5. Clasifica las siguientes variables estadísticas:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a. Gustos musicales. | f. Número de amigos. |
| b. Tiempo. | g. Sabor de helado. |
| c. Número de animales. | h. País de procedencia. |
| d. Color de ojos. | i. Masa corporal. |
| e. Estatura. | j. Nota de una prueba. |

Ingresa a www.enlacesmineduc.cl y escribe el código **T20M7BP185A** para más información de las variables.

Para concluir

- a. Analiza cada situación e identifica la población, la muestra y la variable. Luego, clasifica la variable.
- En una fábrica de ampollitas se efectúa un control de calidad en 100 unidades para estimar cuántas son defectuosas.
 - Se desea estimar el promedio de estatura de todos los estudiantes de un colegio. Para ello, se mide a 42 estudiantes.
- b. ¿Qué estrategias utilizarías para aprender los tipos de variable? Planifícala y compártela con un compañero.
- c. ¿Por qué es importante aprender los contenidos de este tema?



100

Tablas de frecuencia

Objetivo: Representar e interpretar los datos obtenidos en distintas muestras mediante tablas de frecuencia.

En cursos anteriores, ¿cómo organizabas los datos de una encuesta?

¿Qué sabes sobre las tablas de frecuencia?

1. Cierta página de Internet dedicada al turismo quiere dar a conocer la cantidad de hoteles de una ciudad según su calidad, expresada en estrellas.

5 - 3 - 4 - 4 - 3 - 4 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 4 - 5 - 4 - 2 - 4 - 4 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 2 - 3 - 3 - 3 - 4 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5 - 2 - 4 - 4 - 4 - 2 - 5 - 3 - 3 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 5 - 4 - 4 - 3 - 3 - 3 - 2 - 3 - 3 - 3 - 4 - 4 - 3 - 5 - 3 - 5 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 5 - 2 - 3 - 3 - 2 - 3 - 3 - 3 - 3

- a. En tu cuaderno, completa la tabla según los datos presentados.

Número de estrellas	Frecuencia absoluta (f)
★ ★	■
★ ★ ★	■
★ ★ ★ ★	■
★ ★ ★ ★ ★	■

- b. ¿Qué categoría tiene más hoteles?
- c. ¿A qué categoría de estrellas pertenece aproximadamente la mitad de los hoteles? Analiza y completa en tu cuaderno la resolución de la actividad.

Paso 1: Calcula qué fracción del entero representa cada dato. Para esto, divide la frecuencia absoluta por el total de datos.

Número de estrellas	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (f _r)
★ ★	8	$\frac{8}{84} \approx 0,095$
★ ★ ★	■	■
★ ★ ★ ★	■	■
★ ★ ★ ★ ★	■	■

Por lo tanto, la categoría a la que pertenece aproximadamente la mitad de los hoteles es: ■

- d. ¿Qué categoría de hotel tiene un menor porcentaje en su oferta?

Paso 2: Calcula qué porcentaje representa cada dato. Para esto, multiplica la f_r por 100. Así, la f_r se puede expresar como porcentaje.

- e. ¿Cuántos hoteles tienen a lo más 4 estrellas?

Una tabla de frecuencias se utiliza para organizar información de manera resumida y ordenada, y se la considera completa si está formada por:

Variable	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia absoluta acumulada (F)	Frecuencia relativa (f_r)	Frecuencia relativa acumulada (F_r)	Frecuencia relativa porcentual ($f_{r\%}$)
Datos de la variable en estudio.	Número de veces que se repite cada dato.	Suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales al valor de la variable en cuestión.	Cociente entre la frecuencia absoluta y el n° total de datos: $f_r = \frac{f}{n}$	Suma de las frecuencias relativas de los valores menores o iguales al valor de la variable en cuestión.	Porcentaje de la frecuencia absoluta con respecto al total de datos: $f_{r\%} = \frac{f}{n} \cdot 100$
Total	N° total de datos (n)	-	1	-	100%

2. En tu cuaderno, completa la tabla y responde.

Respuestas de 16 personas acerca de la cantidad de televisores que tienen en sus hogares: 4, 3, 2, 1, 3, 5, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 4, 4, 3, 2.

Cantidad de televisores por hogar			
Cantidad de televisores	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia acumulada (F)	Frecuencia relativa (f_r)
0	■	■	■
1	■	■	■
2	3	8	0,1875
3	■	■	■
4	■	■	■
5	■	■	■

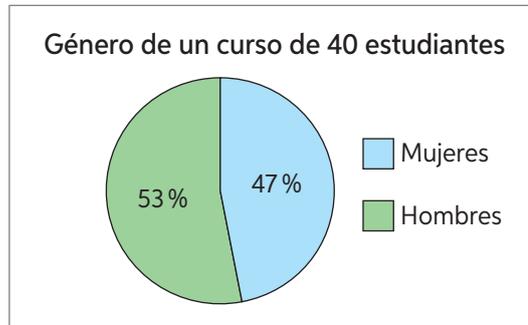
- a. ¿Qué porcentaje de encuestados no tiene televisor en su hogar?
 b. ¿Cuántas personas tienen menos de 5 televisores? Justifica.
3. Construye una tabla de frecuencias con la información que se entrega.
- a. Kilogramos de basura que producen las familias de un condominio al día:

1 - 2 - 3 - 3 - 2 - 4 - 5 - 0 - 4 - 3 - 1 - 3 - 1 - 2

- b. Número de mascotas que tienen mis amigos:

1 - 2 - 3 - 3 - 2 - 4 - 4 - 1 - 0 - 1 - 2 - 0 - 4 -
3 - 1 - 3 - 1 - 2 - 0 - 1 - 2 - 1

4. Representa la información del gráfico en una tabla de valores escribiendo todas las frecuencias que sean posibles. Revisa el ejemplo.



Paso 1: Identifica la variable en estudio.

Género de los estudiantes.

Paso 2: Calcula la frecuencia absoluta.

$$\text{Hombres: } 40 \cdot \frac{53}{100} = 21,2 \approx 21$$

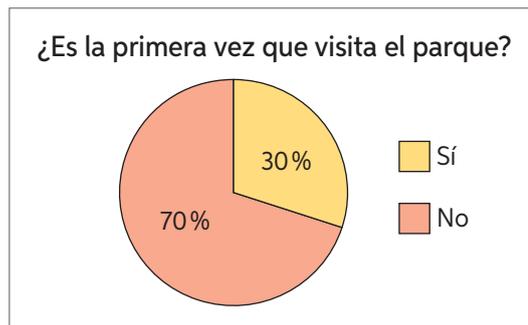
$$\text{Mujeres: } 40 \cdot \frac{47}{100} = 18,8 \approx 19$$

Paso 3: Calcula la frecuencia relativa y ordena los datos en la tabla.

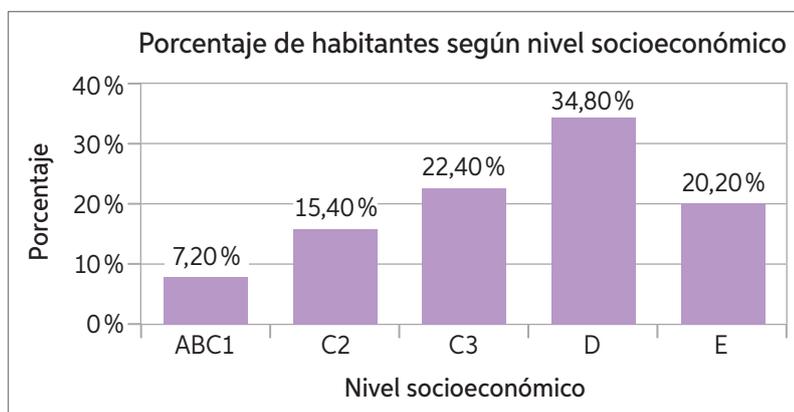
Género	f	f_r	$f_{\%}$
H	21	0,53	53%
M	19	0,47	47%

Observa que no se escribió la frecuencia absoluta acumulada, ya que la variable género no se puede ordenar de menor a mayor.

- a. Visitas a un parque nacional durante 2018, con un total de 2890 visitantes.



- b. Porcentajes de habitantes de un país según nivel socioeconómico con una población de 15 116 435 habitantes.



5. En una encuesta se preguntó a un grupo de estudiantes por su deporte favorito.

Deporte favorito			
Deporte	f	$f_{r\%}$	f_r (fracción)
Fútbol	24	48 %	■
Básquetbol	2	■	■
Vóleibol	7	■	■
Ciclismo	8	■	■
Tenis de mesa	4	8 %	■
Gimnasia	5	■	■
Total	■	■	■

- Completa la tabla en tu cuaderno.
 - ¿Cuál es la variable en estudio de esta encuesta?, ¿de qué tipo es?
 - ¿A cuántos estudiantes se encuestó? ¿Cómo lo supiste?
 - ¿Cuál es el deporte más escogido del grupo encuestado? Fundamenta.
 - ¿Qué porcentaje prefiere vóleibol? ¿Cómo lo supiste?
 - ¿Qué porcentaje de encuestados no prefiere deportes en los que se utilice un balón o pelota? Describe tu análisis.
6. Realiza la siguiente encuesta a tus vecinos:

- ¿Cuántas mascotas tienes?
- ¿Qué tipo de mascota tienes? Perro - Peces - Gato - Otros
- ¿Tus mascotas tienen el espacio necesario para moverse? Sí No

- Organiza la información de cada variable en tablas de frecuencias.
- ¿Cuántas personas tienen mascota?
- ¿Cuántas personas tienen como máximo dos mascotas?
- ¿Cuántas personas tienen dos o más mascotas?
- ¿Cuál es el porcentaje de personas que tienen perros o gatos?
- ¿Cuál es el porcentaje de personas que no tienen el espacio suficiente para sus mascotas?



101 y 102

Para concluir

- Se encuesta a 1500 hombres adultos: el 45 % está casado, el 51 % soltero y el resto separado. Representa los datos en una tabla de frecuencias y calcula a cuántas personas corresponden estos porcentajes. Explica tu procedimiento.
- ¿Qué estrategia usaste para resolver el problema 5? ¿Por qué?
- ¿Qué fue lo que más te costó comprender de tablas de frecuencias?, ¿por qué?

Uso de gráficos

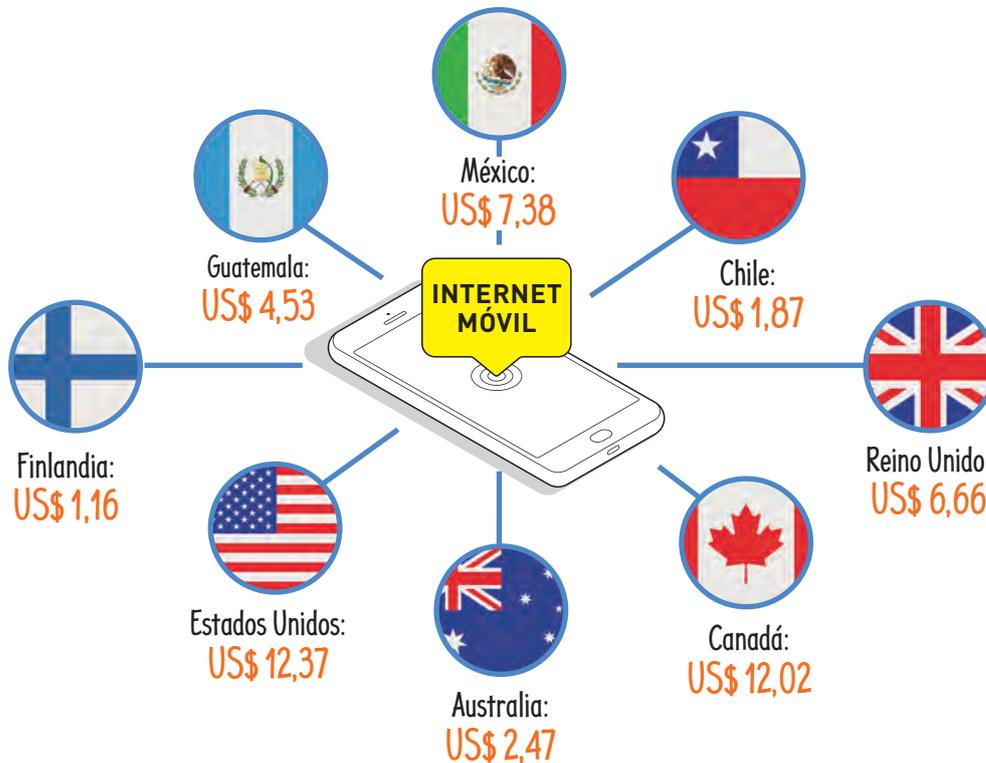
Objetivo: Representar datos obtenidos en una muestra utilizando los gráficos apropiados.

¿Qué tipo de gráficos conoces?

¿Para qué se utilizan los gráficos en la vida cotidiana?

1. A partir de la información, realiza las actividades propuestas.

Un estudio global comparó los precios del servicio de Internet móvil en varios países. Cada precio demuestra el pago por 1 GB de Internet, expresado en dólares.



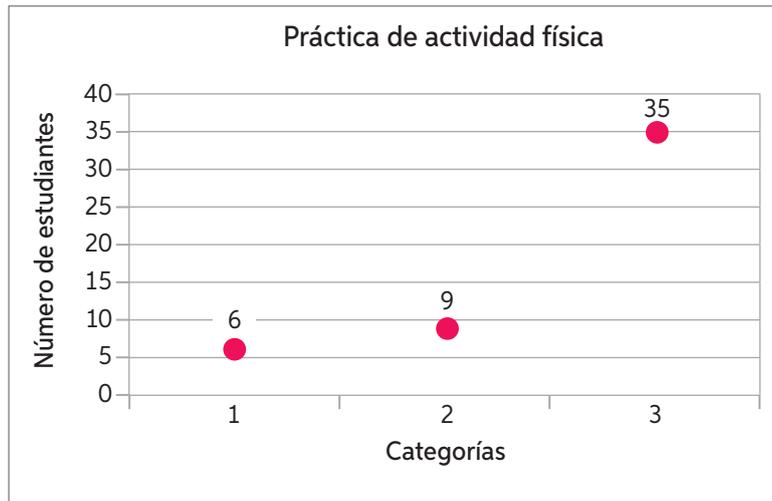
Información extraída de: <https://www.cable.co.uk/mobiles/worldwide-data-pricing/#regions> y <http://www.t13.cl/>

- a. Ordena la información de la noticia en una tabla e identifica cuáles son las variables en este caso.
 - b. Con los conocimientos adquiridos en años anteriores, construye un gráfico de barras simple con todos sus elementos a partir de la información de la tabla.
 - c. ¿Cuál país es el más costoso para contratar Internet?
 - d. ¿Cuál es el país menos costoso?
 - e. ¿Es posible representar esta situación en otro tipo de gráfico? ¿Por qué?
 - f. ¿Cuál es la ventaja de presentar la información a través de gráficos?
- ¿Qué opinión te merece el uso del Internet móvil? ¿La consideras imprescindible para tu vida? Justifica tu respuesta.

2. Un profesor de Educación Física decide encuestar a los estudiantes del 7^ºA y 7^ºB para saber con qué frecuencia realizan actividad física.



El gráfico muestra la frecuencia con la que practican actividad física a la semana. 1: dos o más veces a la semana, 2: una vez a la semana y 3: no realiza actividad física.



- a. Representa la información dada por el profesor en un gráfico distinto al mostrado.
- b. ¿Por qué escogiste ese gráfico? ¿Podrías haber escogido otro?, ¿por qué?

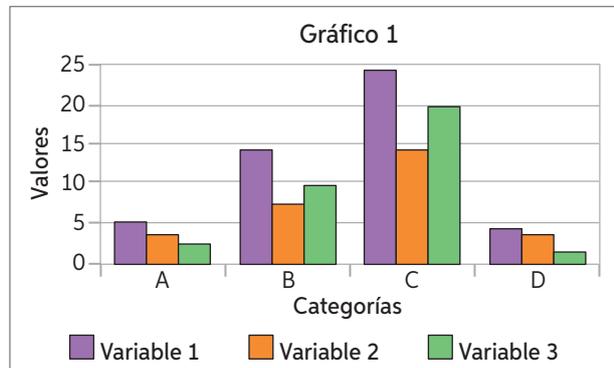
A continuación, se presenta una tabla con las respuestas que los estudiantes que practican actividad deportiva, ya sea de manera ocasional o frecuente, sobre cuál era su motivación para realizarla.

Motivo	Porcentaje
Compartir con amigos	60%
Utilizar mi tiempo libre	20%
Mejorar mi salud	20%

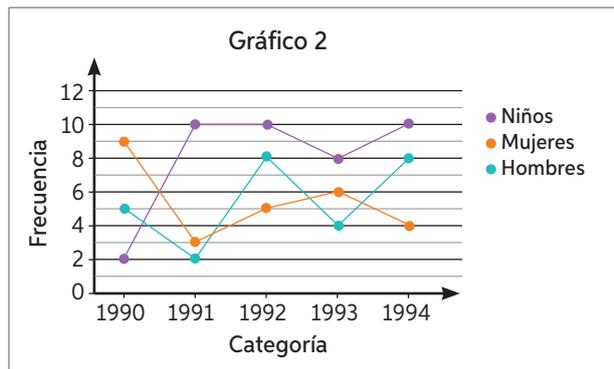
- c. Representa la información anterior en un gráfico adecuado.
- d. ¿Por qué el gráfico escogido es adecuado? En parejas, comenten sus respuestas.

Un **gráfico de barras simple** es una representación gráfica de las frecuencias de una variable cualitativa (nominal u ordinal) o cuantitativa (discreta). Son usados para comparar magnitudes de varias categorías.

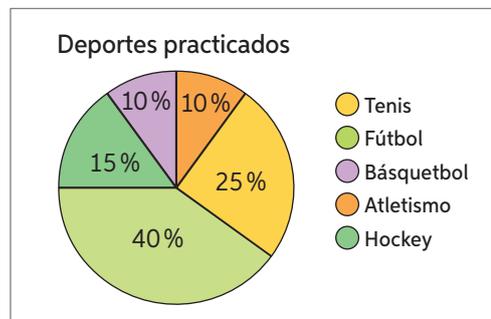
Un **gráfico de barras agrupadas** es un tipo de gráfico de barras que se emplea cuando, para cada categoría de la variable, hay dos o más conjuntos de datos. La longitud de cada barra muestra las comparaciones numéricas entre las categorías. Estos gráficos se emplean para variables cualitativas (nominales u ordinales), aunque pueden también representarse frecuencias relativas.



Un **gráfico de líneas** es una representación gráfica de la relación entre variables que refleja los cambios producidos entre cada dato de las variables respecto de un eje ordenado x.



Un **gráfico de sectores circulares** es una representación circular de las frecuencias relativas y relativas porcentuales de una variable cualitativa (nominal u ordinal) o una variable cuantitativa (discreta) que permite su comparación.



3. Identifica la variable en estudio y escoge el gráfico más pertinente para representar la información. Justifica tu respuesta.

Ejemplo: Cantidad de días al mes que va a la feria un grupo de familias.

Variable: Cantidad de veces al mes que asisten a la feria.

Clasificación: Cuantitativa discreta.

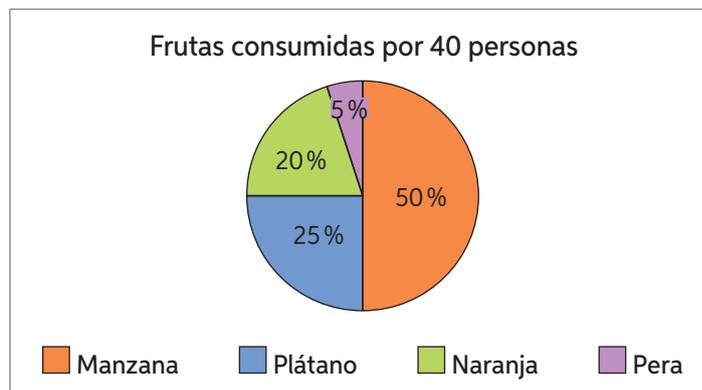
Gráfico: puntos, barra o circular.

- Grupo sanguíneo de un conjunto de personas.
- Cantidad de turistas que entraron al país durante cada mes de 2020.
- Duración en horas de una muestra de 50 pilas.

4. Analiza el gráfico y responde.



- ¿Qué día de la semana hay mayor venta de almuerzos? ¿Por qué puedes interpretar esto?
 - ¿Qué días se vendieron más de 20 colaciones?
 - ¿En qué días se produce la mayor disminución de las ventas?
5. El gráfico muestra la información obtenida a través de una encuesta aplicada a 40 personas acerca de la fruta que más consumen.



- Construye una tabla de frecuencias con los datos representados en el gráfico.
 - ¿Cuál es la variable en estudio?, ¿de qué tipo es?
 - ¿Cuántas personas consumen más plátanos que manzanas?
 - ¿Cuál es la fruta menos consumida?
 - ¿Por qué se ha representado la información en un gráfico circular? ¿Pudo ser otro? Justifica.
- ¿En qué te fijas para analizar e interpretar un gráfico?
 - ¿En qué casos es mejor analizar una tabla que un gráfico?
 - ¿Por qué es útil saber interpretar un gráfico? ¿Qué situaciones de la vida diaria lo requieren?

6. Analiza la información y realiza las actividades solicitadas.

El año 2016, el INJUV realizó un sondeo sobre la percepción de los jóvenes sobre la pobreza. Una de las preguntas realizadas sobre la definición de pobreza fue “¿Tú dirías que la mayoría de las personas en situación de pobreza en Chile son...?”

Los resultados fueron los siguientes:

El 41 % de los jóvenes opinan que la mayoría de las personas en situación de pobreza en Chile son personas que no alcanzan condiciones de vida dignas en salud, trabajo, educación y vivienda. El 23 % de los entrevistados opina que son personas que viven en hogares que no consiguen obtener un mínimo de ingreso al mes, mientras que el 17 % opina que son personas que son discriminadas o excluidas por su origen social, cultura, género u otras razones. Es interesante observar que otro 17 % de los entrevistados opina que son personas que no trabajan o no se esfuerzan. Un 2 % no sabe o no responde.

Información extraída de: http://www.injuv.gob.cl/storage/docs/Sondeo_Percepcion_de_los_jovenes_sobre_la_pobreza.pdf

- Si los casos fueron 1010, construye una tabla de frecuencias que represente los datos mencionados.
- ¿Qué gráfico utilizarías para representar esta información?
- Construye el gráfico escogido en la pregunta anterior. Luego, reúnanse en parejas y comenten:
 - ¿Por qué escogiste ese tipo de gráfico?
 - ¿Qué opinas sobre el tema mostrado?
 - ¿Qué responderías tú a la pregunta del sondeo?

7. Observa el diagrama de tallo y hojas que representa las notas obtenidas en una prueba de Matemática por los estudiantes de 7° básico de un colegio. Luego, responde.

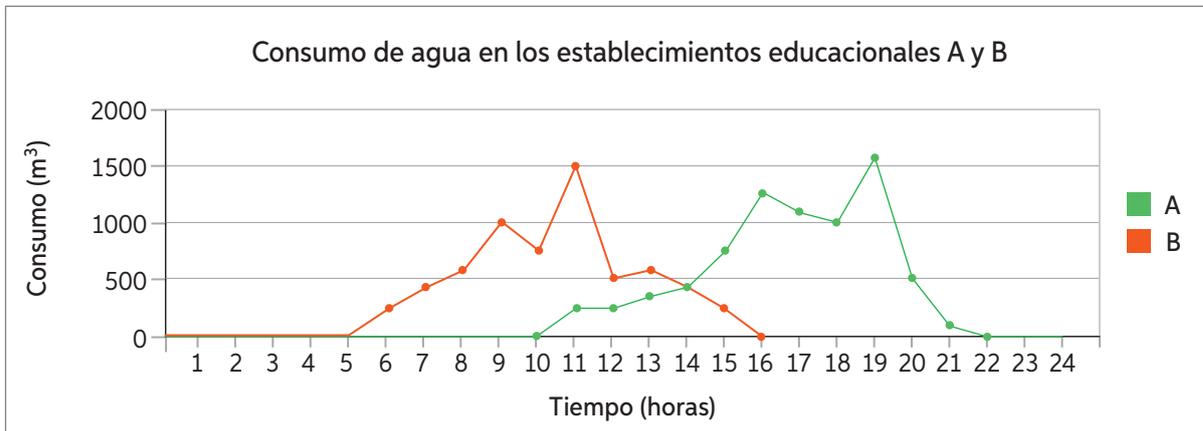
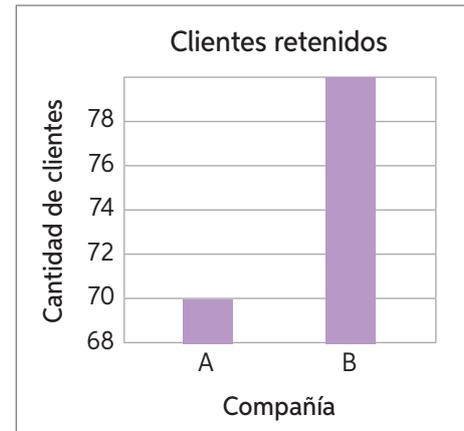
- ¿Cuántos estudiantes rindieron la prueba?
- ¿Cuál fue la nota más baja?, ¿y la más alta?
- ¿Cuántos estudiantes del 7° A obtuvieron nota 5,0?

Notas Matemática	
7° A	7° B
3 2 0	3 1 5
9 8 8 6 3 3	4 0 4 5 5 7
8 5 5 0 0	5 4 5 7 8 8
9 8 7 4 0 0	6 0 2 3 7 7 9
0 0 0 0 0	7 0 0 0

Recuerda que el **diagrama de tallo y hojas** es útil para mostrar la acumulación, tendencia, dispersión y forma de la distribución de un grupo de datos. Este diagrama se utiliza para representar variables cuantitativas.

- ¿Qué utilidad tiene el diagrama de tallo y hojas en la vida cotidiana?

8. El siguiente gráfico que se presenta en un noticiero informa la cantidad de clientes que han retenido dos compañías (A y B) de telefonía celular durante el último año.
- ¿Piensas que el gráfico es adecuado?, ¿por qué?
 - ¿Notas alguna característica que puede llevar a un error de interpretación?, ¿cuál?
9. ¿Sabías que, observando un gráfico, puedes extraer o intuir información adicional del problema? A partir del siguiente gráfico, responde las preguntas y justifica tus respuestas.



- ¿En qué horarios crees que hay gente en cada establecimiento?
 - ¿Cuál es la jornada de cada establecimiento educativo?
 - En cada establecimiento hay dos recreos. Si el *peak* de consumo de agua se da en los recreos, ¿cuáles son sus horarios?
 - Replica y modifica el gráfico construyendo una tercera línea con el consumo que tú crees que se realiza en tu establecimiento educativo.
- ¿Qué importancia tiene el uso de gráficos en contextos cotidianos? Señala tres beneficios que conlleva la representación de datos por medio de gráficos.



103 a 106

Para concluir

- En parejas, consigan una cartulina, plumones y otros materiales para construir un afiche que muestre organizadamente los tipos de gráficos aprendidos y sus usos. Luego, muéstrenlo a su curso y péguenlo donde su profesor les indique.
- ¿Qué estrategia le comentarías a un compañero para facilitarle la construcción de un gráfico adecuado con los datos que se quieren representar?
- ¿Cuál fue tu desempeño en este tema? ¿Crees que sabes lo suficiente al respecto?

Encuestas

Objetivo: Representar e interpretar los datos obtenidos en distintas muestras.

En años anteriores, ¿cómo organizabas los datos de una encuesta?
¿Qué sabes sobre las tablas de frecuencia?

1. Realiza las actividades solicitadas.



En grupos de 4 integrantes, realicen una encuesta siguiendo estas etapas:

- a. Escojan el tema sobre el cual realizarán la encuesta.
 - b. Planteen dos preguntas: una con una variable cualitativa y otra con una variable cuantitativa. Para las preguntas deben ofrecer como respuesta 4 opciones.
 - c. Hagan la consulta a sus compañeros y realicen un conteo ordenado de las respuestas.
 - d. Ordenen la información en una tabla de frecuencia.
 - e. Grafiquen la información en 2 gráficos distintos.
- ▶ Las frecuencias acumuladas, ¿pueden ser graficadas? ¿Por qué?
 - f. ¿Cuál es la población y la muestra en su encuesta?
 - g. Con la información recopilada ¿qué frecuencias utilizaron en la tabla?, ¿cuáles no? Justifiquen su respuesta.
 - h. Escriban al menos 3 conclusiones sobre la encuesta realizada.
 - i. Compartan y analicen los gráficos.
 - ¿Qué temas consideró cada grupo?
 - ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre los gráficos?
 - ¿Cuál piensas que muestra mejor la información? ¿Por qué?
 - ▶ ¿Por qué piensas que los datos estadísticos son importantes para la sociedad? Comenten y comparen sus respuestas.

A través de la encuesta se pueden obtener datos concretos y fidedignos sobre el comportamiento de los individuos en diversos roles: compradores de bienes y servicios, votantes, entre otros, y usarlos luego a favor de una marca, una empresa, políticas públicas y decisiones en general.

Los resultados de una encuesta pueden mostrarse, por ejemplo, en una tabla o en gráficos adecuados a las variables en juego.

2. La siguiente encuesta fue realizada en un colegio para jóvenes artistas y deportistas. Analiza la información y realiza las actividades.

Tiempo semanal dedicado a practicar tu deporte preferido			
Tiempo (horas)	f	F	f_r
Menos de 2	2	■	■
2 a 4	5	■	■
4 a 6	6	■	■
6 a 8	16	■	■
8 a 10	11	■	■
10 o más	10	■	■

- ¿Cuál crees que fue el objetivo del estudio?
- ¿Cuántos encuestados tuvo el estudio?
- Completa la tabla de frecuencias en tu cuaderno.
- ¿Cuál es el tiempo con mayor frecuencia absoluta?, ¿cómo lo interpretas?
- Representa con un gráfico los datos tabulados.
- Realiza una conclusión del estudio a partir de la tabla y del gráfico construido.
- Realiza una encuesta en tu curso con la misma pregunta y categoría.
- Tabula y grafica los datos recopilados.
- Compara los datos: ¿se asemejan los gráficos?
- En parejas, reflexionen y respondan: ¿por qué creen que se producen las diferencias o semejanzas entre los estudios?

Para concluir

- Escribe un paso a paso para la realización de una encuesta.
- ¿Por qué son importantes las encuestas?
- ¿Qué fue lo que más te costó comprender del tema Encuestas?, ¿por qué crees que ocurrió esto?



107 y 108

Antes de continuar

Realiza las actividades dispuestas a continuación.

1. Escribe tres ejemplos de una relación de población y muestra para un estudio o encuesta.
2. Se realizó una encuesta a estudiantes de séptimo básico para saber cuántos teléfonos móviles han tenido a lo largo del tiempo y se obtuvo lo siguiente:

a. ¿Cuántos estudiantes han tenido dos teléfonos?

1	1	0	0	2	4	1	3	3	2
2	2	0	1	2	3	1	2	2	3
1	2	1	3	1	3	1	0	3	3

b. ¿Cuántos estudiantes han tenido más de un teléfono?

c. ¿Cuántos estudiantes no han tenido teléfono móvil?

d. Construye una tabla de frecuencias que tenga (f) , (F) y (f_r) .

e. ¿Qué gráfico es adecuado para representar la situación?, ¿por qué? Constrúyelo.

3. Analiza cada gráfico y responde:

a. ¿Qué día de la semana hay mayor venta de colaciones? ¿Por qué puedes interpretar esto?

b. ¿Qué días se vendieron más de 20 colaciones?

c. ¿Entre qué días se produce la mayor disminución de las ventas?

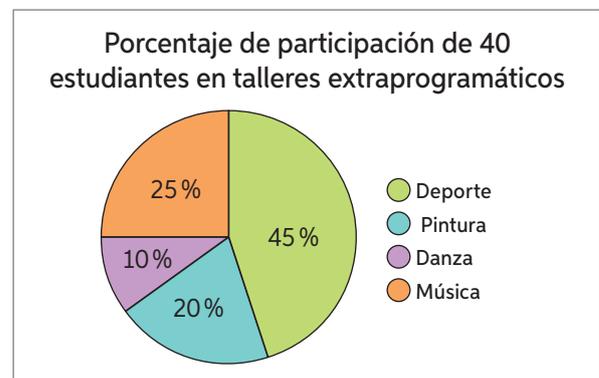
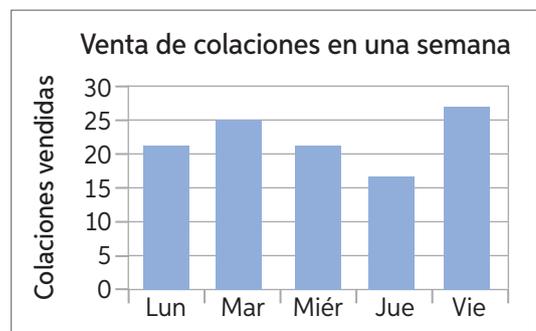
d. ¿Por qué se eligió el gráfico de barras para mostrar la venta de colaciones?

e. ¿Cuántos estudiantes participan en el taller de danza?

f. ¿Qué taller tiene menor participación?

g. ¿Qué cantidad de estudiantes participan en pintura o música?

h. ¿Por qué el gráfico circular fue la mejor elección?



Reflexiono

- Evalúa tu aprendizaje mencionando qué estrategias te resultaron más sencillas para calcular porcentajes y variaciones porcentuales. Luego, realiza un plan de mejora para aquellas estrategias que te resultaron más difíciles de llevar a cabo.



109

Media aritmética y rango

Objetivo: Calcular e interpretar la media aritmética y el rango en diferentes situaciones.

¿Cómo calculas el promedio de notas en las asignaturas?

¿Para qué crees que sirve el promedio?

1. La imagen muestra las horas diarias de conexión a las redes sociales.



- a. Calcula el promedio de horas que pasan estos estudiantes en sus redes sociales. ¿Cómo lo hiciste? En parejas, compartan sus procedimientos.
 - b. La mamá de Emma dice que el promedio no representa la realidad de su hija con respecto a este tema. ¿Por qué crees que afirma eso?
 - c. Reflexiona acerca del tiempo que pasas en tu red social favorita. ¿Estás sobre o bajo el promedio de tiempo de estos estudiantes?
- ¿Qué opinas sobre el tiempo en que pasamos conectados a las redes sociales? Reflexiona y comenta en parejas.

Se llama **media aritmética** o **promedio** a la cantidad total de la variable distribuida en partes iguales. La fórmula para el cálculo de esta medida de tendencia central es:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \dots + X_n}{n}$$

El promedio nos permite calcular un valor medio representativo de un grupo de datos, siempre y cuando el grupo no sea muy disperso, sino más bien homogéneo. La media aritmética es muy sensible a los valores que se desvían mucho del promedio.

- Reflexiona: ¿Un nuevo habitante de un pueblo, con ingresos millonarios, puede hacer que el sueldo promedio del pueblo suba aun cuando la mayoría de los habitantes gane el sueldo mínimo? Comenten en parejas.

2. Calcula el promedio de cada conjunto y analiza si es un buen representante de ellos. Revisa el ejemplo.

$$3 - 4 - 50 - 2 - 5 - 2$$

$$\text{Calcula el promedio: } \bar{X} = \frac{3 + 4 + 50 + 2 + 5 + 2}{6} = 11$$

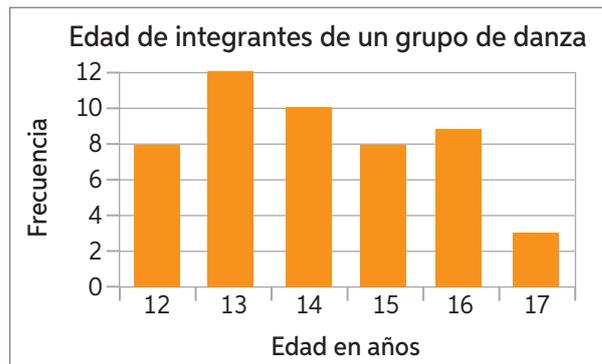
En este caso el promedio obtenido no es un buen representante de la tendencia de los datos, ya que la mayoría de los datos son muy pequeños, excepto por un valor.

- a. 5,5 - 6,2 - 7,1 - 8 - 6,7 - 5,5
- b. 2 - 30 - 1 - 3 - 1 - 1 - 2 - 1
- c. 30 - 32 - 45 - 2 - 31 - 30 - 35

Las **medidas de dispersión** son valores numéricos que permiten medir qué tan dispersos están los datos alrededor de un valor central, por lo general la media. En otras palabras, qué tan cerca o qué tan lejos pueden estar los datos con relación a dicho valor.

El **rango** de una muestra corresponde a la diferencia entre el mayor y el menor de los valores. Por ejemplo, si los valores registrados de una variable son 2, 3, 5, 2, 4, 3, 8, 6, 7, 4 y 1, el rango es $8 - 1 = 7$.

3. El gráfico muestra las edades de los integrantes de un grupo de danza.



- a. ¿Cuántas personas integran el grupo de danza?
 - b. ¿Cuál es el promedio de edad del grupo?
 - c. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo?
 - d. ¿Cuál es la diferencia de edad entre el integrante mayor y el menor?
4. Las estaturas de los niños de un curso son las siguientes: 1,62; 1,55; 1,58; 1,65; 1,45; 1,46. Sin calcular, responde si es posible que el promedio sea 1,67 m. Justifica tu respuesta.

5. La media aritmética de cinco números es 6,1. Si al grupo de datos se agrega un número, cuyo valor es 6,1, ¿influirá en el cálculo del promedio?
6. A continuación, se presentan las calificaciones de Alan en dos asignaturas.
- Inglés: 5,6 - 5,7 - 6,0 - 6,1 - 5,8 - 6,2 - 6,2
- Ciencias Naturales: 4,3 - 5,7 - 6,3 - 6,5 - 7,0 - 5,9 - 5,9
- Calcula el rango de cada asignatura. ¿Qué puedes decir de los valores obtenidos?
 - Calcula el promedio de Alan en ambas asignaturas. ¿Qué significan esos valores?
 - Construye un gráfico de líneas en el que muestres el rendimiento de Alan en ambas asignaturas.
 - Dibuja la media en el gráfico. ¿En qué asignatura crees que la media es más representativa? Explica.
7. En Iquique, el tiempo promedio de dos estudiantes en trasladarse de su casa al colegio es 23,5 minutos. ¿Por qué no se puede asegurar que ambos estudiantes realmente demoran 23,5 minutos? Fundamenta.
8. A Nicole le ofrecen empleo en dos empresas distintas por la misma cantidad de horas. El único dato que tiene para decidir por cuál optar es el promedio de sueldos de ambas.



¿Le basta conocer el promedio de ambas empresas para decidir cuál le conviene? En parejas, comparen y comenten sus respuestas.

- ¿Es siempre el promedio una medida de tendencia central representativa para un grupo de datos? Comenta con un compañero.



110 y 111

Para concluir

- Construye un cuadro resumen de los contenidos relacionados con el promedio. Considera los cálculos y las formas de interpretación.
- ¿Qué estrategia tienes para detectar si el promedio de un conjunto de datos es representativo? Descríbela y luego compárala con un compañero.
- ¿Qué contenidos relacionados con el promedio crees que debes reforzar?

Moda

Objetivo: Calcular e interpretar la moda en diferentes situaciones.

¿Con qué relacionas el concepto de moda? En parejas, realiza una lluvia de ideas y compártela con tu curso.

1. Un grupo de estudiantes realiza una encuesta entre sus compañeros con respecto al cuidado del medioambiente. Una de las preguntas fue: ¿Qué es lo que más haces para reparar el daño que le hacemos al medioambiente? Los resultados fueron los siguientes:



Plantar árboles: 15 personas.



Recoger basura: 7 personas.



Reciclar: 18 personas.



Rescatar animales: 12 personas.

- a. Ordena los datos en una tabla de frecuencias.
- b. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- c. ¿Cuál es la acción que más realizan los estudiantes consultados?
- d. De las nombradas, ¿cuál es la actividad menos escogida?
- e. Si tú hubieses sido encuestado, ¿qué hubieses respondido?
- f. ¿Crees que es importante ejecutar acciones para reparar el daño que le hacemos al planeta? ¿Por qué?

Se llama **moda (Mo)** de un conjunto de datos a la variable que presenta mayor tendencia de ocurrencia. Para calcular esta medida de tendencia central, identificamos la variable cuya frecuencia absoluta es mayor que el resto de los datos.

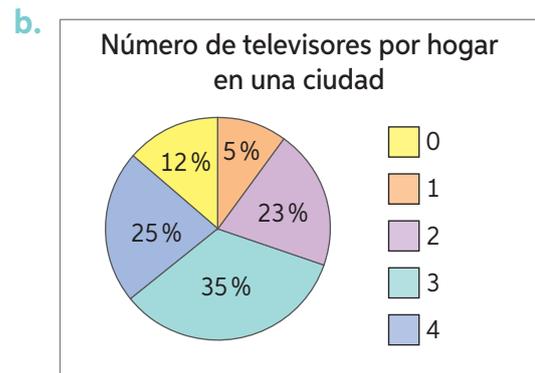
Un conjunto de datos puede tener más de una moda, o bien puede que no exista moda (amodal) si todos los datos se distribuyen con la misma frecuencia.

2. En un colegio ha habido distintas denuncias por *bullying cibernético*, por lo que se ha decidido investigar cuántos de los estudiantes han sido víctimas de esta práctica a través de la siguiente encuesta anónima.

A continuación, se muestra el curso de quienes contestaron Sí.

7° - 8° - 8° - 8° - 1° - 8° - 3° - 8° - 1° - 1° - 2° - 3° - 3°
8° - 1° - 8° - 7° - 8° - 1° - 3° - 1° - 8° - 1° - 3° - 8° - 7°

- Ordena los datos en una tabla de frecuencia.
 - Construye un gráfico de barras con los datos.
 - ¿Cuál es la moda de los datos? Describe cómo obtenerla observando la tabla. ¿Cómo hacerlo teniendo solo el gráfico?
3. Define la moda y lo que significa en cada caso.



► ¿Qué revisaste en cada gráfico para identificar la moda?

4. Realiza una encuesta a 20 personas con los siguientes ítems:

Edad	¿Realizas ejercicio semanalmente?	¿Fumas?	¿Consumes comida chatarra?	¿Cuántas frutas o vegetales frescos consumes diariamente?
------	-----------------------------------	---------	----------------------------	---

- Ordena los resultados en una tabla de frecuencias y construye un gráfico adecuado para cada ítem.
- Identifica la moda en cada ítem y describe qué representa cada una.

Para concluir

- Define con tus palabras la moda y cómo identificarla.
- ¿Por qué crees que es importante aprender sobre la moda estadística? ¿Qué uso le darás en tu vida? Menciona 2 usos.
- Si un compañero no asistiera a clases, ¿podrías explicarle qué es la moda y cómo calcularla? Describe cómo lo harías.



112

Mediana

Objetivo: Calcular e interpretar la mediana en diferentes situaciones.

En un esquema o dibujo, sin utilizar palabras, representa lo que entiendes por el concepto de mediana.

1. Para unas olimpiadas de Matemática los profesores han escogido 15 jóvenes que representarán al colegio. Las edades de los competidores son:

14, 11, 10, 15, 12, 15, 10, 16, 10, 10, 11, 14, 15, 16, 10.

¿Qué edad tiene como máximo la mitad más joven de los competidores?

- Ordena los datos en forma creciente y determina el término central.
- La respuesta anterior corresponde a la mediana. ¿Qué sucedería con la mediana si al grupo se agrega un joven de 15 años?

En este caso, la cantidad de datos sería par (16 jóvenes), por lo tanto, al ordenar los datos de menor a mayor existen dos términos centrales. En estas situaciones, cuando n es par, la mediana es la media aritmética de los dos términos centrales y no necesariamente este valor pertenece al conjunto de datos.

La **mediana** corresponde al valor que ocupa el término central de un conjunto de datos una vez ordenados de menor a mayor o viceversa. Cuando la cantidad de datos (n) de un conjunto es par, la mediana corresponde a la media aritmética de los dos términos centrales una vez que estos se ordenan.

2. Un curso realizó una campaña solidaria para reunir azúcar: 4 estudiantes llevaron 1 kg, 11 llevaron 2 kg, 13 llevaron 3 kg y 4 aportaron con 4 kg. Identifica e interpreta la mediana.

Paso 1: Ordena los datos en una tabla de frecuencia y calcula la posición de la mediana. Como la cantidad de datos es par, entonces hay dos datos centrales, cuya posición está dada por:

$$\frac{n}{2} = \frac{32}{2} = 16 \quad \text{Dato central 1}$$

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{32}{2} + 1 = 17 \quad \text{Dato central 2}$$

Cantidad de azúcar (kg)	f	F
1	4	4
2	11	15
3	13	28
4	4	32
Total	32	

Paso 2: En F encuentra la posición 16 y 17 o que contiene a ambas. La frecuencia que las contiene es 28, por lo que la mediana es 3.

Paso 3: Interpreta la mediana. Que la mediana sea 3 kg significa que la mitad de los estudiantes que donaron la mayor cantidad de azúcar aportó como mínimo 3 kg.

- Durante un bingo, la comisión organizadora registra el número de cartones que compran las personas. De las 20 personas que participaron, 9 compraron 1 cartón; 5 compraron 2; 4 compraron 3, y 2 compraron 4. Siguiendo los pasos, identifica e interpreta la mediana.

3. La siguiente es la nómina 2019 de la selección chilena de fútbol femenino.



NOMBRE	POSICIÓN	ESTATURA
Ryan Torrero	Arquera	1,65 m
Natalia Campos	Arquera	1,69 m
Christiane Endler	Arquera	1,82 m
Fernanda Pinilla	Defensa	1,67 m
Su Helen Galaz	Defensa	1,59 m
Ámbar Soruco	Defensa	1,55 m
Camila Sáez	Defensa	1,66 m
Rocío Soto	Defensa	1,61 m
Valentina Díaz	Defensa	1,56 m
Javiera Toro	Defensa	1,59 m
Daniela Pardo	Volante	1,62 m
Yesenia López	Volante	1,59 m
Karen Araya	Volante	1,62 m
Claudia Soto	Volante	1,65 m
Francisca Lara	Volante	1,63 m
Daniela Zamora	Delantera	1,66 m
María José Urrutia	Delantera	1,67 m
Yessenia Huenteo	Delantera	1,55 m
Javiera Grez	Delantera	1,48 m
Rosario Balmaceda	Delantera	1,63 m
Yanara Aedo	Delantera	1,54 m
Fernanda Araya	Delantera	1,70 m

Información extraída de www.anfp.cl

- Calcula la mediana de las estaturas.
 - Si no se considera en el cálculo a Endler ni a Grez, ¿varía la mediana?
 - ¿Por qué crees que ocurre lo anterior?
4. **Desafío** Crea una tabla de frecuencia con un conjunto de 10 números que cumplan las siguientes condiciones:
- $\bar{X} = 45$, el valor mínimo es 10, el rango es 90 y $\bar{X} > Me$.
 - $\bar{X} = 116$, el valor máximo es 160, el rango es 70 y $\bar{X} > Me$.



113

Para concluir

- Resume la forma de calcular la mediana para un grupo de datos par y uno impar.
- ¿Qué diferencia existe entre la mediana y la media? Explica.
- ¿Cuáles fueron tus debilidades en el tema Mediana? ¿Cómo las superarías?

Aplicaciones de medidas de tendencia central

Objetivo: Analizar cuál es la medida de tendencia central que permite hacer inferencias y comparaciones adecuadas en distintas situaciones.

¿Por qué es importante conocer el cálculo y la interpretación de las medidas de tendencia central y el rango?

1. Analiza el paso a paso y observa el ejercicio resuelto. Luego, realiza las actividades propuestas.

El departamento de deportes de un municipio inició las inscripciones para el taller de zumba. Cada inscrito tiene derecho a asistir a una clase semanal, las cuales se imparten los lunes (grupo 1) o los miércoles (grupo 2). Para conocer el impacto de este taller, la profesora registró las edades (años) de los asistentes durante la primera semana.

¿Cómo es la distribución de las edades en cada uno de los grupos?

Paso 1: Identifica las características de los datos de cada grupo.

Día	Asistentes	Edad promedio	Mediana	Edad mínima	Edad máxima	Rango
Lunes	11	25	16	14	45	31
Miércoles	11	25	27	21	28	7

Paso 2: Establece criterios de comparación.

- Cantidad de asistentes en cada grupo.
- Edad promedio de quienes asisten el lunes y el miércoles.
- Rango y distribución de los datos.
- Mediana de ambos grupos.

Paso 3: Establece semejanzas y diferencias entre ambos grupos.

Semejanzas

- Ambos grupos tuvieron la misma cantidad de asistentes.
- La edad promedio de los asistentes del lunes y del miércoles es la misma.

Diferencias

- El rango de edad de los asistentes del lunes es mayor que el del miércoles, lo que significa que las edades del grupo 1 están más distribuidas que en el grupo 2.
- La mediana del grupo 2 es mayor que la del grupo 1, lo que significa que el miércoles la mitad de las personas tienen como mínimo 27 años.

- a. ¿Qué más podrías decir respecto de estas muestras?
- b. ¿Por qué la moda para estas muestras no es buen criterio de comparación?

2. A una fiesta de Año Nuevo asisten 15 personas cuya edad promedio es 18 años.
- ¿Cuál crees que podría ser el rango de edad de los asistentes?
 - Sugiere la edad de cada asistente, de tal forma que cumpla con el promedio.
 - Compara tu listado de asistentes con el de un compañero.
 - ¿Es único el rango dado en la pregunta a?
 - ¿Son las únicas edades que cumplen con el requerimiento del promedio?
 - Según tu distribución de las edades, ¿qué es más representativo de la muestra: el promedio o la mediana?, ¿por qué?
 - ¿Es útil la moda en este caso? ¿Por qué?

Al momento de escoger qué medida de tendencia central es la adecuada para definir un conjunto de datos, es necesario considerar que:

- El uso de la media aritmética puede llevar a malinterpretar los datos si existen algunos datos muy alejados de la mayoría.
- La mediana proporciona el valor típico aun cuando los datos no estén bien agrupados.
- La media aritmética puede dejar de ser representativa si el tamaño de la muestra es muy pequeño.
- Cuando los datos sean simétricos, la media y la mediana serán esencialmente el mismo número.
- El uso de la moda es útil si, por ejemplo, en una encuesta que mide el aprendizaje de una lección, se quiere conocer el nivel más común.

3. En parejas, realicen un estudio sobre la cantidad de azúcar de dos grupos de jugos y néctares embotellados: los denominados *light* y los comunes. Luego, calculen la moda, la media aritmética y la mediana para comparar estos grupos.

* Nota: El azúcar en muchos alimentos se cataloga como hidratos de carbono disponibles.



Para concluir

- Inventa un conjunto de datos en que la media, la moda y la mediana tengan el mismo valor (los datos no pueden ser todos iguales). ¿Qué característica tienen estos datos? Explica paso a paso tu análisis.
- ¿Te resultó útil la estrategia de reconocimiento de las medidas de tendencia central para cierto grupo de datos y contexto? ¿Tienes otra forma de realizarlo?
- ¿Qué deberías reforzar respecto de las medidas de tendencia central?



114

Antes de continuar

Realiza las actividades dispuestas a continuación.

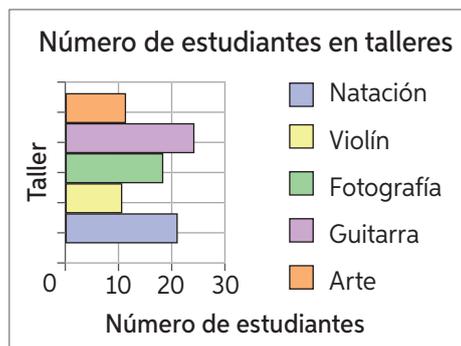
1. La Municipalidad desea conocer las edades de las personas que visitan la plaza en la mañana con el objetivo de realizar actividades dirigidas a la mayoría.

Patricio 56 años	Daniela 65 años	Arlette 35 años	Carla 66 años	Romina 50 años	Lisette 48 años	Patricia 30 años
Gladys 70 años	Luis 6 años	Simón 85 años	Anita 6 años	Natalia 6 años	Fabían 2 años	Cristián 6 años
Carlos 63 años	Julio 56 años	Catalina 65 años	Jacinta 8 años	Antonia 71 años	Benjamín 56 años	David 55 años
María 2 años	Lucía 71 años	Cecilia 56 años	Camila 69 años	Willy 6 años	Karina 62 años	Juan 66 años

- a. A partir de la imagen, calcula las medidas de tendencia central adecuadas para el objetivo de la Municipalidad.
- b. Analiza el resultado obtenido y responde: ¿la Municipalidad debiese realizar actividades para niños o adultos? Justifica tu respuesta.

2. Responde a partir del gráfico.

- a. ¿Cuál es la moda?
- b. ¿Qué significa la moda en este grupo de datos?
- c. Si se inscriben diez estudiantes más en el taller de natación, ¿qué ocurre con la moda?



3. En la tabla a continuación se presentan las medidas de tendencia central de las notas de cuatro cursos respecto de los promedios de biología. ¿En cuál de los cuatro cursos puede asegurarse que al menos el 50 % tiene nota promedio superior a 5,2? Justifica.

Curso	Media	Mediana	Moda
7° A	5,4	5,1	5,7
7° B	5,2	4,9	5,5
7° C	5,1	5,2	4,7
7° D	5,1	4,9	5,2

Reflexiono

- Evalúa tu aprendizaje mencionando qué estrategias te resultaron más sencillas para calcular porcentajes y variaciones porcentuales.
- Realiza un plan de mejora para aquellas estrategias que te resultaron más difíciles de llevar a cabo.



Experimentos aleatorios

Objetivo: Describir espacio muestral, evento y casos favorables en experimentos aleatorios.

En un juego o sorteo, ¿puedes saber exactamente el resultado? Explica.

¿Qué es un experimento? ¿Qué experimentos has realizado?

1. Observa la situación y realiza las actividades propuestas.

Existen los experimentos determinísticos, cuyo resultado se puede predecir, y los aleatorios, cuyo resultado no se puede predecir.

En ciencias, un experimento consiste en aplicar un procedimiento para descubrir o demostrar algunos fenómenos o principios. En probabilidad, existen dos tipos de experimentos.



Clasifica cada experimento como determinístico o aleatorio.

- Abrir un libro sin mirar y observar el número de la página.
- Lanzar un dado y observar el número de puntos obtenidos.
- Calcular el promedio de mis notas en Matemática a fin de año.
- Analizar si el agua a 100 °C, al nivel del mar, inicia su proceso de ebullición.
- Extraer una bolita roja de una urna con bolitas rojas y azules.
- Observar si amanece mañana.
- Predecir el ganador de una competencia de atletismo.

En probabilidad, existen dos tipos de experimentos:

Determinístico

Su resultado se puede predecir, ya que es único. Si se lo repite bajo las mismas condiciones, este no varía.

Aleatorio

No se puede predecir su resultado, ya que no es único. Si se lo repite bajo las mismas condiciones, este puede variar.

2. Formen grupos de tres integrantes y realicen la siguiente actividad:

- Cada uno lanzará una vez el dado numerado.
- Antes de cada lanzamiento, cada miembro del grupo dirá qué número cree que saldrá en la cara superior.
- Gana quien acierte el número.
- Repitan el juego 3 veces.
- Anoten en una tabla el número que salió en el dado y el nombre de la persona que ganó.



- a. ¿Qué números pueden elegir al lanzar un dado?
- b. Al elegir el 6, ¿es más difícil ganar que al elegir cualquier otro número? Justifiquen su respuesta.
- c. ¿Existe algún número con el que haya más posibilidades de ganar?
- d. ¿Se puede saber *a priori* quién ganará el juego de acuerdo con la elección de sus números? Justifiquen sus respuestas.

En un experimento aleatorio el conjunto formado por todos los posibles resultados se denomina **espacio muestral**, designado por Ω .

Un suceso o evento A es cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo:

Experimento: lanzar un dado y registrar el número que muestra su cara superior.

Espacio muestral $\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Suceso (que salga un número par) \Rightarrow Casos favorables = $A: \{2, 4, 6\}$.

Un experimento aleatorio es **equiprobable** si los sucesos de su espacio muestral son equiprobables, es decir, tienen igual probabilidad de ocurrir. De lo contrario, se dirá que el experimento no es equiprobable.

3. Escribe el espacio muestral y los casos favorables de cada evento descrito. Luego, crea un suceso que sea equiprobable al planteado.

- a. Lanzar un dado de ocho caras numeradas del 1 al 8 y que salga un número primo.
- b. Lanzar tres monedas y obtener exactamente dos sellos y una cara.
- c. Extraer dos bolitas de una urna solo con bolitas negras y blancas, y extraer por lo menos una blanca.



Para concluir

- a. Construye un diagrama que resuma los conceptos vistos en el tema.
- b. ¿Cómo le enseñarías a un compañero que no conoce el contenido a identificar experimentos aleatorios, espacios muestrales y sucesos?
- c. ¿Aprendiste qué es un experimento aleatorio? ¿Por qué lo sabes? Explica.

Probabilidades y frecuencia relativa

Objetivo: Analizar experimentos equiprobables a través de la frecuencia relativa.

Cuando lanzamos un dado y anotamos sus resultados, luego de repetirlo muchas veces, ¿es posible observar cierta tendencia en los resultados obtenidos?

Escribe tres ejemplos de una situación similar a la pregunta anterior.

1. La tabla muestra los resultados (cara-sello) del experimento “lanzar una moneda” de acuerdo con la cantidad de veces que este se repite.

N.º de lanzamientos	f de cara	f de sello
1000	700	300
2000	1500	500
3000	1400	1600
4000	1900	2100
5000	1900	3100
10000	4800	5200
15000	7700	7300
20000	10700	9300
25000	12800	12200

- a. Construye una tabla de frecuencias que incluya frecuencia absoluta, relativa y relativa porcentual.
- b. Representa la frecuencia relativa de cada uno de los eventos utilizando un gráfico de líneas.
- c. ¿A qué número tiende la frecuencia relativa de cada evento a medida que se realizan más lanzamientos?
- d. ¿Cuál crees que es el resultado más probable de salir? ¿Por qué?



Sello

Cara

En un experimento aleatorio, la probabilidad es un número que se asigna a cada suceso y que da información acerca de la frecuencia con que ocurre. Una estimación de dicho número es la **probabilidad frecuencial o estimada**, que corresponde a la frecuencia relativa del suceso al realizar el experimento.

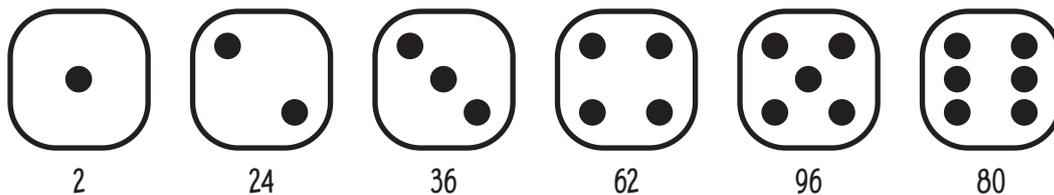
- Si el valor de la probabilidad se relaciona con la frecuencia relativa, ¿cuál será el valor mínimo que puede tomar y cuál el máximo? ¿Por qué?
- ¿Para qué te sirvió el desarrollo de la actividad inicial? ¿Que relación tiene la actividad inicial con la información entregada en el recuadro amarillo?

Lección 18

2. Realiza la siguiente actividad utilizando el simulador de lanzamientos propuesto.

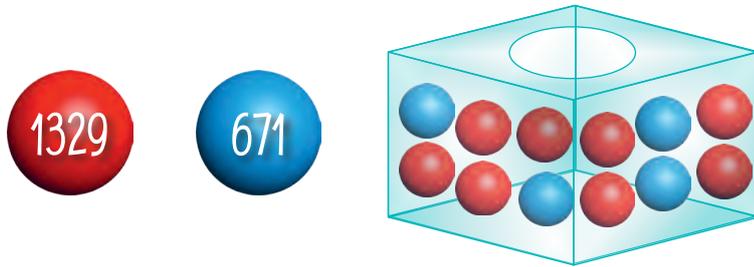
Ingresa a www.enlacesmineduc.cl y escribe el código **T20M7BP212A** para realizar la actividad.

- Simula el lanzamiento del dado de seis caras no cargado 500 veces. Con los datos, construye una tabla similar a la del ejercicio anterior.
 - ¿Qué sucede con los resultados obtenidos para cada número (1, 2, 3, 4, 5, 6) a medida que aumenta la cantidad de lanzamientos?
 - ¿Qué sucede con las frecuencias relativas de cada número obtenido a medida que aumentan los lanzamientos? ¿A qué valor tienden? ¿A qué porcentaje equivalen?
 - Si lanzaras 6000 veces el dado, ¿cuántas veces aproximadamente te saldrían los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cómo serían sus frecuencias relativas?
 - Según el experimento realizado, ¿cuál es la probabilidad estimada de obtener 3 al lanzar el dado?, ¿y la de obtener 4? Explica.
 - ¿Qué sucesos tienen igual probabilidad de ocurrir al lanzar un dado no cargado?
3. Se lanzó un dado cargado de seis caras 300 veces y se obtuvieron los siguientes resultados:



- Construye un gráfico de barras simple que muestre los resultados obtenidos en los 300 lanzamientos.
 - Según los resultados obtenidos, ¿cuál es la probabilidad estimada de cada resultado del dado?
 - Los resultados observados en el gráfico, ¿dan cuenta de sucesos de igual probabilidad? Explica.
 - Si se lanzara nuevamente el dado, ¿qué número crees que saldría? ¿Por qué?
 - ¿Por qué crees que inicialmente se habló de un dado cargado? ¿Cómo se refleja esto en los resultados obtenidos?
- ¿Tienes claro el concepto de probabilidad estimada o frecuencial?
- ¿Cómo puedes relacionar estos conceptos con tu vida?

4. Considera el experimento de extraer una bolita, registrar su color en la tabla y devolverla. El experimento fue realizado 2000 veces.



- ¿Cuál es la relación entre las cantidades de bolitas?
 - ¿Qué se espera de la probabilidad de cada suceso?
 - ¿Se puede representar con fracciones y porcentajes la probabilidad estimada? Justifica tu respuesta.
5. Completa la tabla en tu cuaderno considerando que se realizaron 5000 extracciones de una ficha desde una urna con fichas numeradas desde el 1 al 10. Luego, resuelve.

5000 extracciones										
N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	490	513	501	491	508	506	493	498	502	498
f_r	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

- Calcula la diferencia entre la mayor y la menor probabilidad frecuencial.
 - ¿Es significativo el valor calculado en la actividad anterior? Justifica.
 - Si se aumentan las extracciones a 100 000, ¿a qué valor debiese tender cada probabilidad frecuencial? ¿Por qué?
 - Según tu respuesta anterior, ¿cuál crees que es la probabilidad de extraer una ficha con el 7?
- ¿Qué has aprendido de ti mismo en el desarrollo de este tema? ¿Consideras que has aprendido todo lo que se te ha propuesto? ¿Por qué?



117 y 118

Para concluir

- Al realizar un experimento aleatorio, Javier calcula la probabilidad estimada de un suceso, siendo esta un 17%. Él afirma que si aumenta el número de repeticiones del experimento, la probabilidad estimada también aumentará. ¿Estás de acuerdo con Javier? Fundamenta tu respuesta y explica paso a paso tu razonamiento.
- ¿Qué estrategias usaste para completar las tablas de frecuencias relacionadas con Probabilidad y frecuencia relativa? Explica por qué escogiste esa estrategia.
- ¿Qué contenidos referidos a Probabilidad y frecuencia relativa crees que podrías mejorar? ¿Cómo lo harías?

Cálculo de probabilidades

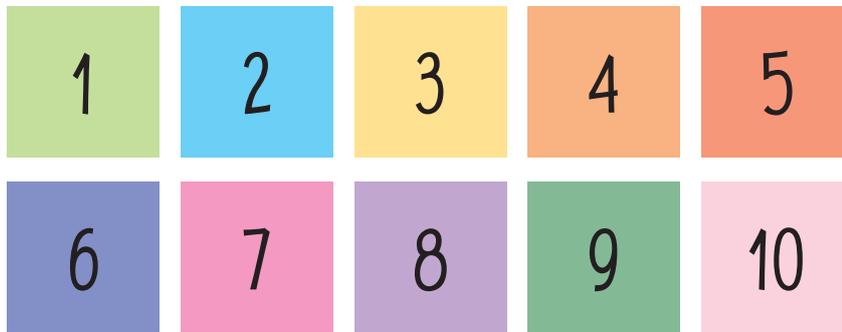
Objetivo: Calcular la probabilidad de ocurrencia de sucesos usando la regla de Laplace.

¿En qué contextos no matemáticos utilizas la palabra probabilidad?

¿Qué significado tiene que una cosa sea más probable de otra? Explica.

1. Reúnanse en tríos y realicen la siguiente actividad:

- a. En 10 papelitos de igual tamaño escriban los números del 1 al 10 y analicen ciertas probabilidades de ocurrencia antes de realizar el experimento “extraer un papelito sin mirar y anotar el número”.



- b. Copia la frase en tu cuaderno y completa según el experimento.
- Hay de posibilidades de que salga un 3.
 - Hay de posibilidades de que salga un 5.
 - Hay de posibilidades de que salga un 1.
 - Hay de posibilidades de que salga un 7.
 - Hay de posibilidades de que salga un 10.
- c. ¿Qué pasará con las posibilidades para los demás resultados?
- d. Escriban como razón la probabilidad de obtener cada papelito al realizar una extracción (resultado).

Entonces, cada resultado del experimento “sacar un papelito y anotar el número” tiene la misma probabilidad de ocurrir, es decir, el experimento es equiprobable.

- e. ¿Qué sucede si se quiere conocer la probabilidad del evento “que sea número par”? Copia las frases y complétalas.
- Hay casos posibles o resultados.
 - Hay casos favorables al evento, los cuales son: .
- f. ¿Cuál es la probabilidad para cada caso favorable?, ¿y cuál es la probabilidad de extraer un número par?
- g. Calculen la probabilidad del evento “que sea número primo”.
- h. ¿De qué manera se podría generalizar la forma de encontrar la probabilidad para cierto evento?

El cálculo de la probabilidad teórica (P) de un suceso o evento en un experimento equiprobable se obtiene aplicando la regla de Laplace, que dice:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Casos favorables \Rightarrow número de elementos del evento.

Casos posibles \Rightarrow número de elementos del espacio muestral (que debe ser finito).

La probabilidad teórica puede expresarse como fracción, número decimal o porcentaje.

- ¿Por qué la probabilidad de un suceso no puede ser mayor que 1 o menor que 0? Discute con tus compañeros.

2. Mahuru confeccionará flores de distintos colores para regalar a las personas que llegan a Isla de Pascua. Al terminar, tiene 300 flores verdes, 250 fucsias y 200 blancas.

Como no cuenta con la misma cantidad de flores para cada color, decide armar los collares tomando las flores al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera flor que saque sea verde?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que la primera flor que saque sea blanca?, ¿y de que sea fucsia?
3. Calcula la probabilidad de cada suceso al hacer girar la ruleta. Observa el ejemplo.



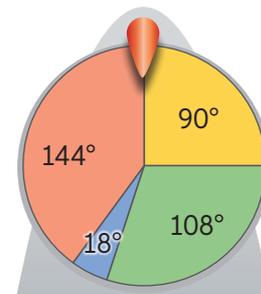
Que caiga en el color amarillo

Los casos favorables de que salga el color amarillo son 90° y los casos totales son 360° (giro completo de la ruleta). Por lo tanto, la probabilidad de que salga amarillo será:

$$P(\text{amarillo}) = \frac{90}{360} = 0,25$$

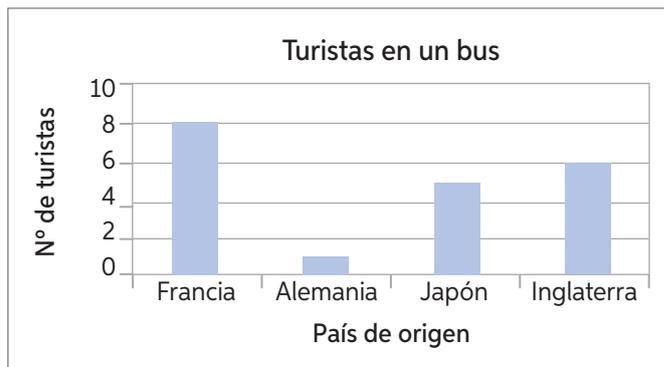
Así, la probabilidad es de un 25%.

- Que quede en el color verde.
- Que quede en el color azul.
- Que quede en el color rojo.
- Que quede en el color azul, rojo o verde.
- Que no quede en color azul.
- Que no quede en el color rojo.



- ¿Qué procedimiento seguiste para resolver las actividades e y f? Explica.

4. El gráfico representa la cantidad de turistas de un bus.

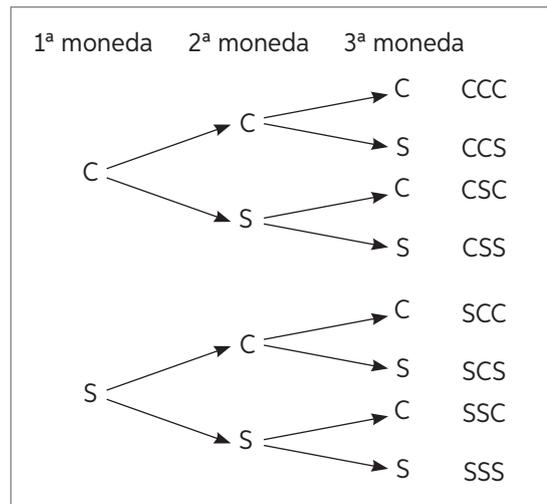


- Determina los casos favorables para el suceso “que el primero en bajar del bus sea japonés”.
- ¿Cuál es la probabilidad de este evento si todos tienen la misma probabilidad de bajar primero del bus?

5. Analiza el diagrama de árbol del lanzamiento de tres monedas simultáneamente. Considera que C: cara y S: sello.

¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de los siguientes eventos?

- Que salgan dos caras y un sello.
- Que salga solo una cara.
- Que salgan tres sellos.
- Que salga al menos una cara.
- Que salgan al menos dos sellos.
- Que no salgan caras



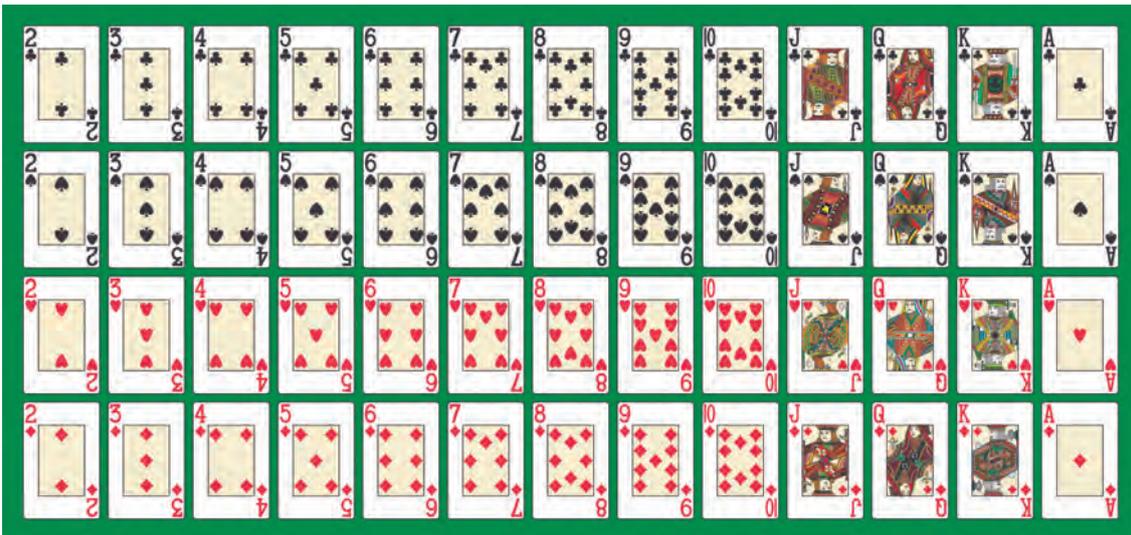
Un **diagrama de árbol** es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, ya que en el cálculo de la probabilidad se requiere conocer el número de elementos del espacio muestral.

- De una caja en que hay 3 fichas azules y 2 rojas, se sacarán dos de la siguiente forma: se extrae una ficha, se observa y anota el color, y se la devuelve a la caja. Luego, se saca la segunda ficha y se repite lo anterior.
 - Realiza un diagrama de árbol que ilustre la situación anterior.
 - Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:
 - Que las dos fichas sean azules.
 - Que la primera ficha sea azul y la segunda sea roja.
 - Que ambas fichas tengan el mismo color.
 - Que las fichas tengan distinto color.

7. La tabla muestra la cantidad de hombres y mujeres que estudia en un colegio técnico las especialidades de Mecánica y Contabilidad.

	Mecánica	Contabilidad
Mujeres	11	54
Hombres	81	54

- Interpreta el dato destacado en amarillo.
 - Calcula la probabilidad de escoger al azar, del total de alumnos, una mujer que estudie Mecánica.
 - Calcula la probabilidad de escoger al azar, del total de hombres, uno que estudie Contabilidad.
8. Observa el mazo y responde.



Si se saca al azar una carta, calcula la probabilidad de ocurrencia de los siguientes eventos.

- Que la carta sea un trébol.
- Que la carta sea un 2.
- Que la carta contenga una letra y sea de pinta roja.
- Que la carta sea un 9 de pica.
- Que la carta sea un número impar de diamantes.
- Que la carta no sea de pinta roja.

Considera J, Q, K y A solo como letras



119 y 120

Para concluir

- Resume los contenidos vistos en el tema utilizando un dibujo o diagrama.
- ¿En qué te facilita los procesos el diagrama de árbol?
- ¿Qué fue lo que más te costó comprender del cálculo de probabilidades?, ¿por qué crees que ocurrió esto?

Comparación de probabilidades

¿Es lo mismo la probabilidad teórica que la probabilidad estimada?, ¿cuál es la diferencia?

¿Pueden ser iguales la probabilidad teórica y la estimada?

Objetivo: Comparar la probabilidad estimada (frecuencia relativa) con la probabilidad teórica.

1. Reúnanse en parejas. Luego, consigan dos dados cúbicos numerados y realicen las siguientes actividades:

- Registren las parejas de todos los posibles resultados que obtienen al lanzar dos dados de 6 caras en forma simultánea.
- ¿Cuántos elementos tiene en total el espacio muestral del experimento?
- Lancen los dos dados simultáneamente 50 veces y registren sus resultados.
- En sus cuadernos, construyan una tabla de frecuencia como la siguiente:



Dado electrónico: ingresa a www.enlacesmineduc.cl y escribe el código **T20M7BP218A**.

Resultado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
Resultado A	■	■	■

- ¿Cuál es la probabilidad estimada de obtener cada una de las parejas de números?
- Con respecto a la probabilidad teórica, ¿qué es más probable: obtener 5 en uno y 6 en el otro, o 6 en ambos dados? Explica tu respuesta usando probabilidades.
- ¿Qué es más probable teóricamente: obtener el mismo número en los dos dados o diferentes números en los dados? Explica tu respuesta usando probabilidades.
- ¿Qué es menos probable teóricamente: obtener 3 en un dado y un número par en el otro, o un número impar en ambos dados? Explica tu respuesta usando probabilidades.
- ¿Cómo es la probabilidad estimada de tus lanzamientos con respecto a la probabilidad teórica calculada?
- ¿Qué deberías hacer para que la probabilidad estimada se acerque más a la teórica? Explica.

Los valores de la **frecuencia relativa** tienden a estabilizarse en torno al valor correspondiente a la **probabilidad teórica** del evento cuando se realiza el experimento un gran número de veces.

- ¿Qué conocimientos debo recordar para poder afrontar los contenidos de este tema?

2. Reúnanse en parejas y sigan las instrucciones. Luego, respondan.

Paso 1: Construyan 20 rectángulos congruentes de papel y numeren 9 de ellos del 1 al 9.

Paso 2: En 6 papeles escriban un nombre de persona.

Paso 3: En el resto, dibujen una figura geométrica cualquiera.

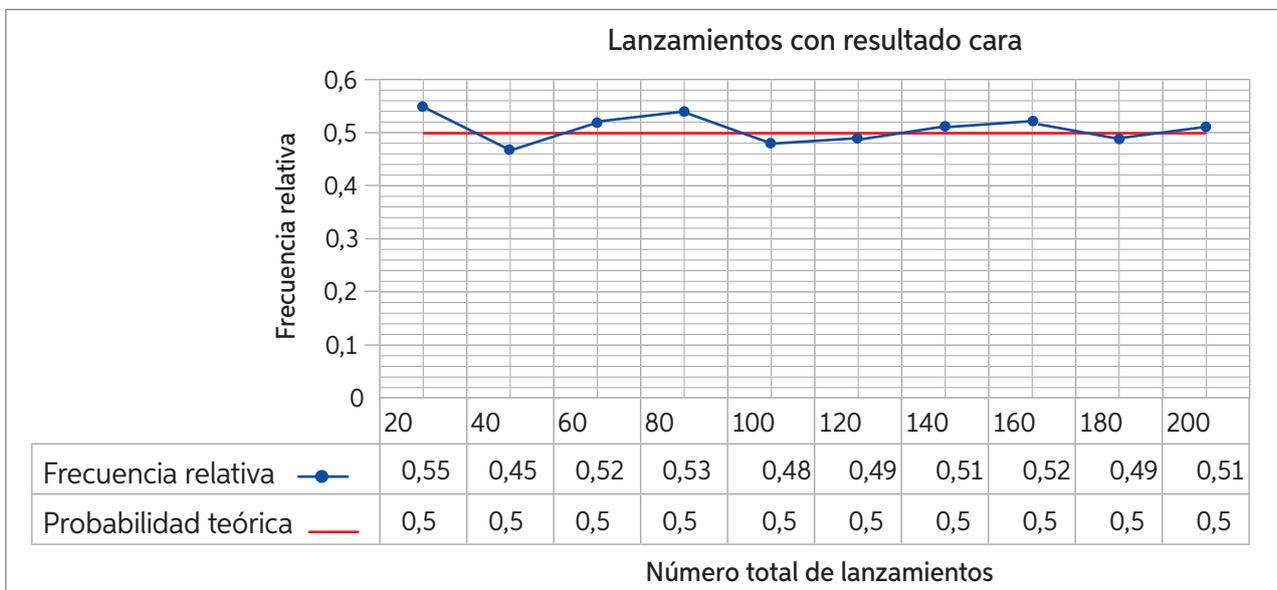
Paso 4: Doblen en cuartos los papeles y pónganlos dentro del recipiente.

- Extraigan aleatoriamente uno de los papeles y escriban el resultado (número, nombre o figura). Luego, regresen el papel a su lugar y repitan el proceso 50 veces.
- Construyan una tabla de frecuencias con los resultados obtenidos.
- ¿Cómo son los resultados obtenidos con respecto a la probabilidad teórica? Explica el proceso que seguiste para el análisis.

Materiales

- 20 rectángulos de papel
- Lápices
- Bolsa o recipiente no transparente

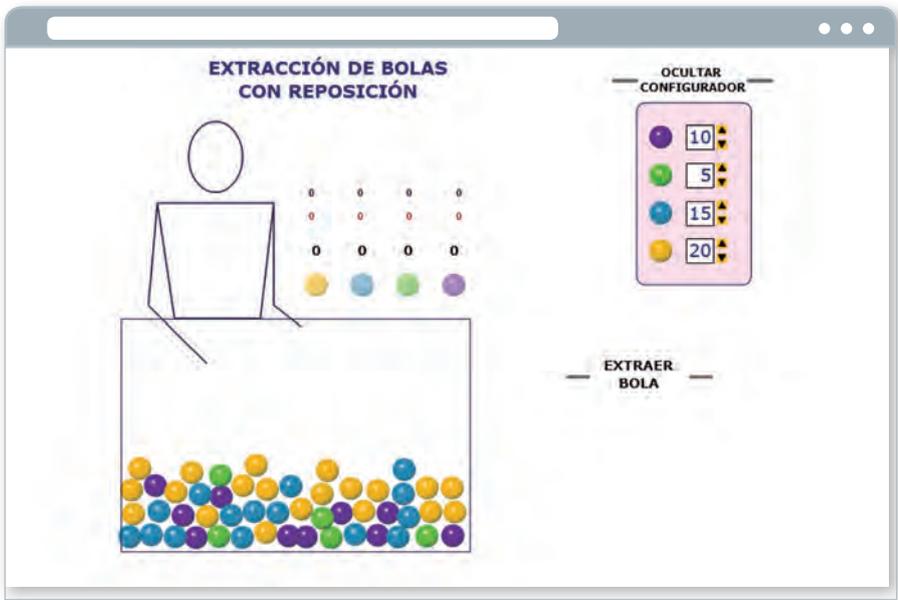
3. Analiza el gráfico. Luego, responde las preguntas a continuación.



- Observa en la gráfica los valores correspondientes a las frecuencias relativas (probabilidad estimada) y la probabilidad teórica. ¿Qué puedes decir al respecto?
 - ¿Qué crees que sucederá con la relación entre las líneas a medida que se aumente el número de lanzamientos?
- ¿Qué beneficios tiene comparar las probabilidades mediante un gráfico de líneas? En parejas, comenten su respuesta.
- ¿Podrías haber representado el ejercicio anterior con otro tipo de gráfico?, ¿cuál? Justifica tu respuesta.

4. Sigue las instrucciones para realizar la siguiente actividad.

Ingresa a www.enlacesmineduc.cl y escribe el código **T20M7BP220A**. Descarga la aplicación y configúrala como indica la figura.



- a. Realiza 20 extracciones y escribe tus resultados.
- b. Repite el procedimiento para 50 extracciones.
- c. Completa las 100 extracciones y escribe los resultados.
- d. Copia la tabla en tu cuaderno. Luego, complétala.

	Amarilla		Celeste		Verde		Morada	
	f	f_r	f	f_r	f	f_r	f	f_r
20 extracciones	■	■	■	■	■	■	■	■
50 extracciones	■	■	■	■	■	■	■	■
100 extracciones	■	■	■	■	■	■	■	■
P. teórica	■	■	■	■	■	■	■	■

- e. ¿Cuál es la diferencia entre la probabilidad teórica y la estimada de 100 extracciones? Calcula para cada caso.
- f. ¿Qué conclusiones puedes plantear con respecto a la cantidad de veces que es necesario repetir un experimento para acercarse a la probabilidad teórica?



Para concluir

- a. Escribe con tus palabras una frase, de máximo una línea, que resuma lo visto en el tema de Comparación de probabilidades.
- b. ¿Qué estrategias debiste recordar para realizar las actividades solicitadas?
- c. ¿Cómo evalúas tu aprendizaje en Comparación de probabilidades? Explica.

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las actividades dispuestas a continuación.

1. Plantea dos ejemplos de experimento aleatorio y dos de experimento determinístico. Luego, explica por qué lo son.
2. En un evento se prepararon tres tipos de postres en las cantidades que se muestran a continuación:

Torta: 88 porciones

Fruta: 120 porciones

Helado: 90 porciones

- a. ¿Cuántos postres se prepararon para el evento?
 - b. Si se reparten aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que a un invitado le toque ensalada de fruta? ¿Cuál es la probabilidad de que no le toque ensalada de fruta? ¿Cómo lo descubriste?
3. El taller de fútbol de una comuna tiene jóvenes de diferentes edades, como se muestra en esta tabla:

12	13	15	15	15	13	14	12	14	15
11	12	12	14	14	14	14	15	11	13
11	15	15	15	13	13	12	14	15	15

Si se elige un jugador al azar:

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga 12 años?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 13 años?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga menos de 14 años?
 - d. ¿Es más probable que tenga 11 años o que tenga 15 años? ¿Por qué?
4. Lanza 20, 40, 60 y 100 veces un dado no cargado de 6 caras y registra el resultado cada vez que salga un número menor o igual a 2. Luego, realiza las actividades:
 - a. Construye una tabla con las frecuencias absoluta y relativa del experimento.
 - b. Calcula la probabilidad teórica de que salga un número menor o igual a 2 en el lanzamiento del dado.
 - c. Construye un gráfico que muestre la relación entre las probabilidades estimada y teórica del experimento. ¿Se cumple lo dicho en la definición anterior? Explica.

Reflexiono

- Evalúa tu aprendizaje. ¿Qué contenidos piensas que debes reforzar? Crea un plan de reforzamiento para los temas que consideres más débiles.



123

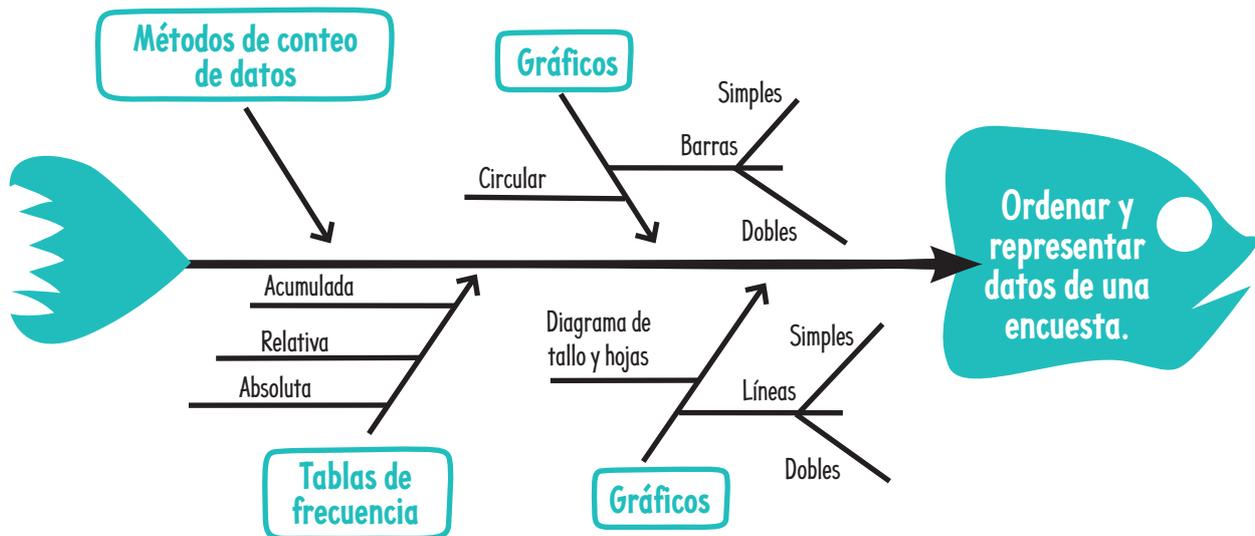
Síntesis

¿Qué es un diagrama de pez?

Conocido también como diagrama de Ishikawa, es un organizador gráfico que nos muestra la relación de diversos factores que conforman un proceso o fenómeno, estructurando ideas y encaminando el proceso principal.

Para confeccionar este diagrama, se debe definir el eje central y los sucesos que intervienen e identificar cómo los procesos están involucrados entre sí.

Observa el diagrama de pez que sintetiza el proceso de organización de datos.



Ahora, hazlo tú

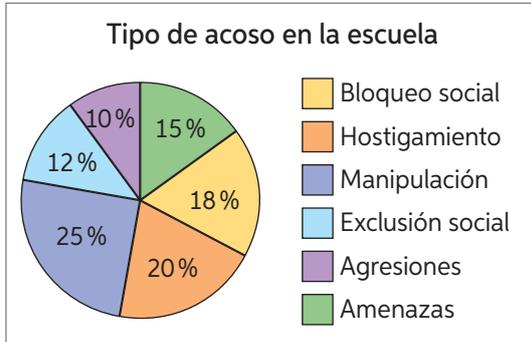
1. Explica el diagrama de pez observado.
2. Escoge una lección de la Unidad 4 y realiza un diagrama de Ishikawa.
3. En parejas, compartan y analicen sus diagramas. ¿Qué Lección consideró cada uno para crear su síntesis? ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre sus diagramas?

Repaso

Realiza las siguientes actividades:

Lección 16: Organización y representación de datos

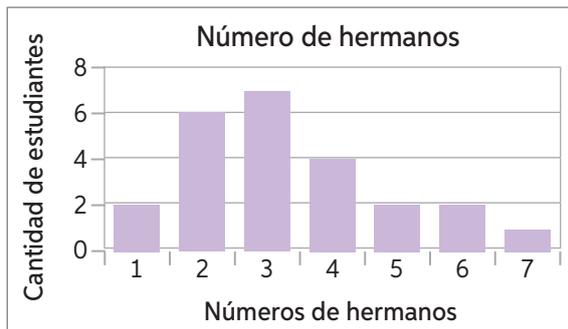
1. Responde a partir del gráfico.



- ¿Qué tipo de acoso es el más frecuente?
- ¿Qué tipo de acoso es el menos frecuente?
- ¿Qué porcentaje de personas consideran que el bloqueo social y el hostigamiento son los acosos más frecuentes?
- Construye una tabla de frecuencias considerando que la encuesta se realizó a 500 estudiantes.
- Representa los datos con un gráfico de barras.

Lección 17: Medidas de tendencia central

2. Analiza el gráfico y responde.



- ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- Indica las medidas de tendencia central del grupo de datos.

3. Los siguientes resultados corresponden al número de pulsaciones por minuto (ritmo cardiaco) en reposo de 35 hombres de entre 20 y 30 años.

108	82	62	74	58	90	85
70	70	63	63	80	58	98
85	90	84	68	67	81	66
60	65	57	100	62	92	103
66	102	65	70	55	87	54

- Calcula el promedio de las pulsaciones.
- Identifica la mediana.

Lección 18: Probabilidad

4. Se encuestó a 80 personas sobre el tipo de películas que más les gusta y se obtuvo lo siguiente:

Tipo de película	Número de personas
Aventura	15
Comedia	10
Terror	18
Infantil	12
Musical	6
Ciencia ficción	19

- Si se elige una persona al azar, ¿qué tipo de película es más probable que le guste? ¿Por qué?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, a esta le gusten los musicales o las películas de terror?
5. Se lanzan sobre una mesa tres dados cúbicos numerados no cargados.
- ¿Cuál es el total de elementos del espacio muestral del experimento?
 - ¿Es más probable que todos los números sean pares o impares?
 - ¿Es seguro afirmar que, al sumar los valores obtenidos, el resultado será menor que 19? ¿Por qué?

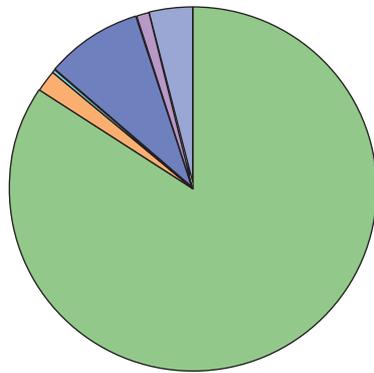
¿Qué aprendí?

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

Turistas extranjeros

Durante los últimos años ha crecido considerablemente la llegada de extranjeros a Chile para visitar diversos lugares.

El siguiente gráfico muestra, en porcentajes, el origen de los 5 722 928 turistas que visitaron Chile durante 2018.



América	4 832 392
Asia	110 745
África	4955
Europa	498 937
Oceanía	63 460
No clasificado	212 439

■ América ■ Asia ■ África
■ Europa ■ Oceanía ■ No clasificado

Practica

Realiza las actividades basadas en la imagen principal.

1. ¿De qué continente es la mayor cantidad de extranjeros que visitaron Chile?
2. ¿Qué porcentaje de los extranjeros que visitaron Chile provienen de Asia?
3. ¿Qué porcentaje de los extranjeros que visitaron Chile provienen de África u Oceanía?
4. Según la información, ¿cuántos turistas no americanos visitaron Chile durante 2018?
5. Si se elige un visitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de origen europeo?

6. Si se elige un visitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de origen americano?

Realiza las actividades a continuación.

7. Lanza 20, 40, 60 y 100 veces una moneda y registra el resultado cada vez que salga cara. Luego, realiza las siguientes actividades:
 - a. Construye una tabla con las frecuencias absoluta y relativa del experimento.
 - b. Calcula la probabilidad teórica de que salga cara.
 - c. Construye un gráfico que muestre la relación entre las probabilidades estimada y teórica del experimento.



8. La siguiente tabla muestra la información relacionada con la cantidad de zonas de camping que existen en Chile.

Región	Zona de camping (Cantidad)
Arica y Parinacota	10
Tarapacá	4
Antofagasta	12
Atacama	9
Coquimbo	47
Valparaíso	33
O'Higgins	44
Maule	55
Ñuble	33
Bíobío	105
La Araucanía	50
Los Ríos	64
Los Lagos	95
Aysén	61
Magallanes	26
Metropolitana	20

- Construye un gráfico de barras que represente la información entregada en la tabla.
- ¿A qué porcentaje del total de los campings corresponden los de la Región de Los Ríos?
- ¿Es posible determinar medidas de tendencia central con la información entregada en el gráfico? ¿Por qué?
- Indica la probabilidad de cada suceso considerando una elección al azar.
 - Elegir un camping de la Región de La Araucanía.
 - Elegir un camping de la Región de Magallanes.
 - Elegir un camping de la Región Metropolitana.

Reflexiono

- Al resolver las actividades de esta evaluación, ¿qué actividades te costaron más?, ¿cuáles menos? ¿Por qué crees que ocurrió esto?
- ¿Qué resultados dieron los repasos propuestos en las evaluaciones intermedias?
- ¿Para qué crees que es útil aprender los contenidos de esta Unidad? Fundamenta.

Glosario

A

Abscisa: primera coordenada de un par ordenado, correspondiente a la posición en el eje X.

Acutángulo: triángulo que tiene todos sus ángulos agudos.

Altura: de un triángulo, segmento que une perpendicularmente un vértice con el lado opuesto.

B

Baricentro: o centro de gravedad, punto de intersección de las transversales de gravedad de un triángulo.

Bisectriz: semirrecta que divide un ángulo en dos ángulos congruentes.

C

Circuncentro: punto de intersección de las simetrales de un triángulo.

Circunferencia circunscrita: a un triángulo, circunferencia que contiene todos sus vértices, con origen en el circuncentro.

Circunferencia inscrita: a un triángulo, circunferencia cuyo centro es el incentro y es tangente a todos los lados del triángulo.

Colineales: puntos ubicados en la misma recta.

D

Diagrama de árbol: diagrama que representa todos los posibles resultados o combinaciones de un experimento (espacio muestral).

Diámetro: segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.

E

Elemento neutro: número que operado con cualquier otro no lo altera. Por ejemplo, el elemento neutro de la adición en los enteros es el cero.

Equilátero: triángulo que tiene todos sus lados de la misma medida.

Escala: relación matemática entre las distancias representadas gráficamente y la realidad.

Escaleno: triángulo que tiene todos sus lados de diferente medida.

Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento o suceso: subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Experimento aleatorio: experimento cuyos resultados no se pueden predecir al realizarse bajo las mismas circunstancias.

Expresión algebraica: suma o resta de términos algebraicos.

F

Frecuencia absoluta (f): cantidad de veces que se repite cierto dato.

Frecuencia acumulada (F): suma sucesiva de las frecuencias absolutas de los datos.

Frecuencia relativa (f_r): número que se obtiene al dividir la frecuencia absoluta por el número total de datos de la muestra.

Frecuencia relativa porcentual ($f_{r\%}$): frecuencia relativa expresada en porcentaje.

I

Incentro: punto de intersección de las bisectrices de un triángulo.

Inverso aditivo: número que sumado a otro da como resultado cero, el elemento neutro aditivo.

Isósceles: triángulo que tiene dos lados de igual medida.

L

Lugar geométrico: conjunto de puntos que cumplen con una misma condición. Por ejemplo: la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

M

Magnitud de un vector: tamaño que tiene un vector.

Media aritmética: medida de tendencia central, conocida como promedio.

Mediana: medida de tendencia central. Corresponde al dato que ocupa el lugar central de una muestra de datos ordenados. Si la cantidad de datos es par, se considera el promedio de los dos valores centrales.

Mediatriz: simetral.

Medidas de tendencia central: valores en torno a los cuales suelen agruparse los datos de un conjunto.

Moda: medida de tendencia central. Corresponde al valor que más se repite en un conjunto de datos.

Muestra: subconjunto de elementos de una población.

N

Notación científica: forma de escribir números usando potencias de 10. Se expresa un número como el producto entre un número mayor o igual que 1 y menor que 10, y una potencia de base 10.

Números enteros: conjunto formado por los números naturales, el cero y los opuestos de cada número natural.

O

Obtusángulo: triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Opuesto aditivo: inverso aditivo.

Ordenada: segunda coordenada de un par ordenado, correspondiente a la posición en el eje Y.

Ortocentro: punto de intersección de las alturas de un triángulo.

P

Par ordenado: elemento matemático en el que se distingue un primer elemento, que indica una posición en el eje X y un segundo elemento, que indica una posición en el eje Y.

Plano cartesiano: sistema de referencia conformado por dos rectas numéricas perpendiculares, cuya intersección se denomina origen.

Población: conjunto de todos los elementos de los cuales se quiere estudiar una o varias características o propiedades.

Potencia: representación de una multiplicación reiterada de un número por sí mismo en cierta cantidad de veces.

Probabilidad: número que se asigna a un suceso y que da información acerca de la frecuencia con que este puede ocurrir. Sus valores están entre 0 y 1.

Proporción directa: relación entre variables cuyo cociente es constante.

Proporción inversa: relación entre variables cuyo producto es constante.

R

Radio: segmento que une el centro de una circunferencia con cualquier punto de ella.

Rango: medida de dispersión que corresponde a la diferencia entre el mayor y el menor de los valores de una variable cuantitativa.

S

Sentido: indica hacia dónde apunta la línea recta que representa la dirección.

Simetral: recta perpendicular a un segmento y que pasa por su punto medio.

T

Términos semejantes: términos que tienen el mismo factor literal.

Transversal de gravedad: segmento que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.

V

Valor absoluto: número que se puede asociar a la distancia de un número respecto del 0 en la recta numérica. Por ejemplo, el valor absoluto de -3 es 3, ya que la distancia de 0 a -3 es 3.

Variable cualitativa: variable que expresa una cualidad, categoría o atributo.

Variable cuantitativa: variable que se puede medir y expresar numéricamente.

Variable estadística: característica que se estudia en una población o muestra.

Vector: segmento de recta dirigido que tiene dirección, sentido y módulo o magnitud.

Vector de desplazamiento: vector que permite trasladar figuras en el plano cartesiano.

Solucionario

Unidad 1. Números

Página 8

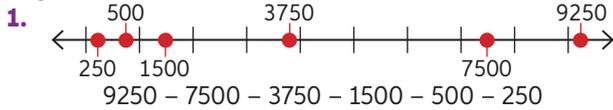
1. 125 personas.

Página 9

2. La diferencia es de $38\frac{3}{5}$ m.
 3. Aproximadamente 33 murales.
 4. Alrededor de 70 obras.

Activo lo que sé

Página 10



2.
 a. 778 167 b. 61 954
 3.
 a. $1 \cdot 1\ 000\ 000 + 8 \cdot 10\ 000 + 2 \cdot 1000 + 1 \cdot 10 + 6$
 b. $2 \cdot 10\ 000\ 000 + 6 \cdot 100\ 000 + 9 \cdot 10\ 000 + 8 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 3 \cdot 10$
 4.
 a. $1,003 > 0,093$ b. $17,96 > 17,89$
 5.
 a. 12,517 b. 595,52 c. 65,25 d. 8,945
 6.
 a. $\frac{11}{15}$ b. $\frac{2}{5}$ c. $\frac{13}{10}$ d. $\frac{13}{24}$
 7.
 a. $\frac{5}{10}$; 0,5 b. $\frac{4}{5}$; 0,8
 8.
 a. 16 : 25 ; 64% b. 3 : 10 ; 30%

Reflexiono

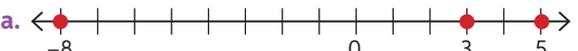
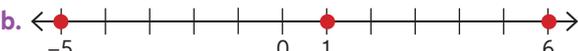
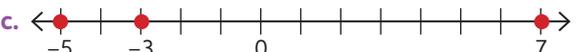
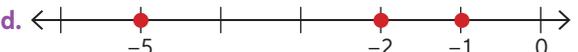
- Respuestas según reflexión del estudiante.

Lección 1. Números enteros

Página 11

1.
 a. D. Atacama: 10 °C, Cachiyuyo: 0 °C, Géiseres del Tatio: -10 °C.
 b. Respuesta variable, por ejemplo: ubicar la t° máxima en la recta y avanzar 30 espacios a la izq.
 c. Actividad en pareja, reflexión de los estudiantes.
 2. Respuesta variable, por ejemplo: calcular los depósitos y retiro de dinero en una cuenta.

Página 12

2.
 a. 
 b. 
 c. 
 d. 
 3.
 a. -2 c. -20 e. -5000
 b. 800 d. 0 f. 9500

- 2. Respuesta variable, por ejemplo: los años de las civilizaciones antiguas.

4.

- a. Altura de los montes: positivo. Profundidad de las fosas: Negativo. Por su posición con el nivel del mar.
 b. El origen es el nivel del mar.
 c. Ojos del Salado: 6893, Fosa de Tonga: -10 882, K2: 8611, Fosa de las Marianas: -11 000, Everest: 8848.
 d. Fosa de las Marianas - cima del Everest: 19 848 m. Ojos del Salado - fosa de Tonga: 17 775 m.

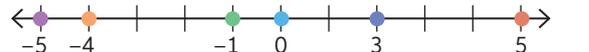
Página 13

5. Respuestas variables, por ejemplo:
 a. Recibí un pago de \$25 000 y debo \$12 500.
 b. Hay un pez nadando a 20 m de profundidad y una gaviota a 140 m de altura.
 c. En una mina, los camiones descienden alturas de 200 metros, mientras que las personas a pie solo pueden bajar hasta los 80 metros de profundidad.
 6. Respuesta variable, por ejemplo: Porque los números enteros se pueden utilizar en diversos contextos.
 7. Respuesta según reflexión del estudiante.
 8. Enero, febrero, junio: positivo y Marzo, abril, mayo: negativo.

Para concluir

- a.
 • -12.
 • Respuesta variable, por ejemplo: Que bajé 12 °C implica una disminución de t° .
 b. Respuesta según reflexión del estudiante.
 c. Respuesta según reflexión del estudiante.

Página 14

1. 
 a. 5 metros b. 5 metros
 c. El número que representa la profundidad de la estrella de mar es -4 y su distancia al nivel del mar es de 4 metros.
 2.
 a. 4 c. 10 e. 7 g. 8
 b. 12 d. 12 f. 8 h. 10

Página 15

3.
 a. 5 c. 78 e. 68 g. 60
 b. 42 d. 372 f. 0 h. 0
 4.
 a. -3. b. 3.
 c. Se encuentran a la misma distancia del cero. 3 unidades.
 d. El valor absoluto de -3 es 3, y el de 3 es 3.
 5.
 a. Recorrió 130 metros.
 b. Pájaro: 43 m de altura. Buzo: 43 m de profundidad.

Para concluir

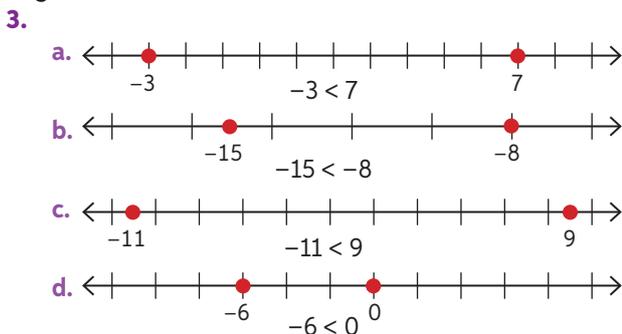
- a. Respuesta variable. El diagrama debe mostrar el concepto de valor absoluto de forma simple.
 b. Respuesta según reflexión del estudiante.
 c. Respuesta según reflexión del estudiante.

Página 16

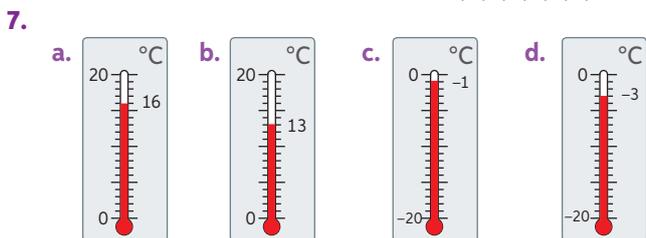
- Lago de Todos los Santos: -337, Volcán Osorno: 2652, Lago Villarrica: -165, Volcán Villarrica: 2847.
 - 337, -165, 2652, 2847
 - El nivel del mar se ubica entre -165 y 2652.
- Negativos.
 - Positivos.
 - Un número situado a la derecha del cero es mayor a otro que está a la izquierda de éste.

▶ Ninguna.

Página 17



- $6 > -38$
 - $4 < 6$
 - $-13 > -17$
 - $8 < 9$
 - $0 > -2$
 - $-6 < 6$
- 85, -9, -7, -3, 5, 10, 11, 26, 75.
 - 26, -25, -1, 0, 6, 27, 122.
 - $x = 9$
 - $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$



Para concluir

- Afirmación uno, es falsa puesto que más alejado el número negativo del cero es menor. Afirmación dos, verdadero, el número que este a la izquierda del número entero siempre será el menor.
- Respuesta según reflexión del estudiante.
- Respuesta según reflexión del estudiante

Antes de continuar

Página 18

- 10000000
 - 4 y 18
 - 4
- -

- 11, -5, -4, 0, 3, 12
 - 11328, -1201, -1200, 12300, 12303.
- P, Br, N, He.
 - Br: 59
 - N: 196
 - He: 269
 - P: 280

Reflexiono

- Respuestas según reflexión del estudiante.

Lección 2. Adición y sustracción en \mathbb{Z}

Página 19

- ▶ La deuda de Marcos se expresa, en \mathbb{Z} , con -3.

Página 20

- 4
 - 3
 - 0
 - 3
 - 9
 - 9
- ▶ En las actividades e y f los cubos se posicionan al mismo lado.

Página 21

- 1
 - 0
 - 1
 - 9
 - 10
 - 7
- \$35000.
 - 3 °C.
- Respuestas variables. Por ejemplo:
 - $-4 + (-6) = -10$
 - $10 + (-11) = -1$
 - $-2 + 15 = 13$
 - $8 + 9 + (-3) = 14$
- 0
 - 10
 - 8
 - 1
- ▶ Se obtiene el mismo resultado si las adiciones se resuelven sin respetar el orden de izquierda a derecha debido a la propiedad asociativa.

Página 22

- Con 100 sumandos es 0 y con 101 es 8.
- -

La profundidad del delfín viene expresada por el número -9.

Platón tenía 43 años cuando nació Aristóteles.

Para concluir

- 27 y -12
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 23

- ▶ Corresponde al inverso aditivo.

Página 24

- Es correcto, siempre se cumple que $a - b = a + (-b)$
- Martes: 3 °C, Jueves: 6 °C y Sábado: 6 °C.
- 2
 - 43
 - 9
 - 3
 - 4
 - 300
- ▶ No se obtiene el mismo resultado, ya que la propiedad solo se cumple en la adición.

- 4.
- | | | |
|-------|--------|--------|
| a. 12 | c. -26 | e. 47 |
| b. 8 | d. -47 | f. 100 |

Página 25

- 5.
- | | | |
|---------|---------|----------|
| a. 7 m. | b. 5 m. | c. 12 m. |
|---------|---------|----------|
- d. La gaviota se encuentra a 19 metros del pez.
 e. No existen distancias negativas, esto depende del sistema de referencias que se use en cada situación.
- 6.
- | |
|---|
| a. Verdadera. |
| b. Falsa. En tal caso, se cumple que $(b - a)$ es un número entero negativo. |
| c. Falsa. Solo la adición de números enteros cumple con la propiedad conmutativa. |
| d. Verdadera. |
| e. Falsa. El resultado es positivo. |
7. Sandra resolvió el ejercicio de manera correcta. Rodrigo no realizó el cambio de signo al factor -17 a pesar que estaba precedido por un signo negativo.
- Para reconocer el error hay que resolver el ejercicio de manera ordenada.
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 26

- 8.
- | | |
|----------------|-------------|
| a. Amigas F.C. | c. Leonas. |
| b. 1 gol. | d. 2 goles. |

Para concluir

- a. Respuesta variable, por ejemplo:
- Para resolver la resta de números enteros, debemos utilizar el inverso aditivo.
 - Un submarino está a 15 km bajo el nivel del mar, deben descender otros 18 km ¿A cuántos kilómetros se encuentra el submarino bajo el nivel del mar? Respuesta: -33 .
- b. Respuesta de reflexión personal.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Página 27

- 1.
- | |
|--|
| a. Respuesta variable, por ejemplo: Primero sumar los números naturales, después los números enteros, para tener una suma de dos sumandos. |
| b. Respuesta de reflexión personal. |
| c. Respuesta de reflexión personal. |
- Conmutativas, asociativas e inverso aditivo.

- 2.
- | | |
|------|-------|
| a. 8 | b. -7 |
|------|-------|

Página 28

- 3.
- | | |
|------|-------|
| a. 8 | b. -7 |
|------|-------|
4. Se deben agregar \$13 500 a la cuenta.
- 5.
- | | | | |
|---------|--------|---------|--------|
| a. -138 | c. -40 | e. -110 | g. -58 |
| b. -201 | d. 185 | f. -43 | h. 13 |
6. El modelo es $a - 2 = b$
- | |
|--|
| a. Se llega al piso 3. Si sirve el modelo. |
| b. Se llega al piso -3 . Si sirve el modelo. |

- | |
|---|
| c. Se llega al piso -1 . No sirve el modelo. |
| d. El modelo considera la existencia de un "piso 0", lo cual en la realidad generalmente no existe. |

Para concluir

- a.
- La temperatura final del material es de 7°C .
 - Respuesta variable, por ejemplo: sume -1 con 11 a su resultado le reste 15 y después sume 12, dando como resultado 7.
- b. Respuesta de reflexión personal.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar

Página 29

- 1.
- | |
|---|
| a. El saldo después de girar el dinero es de \$13 200. |
| b. El nuevo saldo es de \$21 800 en contra, o $-\$21 800$. |
| c. Al terminar el día, el saldo es de \$225 700. |
- 2.
- | |
|--|
| a. Las diferencias de temperaturas medias son:
Tierra-Júpiter: 135°C Tierra-Urano: 219°C
Tierra-Saturno: 144°C Tierra-Neptuno: 234°C |
| b. Las diferencias en $^\circ\text{C}$ son:
Neptuno-Mercurio: 386, Neptuno-Venus: 684,
Neptuno-Tierra: 234, Neptuno-Marte: 174. |

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 3. Números decimales

Página 30

- 1.
- | |
|---|
| a. Plátano: 3,3 g, coco: 6,6 g, kiwi: 4,4 g y nuez: 31,2 g. |
| b. Se ingieren 45,5 g de proteínas en total. |
| c. Se consumirían 6,5 g de proteína diariamente. |
- División, multiplicación y adición.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 31

- 2.
- | | | |
|----------|------------|-------------|
| a. 99,4 | c. 152,04 | e. 12,36 |
| b. 38,25 | d. 3354,75 | f. 1254,525 |
- 3.
- | |
|---|
| a. Con cada cero agregado al divisor, la coma en el cociente se desplaza un lugar hacia la izquierda. |
| b. Si, sucede lo mismo. |
| c. Desplaza la coma hacia la izquierda tantos espacios como ceros tenga el divisor. |
| d. 0,0028; 0,002; 0,006 |
4. Se necesitarán 5 vasos.
5. Respuesta de desarrollo personal.

Página 32

- Respuesta de desarrollo personal.
- 6.
- | | | |
|---------|---------|---------|
| a. 0,05 | c. 0,81 | e. 0,48 |
| b. 0,08 | d. 0,01 | f. 0,4 |
- 7.
- | | |
|--------------|---------------|
| a. 4,2 | d. 1031,03121 |
| b. 150,3177 | e. 972,931 |
| c. 19,616296 | f. 3648,8256 |
- 8.
- Que tienen el mismo resultado.

Página 33

9. a. 2,1 c. 2,9 e. 68,1
b. 3,98 d. 2,5 f. 12,8

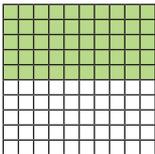
10. Cuadrado: 5,13 cm y hexágono: 7,2 cm.

11. a. $1,5 \cdot 0,2 = 0,3 \Rightarrow 1,5 : 5 = 0,3$
 $3,8 \cdot 0,2 = 0,76 \Rightarrow 3,8 : 5 = 0,76$
Esto sucede ya que si transformamos 0,2 a fracción resulta $\frac{1}{5}$, y dividir por $\frac{1}{5}$ es equivalente a multiplicar por 2.
b. $4,5 : 0,5 = 9 \Rightarrow 4,5 \cdot 2 = 9$
 $6,3 : 0,5 = 12,6 \Rightarrow 6,3 \cdot 2 = 12,6$
Esto sucede ya que si transformamos 0,5 a fracción resulta $\frac{1}{2}$, y dividir por un medio es equivalente a multiplicar por 2.
c. Respuesta variable, por ejemplo: Multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir por 4.

Para concluir

- a.
 - Aproximadamente 454,84 km.
 - Ramón lleva 75 ladrillos.
 - Respuesta variable, por ejemplo: Multiplicar la capacidad total del estanque por el rendimiento por litro. Dividir el total de ladrillos por la masa de uno solo para sacar el total.
- b. Respuesta de reflexión personal.
c. Respuesta de reflexión personal.

Página 34

1. a.  b. 
- c. Ambas representaciones son equivalentes.
d. La cantidad expresada por la balanza es la misma que la fracción solicitada por Luis.

➤ Sí, son equivalentes.

2. a. $\frac{45}{100} = 0,45$ b. $\frac{50}{100} = 0,5$ c. $\frac{48}{100} = 0,48$

Página 35

3. a. $5,9 = \frac{59}{10}$ c. $2,35 = \frac{235}{100}$
b. $0,48 = \frac{48}{100}$ d. $1,03 = \frac{103}{100}$
4. a. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{12}{5}$ e. $\frac{179}{200}$
b. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{176}{5}$ f. $\frac{483}{4}$
5. a. Falsa. $\frac{162}{25}$.
b. Falsa. La fracción decimal de 0,985 es $\frac{985}{1000}$.
c. Verdadera. d. Verdadera.

6.

- a. 0,014 d. 0,72 g. 1,25
b. 36,5 e. 1,85 h. 0,85
c. 0,12 f. 6,75 i. 2,125

➤ Respuesta de reflexión personal.

Página 36

7. a. Camila subió 1,2 kg entre los 6 y los 9 meses.
b. Sergio subió 2,375 kg entre los 6 y 12 meses.
c. Al sexto mes, Sergio alcanzó los 64,2 cm.
d. A los 12 meses, Camila alcanzó a tener 9,8 kg.
e. A los 9 meses, Sergio aumentó más kg de masa.
8. La caja morada debe valer 1,6.
- Para concluir**
a. $0,73 = \frac{73}{100}$; $\frac{58}{100} = 0,58$; $1,88 = \frac{188}{100}$; $\frac{7}{4} = 1,75$.
b. Respuesta personal. c. Respuesta personal.

Antes de continuar

Página 37

1. a. Marco debe recorrer 94,5 kilómetros a diario.
b. En una hora recorrió 23,328 kilómetros.
2. $A = 25$; $B = 500$; $C = 18,75$; $D = 1,25$; $E = 3,75$.
3. Podrán llenarse 20 bolsas.
4. a. 0,4 b. $\frac{61}{5000}$ c. 1,375 d. $\frac{109}{25}$
5. a. $\frac{105}{4}$ cm² b. 22,113 cm² c. $\frac{57}{4}$ cm²
6. Paula debe pagar \$337 680,56.

Reflexiono

• Respuestas según reflexión del estudiante.

Lección 4. Fracciones

Página 38

1. a. Pregunta con material concreto.
b. $\frac{1}{8}$
c. Para resolver la multiplicación se operan numeradores y denominadores por separado. Otro ejemplo podría ser: "Juan le regala a su hermano Adrián la mitad de una sandía, pero él decide comerse solo $\frac{1}{8}$ de ella ¿Qué porción de la sandía completa se comió Adrián?"

➤ Respuesta a partir de la reflexión del estudiante.

Página 39

- El trabajo con material concreto de la actividad inicial y el algoritmo resuelven los mismos problemas de manera diferente.
2. a. $\frac{1}{12}$ b. $\frac{6}{24}$ c. $\frac{3}{16}$
3. a. $\frac{2}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{24}$
b. $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{40}$ c. $\frac{4}{11} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{77}$

4. a. $\frac{26}{90}$ b. $\frac{817}{1288}$ c. $\frac{1125}{700}$

5. a. $\frac{8}{27}$ b. $\frac{14}{25}$ c. $\frac{55}{36}$ d. $\frac{22}{7}$ e. $\frac{26}{25}$ f. $\frac{7}{54}$

- Se evita multiplicar números muy grandes entre sí.
- Es necesario ser ordenado y conocer los múltiplos de cada número para simplificar más fácil.

6. a. $\frac{1}{3} \text{ m}^2$ b. $\frac{24}{7} \text{ m}^2$ c. $\frac{1}{168} \text{ m}^2$

Página 40

7. a. $A = 7, B = 10$ ó $A = 14, B = 5$
 b. $A = 2, B = 3$
 c. $A = 1, B = 110$ ó $A = 2, B = 55$
 d. $A = 2, B = 60$
 e. $A = 1, B = 1$
 f. $A = 3, B = 7$

- Respuesta variable, por ejemplo, dividir el número resultante por el factor existente en la operación.
- En las preguntas a, b, c, e y f hay más de una respuesta gracias a que A y B pueden formar fracciones equivalentes.

8.

a.	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{40}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{56}$	$\frac{3}{24}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{45}$
					$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{27}$
					$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{15}$
					$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{9}$

9. No siempre, en el caso que existan múltiplos que se puedan simplificar en la fracción no se cumple tal afirmación.

10. a. Eliana utilizó $\frac{1}{2}$ kg de semillas.
 b. Cristóbal destinó $\frac{3}{8}$ de su mesada para la campaña solidaria.
 c. Pamela comió $\frac{21}{40}$ del postre.
 d. Araceli no vendió $\frac{3}{5}$ del fundo.
 e. Quedan $\frac{2}{3}$ del jarro de jugo.

Página 41

11. Fútbol: Tierra: $\frac{9}{2} \text{ N}$ – Luna: $\frac{18}{25} \text{ N}$ – Marte: $\frac{333}{200} \text{ N}$
 Básquetbol: Tierra: 6 N – Luna: $\frac{24}{25} \text{ N}$ – Marte: $\frac{111}{50} \text{ N}$
 Tenis: Tierra: $\frac{1}{2} \text{ N}$ – Luna: $\frac{2}{25} \text{ N}$ – Marte: $\frac{37}{200} \text{ N}$
 Ping pong: Tierra: $\frac{3}{100} \text{ N}$ – Luna: $\frac{3}{625} \text{ N}$ – Marte: $\frac{111}{10000} \text{ N}$

Para concluir

- Leonor guardó \$10 500 para el juego.
- Reflexión del estudiante.
- Reflexión del estudiante.

Página 42

1. En este caso, 1 m y se divide en trozos de $\frac{1}{3} \text{ m}$ cada uno, obteniendo 3 trozos por metro. Como se tienen 2 m de alambre, finalmente se tienen 6 trozos iguales.
2. Ambos procesos realizan la misma operación de manera distinta.

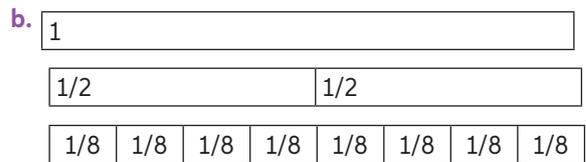
Página 43

2. a. 8 d. 18 g. 3
 b. 7 e. 35 h. 10
 c. 8 f. 36 i. 3

- Respuesta variable, por ejemplo: Simplificando antes de dividir para visualizar mejor.

3.

a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$



- d. Se obtienen 4 trozos.

- Respuesta variable, por ejemplo: Dividir primero un entero en dos partes de $\frac{1}{2}$ y luego todo eso en 8 partes de $\frac{1}{8}$ para visualizar mejor el problema.

- Resulta más fácil visualizar la representación de divisiones en recta numérica cuando el dividendo es un número entero.

Página 44

4. a. 2 c. 3 e. 6
 b. 3 d. 6 f. 2
5. a. $\frac{3}{2}$ b. $\frac{4}{5}$ c. 1 d. 12
6. a. $\frac{18}{7}$ c. $\frac{9}{14}$ e. 0
 b. $\frac{7}{10}$ d. $\frac{15}{28}$ f. $\frac{3}{20}$

7.

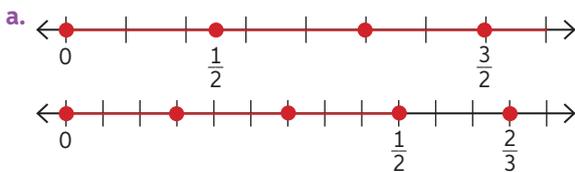
a	b	c	d	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$	$\frac{c}{d} : \frac{a}{b}$	$a : \frac{b}{c}$	$(\frac{a}{c} : \frac{d}{b}) : \frac{d}{a}$	$(\frac{d}{b} : a) : c$
2	3	6	8	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{8}$	4	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{9}$
6	4	8	9	$\frac{27}{16}$	$\frac{16}{27}$	12	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{64}$
5	6	4	3	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{1}{40}$
8	1	9	7	$\frac{56}{9}$	$\frac{9}{56}$	72	$\frac{64}{441}$	$\frac{7}{72}$

8. a. 98 vasos. c. 9 frascos.
b. 10 trozos. d. 46 puntadas.

Página 45

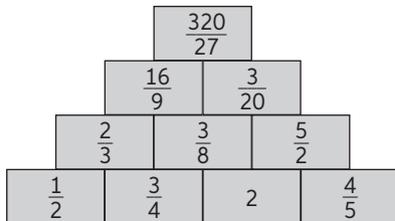
9. Respuestas variables, por ejemplo:
a. Gertrudis repartirá 7 pasteles en trozos equivalentes a $\frac{4}{9}$. ¿Cuántos trozos podrá repartir?
b. Camila comió $\frac{3}{8}$ de una pizza, de lo que sobra, su hermano reparte $\frac{4}{5}$ entre sus amigos y se come el resto. ¿Cuánto comió el hermano de Camila?
c. Aníbal tiene 1 metro y medio de tela para cubrir dos figuras iguales ¿Cuánta tela ocupará en cada figura?
d. Los padres de Antonia compraron 12 trozos de torta y deciden repartirla de la siguiente manera: Ellos se quedarán con la mitad y el resto será repartida entre Antonia y sus 3 hermanos. ¿Cuántos trozos le tocarán a Antonia?

10.



- b. El niño tiene la razón.

11.



Para concluir

- a. Respuesta variable. El resumen debe contener todas las estrategias mostradas a lo largo del tema.
b. Respuesta variable, por ejemplo: Representar las divisiones en una recta numérica.
c. Respuesta variable, por ejemplo: Utilizar el inverso multiplicativo.

Página 46

1. a. No existe ninguna diferencia con el resultado.
b. Se deben considerar las habilidades que cada persona pueda tener para trabajar ya sea con decimales o con fracciones, la complejidad depende de cada quien.

Página 47

2. a. $\frac{913}{60}$ o 15,217 b. $\frac{55}{7}$ o 7,857
3. a. 0,1 b. 2,63 c. 0,565
4. Recorrieron aproximadamente 13 936 yardas.

Para concluir

- a. Martín se quedó con 15 568 pesos.
b. Respuesta variable, por ejemplo: es necesario ser ordenado no solo al momento de realizar las operaciones, sino que también a la hora de transformar los factores y así se evitan errores.
c. Respuesta según reflexión del alumno.

Antes de continuar

Página 48

1. Violeta: \$4000 – Esteban: \$2500 – Isabel: \$3500
2.

- a. El producto es $\frac{1}{216}$
b. $A = \frac{1}{6}$; $B = \frac{1}{12}$; $C = 1$; $D = \frac{1}{18}$

c.

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	9
1	3	$\frac{1}{3}$
3	1	$\frac{1}{3}$

3.

- a. $2 : \frac{1}{64} = 128$
b. El dividendo se mantiene en 2, el divisor es el cociente de la división anterior, es decir que va disminuyendo y el cociente es el doble del denominador del divisor, por ende va aumentando.
c. El cociente aumenta. Por ejemplo con $\frac{1}{64}$ como divisor, el resultado será 128.
4. La máquina fabricará 1200 tornillos en una hora y 900 tornillos en $\frac{3}{4}$ de hora.

5. 1.

Reflexión

- Respuestas según reflexión del estudiante.

Lección 5. Porcentajes

Página 49

1.

- a. Respuesta variable, por ejemplo: La representación pictórica simboliza los mismos porcentajes de la tabla de una manera gráfica que puede resultar más entendible.
b. Perú: Verde $\frac{25}{100}$ – Argentina: Amarillo $\frac{9}{100}$ – Venezuela: Rosado $\frac{11}{100}$ – Ecuador: Naranja $\frac{4}{100}$ – Colombia: Celeste $\frac{14}{100}$ – Bolivia: Café $\frac{10}{100}$ – Haití: Rojo $\frac{8}{100}$ – Otro: Morado $\frac{18}{100}$ – Ignorado: Negro $\frac{1}{100}$
c. Son menos de la mitad del total.
d. Los extranjeros que provienen de Haití son representados con el número 0,08.

- La cuadrícula cuenta con 100 partes iguales porque en total representan un entero y cada cuadrado pequeño representa un 1% de éste.

Página 50

2. a. 27% b. 30% c. 46%
3. a. Un trozo rojo corresponde al 50% del papel lustre.
b. Un trozo verde corresponde al 25% del papel lustre.
c. Un trozo azul y uno rosado corresponden al 30%.
d. El rosado representa un porcentaje menor, ya que el papel de ese color es separado en más partes iguales.
- Respuesta de reflexión personal.
4. a. Los colores verde, morado y celeste representan en conjunto un 25%.
b. Los colores naranja y azul representan en un conjunto un 75%.

Página 51

5. a. 30% b. 50% c. 7% d. 6%
6. 30% novelas, 25% cuentos, 20% fábulas, 7% cuentos de terror y 18% libros científicos.
a. 200 libros b. 48%
c. Los números decimales suman 1 porque representan las fracciones de un total.
7. a. 25% b. 20% c. 10% d. 20%
8. a. Camila lleva más páginas leídas porque ha leído 40 que corresponden al 26,6% del total.
b. Miguel: 26%, Eduardo: 25% y Camila: 26,6%.
c. Camila sigue llevando más páginas leídas, porque ha leído 90 que corresponden al 45% del total.

Para concluir

- a. $\frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$ y $\frac{13}{50} = 0,26 = 26\%$
b. Respuesta de reflexión personal.
c. Respuesta de reflexión personal.

Página 52

1. a. Aproximadamente el 65% de los investigadores son hombres, porque se asume que son el resto que faltan para completar el 100%.
b. Debiesen ser 420 investigadoras.
c. Debiesen ser 1300 investigadores.

➤ 0,35

➤ Respuesta de reflexión del estudiante.

Página 53

2. a. 5,28 d. 875 g. 44,1
b. 112 e. 456 h. 151,2
c. 270 f. 2104 i. 1134
3. a. 324 cm^2 .
b. El área del nuevo cuadrado es de 81 cm^2 .
c. Respuesta según desarrollo del alumno.
d. Es un 25% del cuadrado original.
4. Dicha cantidad corresponde a un 30% del total.

Página 54

5. a. 20% b. 20% c. 300 d. 570
- Respuesta de reflexión personal.

Página 55

6. a. Se debe dividir por 5. b. Se debe dividir por 10.
➤ No sirve para cualquier porcentaje porque no todos representan una cantidad entera del total.
7. a. 5 d. 8 g. 9
b. 60 e. 50 h. 42
c. 30 f. 125 i. 42,3
8. a. 75% b. 10% c. 25% d. 15%
- Respuesta de reflexión personal.

Para concluir

- a. Respuesta variable, El esquema debe contar con las estrategias trabajadas en el libro.
b. Respuesta de reflexión personal.
c. Respuesta de reflexión personal.

Página 56

1. a. Cada litro tendría 250 cm^3 de fruta.
b. Cada botella contiene: 250 cm^3 , 125 cm^3 , 150 cm^3 , 90 cm^3 , 180 cm^3 de fruta respectivamente.
c. Berries: 225 mL; frambuesas: 150 mL; arándanos: 180 mL; frutillas: 225 mL.

Página 57

2. a. Al comprar 3 kilogramos se ahorran \$120.
b. Al comprar 7 kilogramos se ahorran \$200.
c. Se aplicó un 38% de descuento.
3. a. \$1650 b. \$8250 c. \$900
4. Respuesta variable, por ejemplo: Esteban sabiendo que el 10% de 150 es 15, lo multiplico por tres para que represente el 30%, resultando en 45.
5. Esto es correcto ya que se cumple que $25\% = \frac{1}{4}$ y también $12,5\% = \frac{1}{8}$

Para concluir

- a. 880 niños. Quieren atender 1600 personas en total.
b. Respuesta de reflexión personal.
c. Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar**Página 58**

1. a. 71% b. 32% c. 60%
2. a. 60% b. 50% c. 25%
3. a. \$4800 b. \$2800 c. \$12 000
4. a. 4% b. 1% c. 33%

5.

- a. A Jaime le faltan aún \$2100 para comprar el libro.
- b. Aproximadamente el 14,3% no tiene Facebook.

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 6. Potencias

Página 59

- 1. Respuesta variable. Por ejemplo: "Se puede observar que aumenta, al ser uno o dos grados de diferencia."
 - a. Grado 8 es 10000 veces mayor que grado 4.

Página 60

2.

a.

A	B	C	D	E
10	100	1000	10000	100000
10	10 · 10	10 · 10 · 10	10 · 10 · 10 · 10	10 · 10 · 10 · 10 · 10
10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵

- b. La cantidad de ceros es igual al exponente.
- c. La cantidad de factores de 10 es igual a la cantidad de ceros que siguen al 1.
- d. 10¹⁴.
- e. Respuesta variable. Por ejemplo: "En las potencias de base 10, el exponente siempre representará la cantidad de ceros en el número".

- "Al cuadrado": se multiplican dos elementos, alto y ancho como el área del cuadrado. "Al cubo": se multiplican tres elementos, largo, alto y ancho como el volumen del cubo."

3.

- a. 100.
- b. 1000.
- c. 100000000.
- d. 10000000000.
- e. 10000000.
- f. 10.
- g. 1000000000.
- h. 1.

- Respuesta variable. Por ejemplo: "Toda potencia de exponente cero es igual a 1."

Página 61

4.

a. 10 personas.

b.

Envío de Franco	1.º	2.º	3.º	4.º
10	100	1000	10000	100000

5.

- a. 2.
- b. 7.
- c. 9.
- d. 6.

6.

- a. 10⁶.
- b. 10⁵.
- c. 10⁸.
- d. 10³.

7.

Luciano gastó \$10⁵ en total.

8.

El error está en que el número de ceros debe ser igual al exponente.

- Respuesta variable.

Para concluir

- a. Debe ser un 1 acompañado de ceros a la derecha.
- b. Respuesta de reflexión personal.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Página 62

1.

- a. UMi = 1000000. DM = 10000. D = 10.
- b. UMi = 10⁶. DM = 10⁴. D = 10¹.
- c. Tiene exponente cero.

Página 63

- Respuesta variable. Por ejemplo: "85 410, por que 8 como decena de mil, es el número mayor."

2.

- a. 1 · 10⁴
- b. 7 · 10⁶
- c. 2 · 10⁶
- d. 5 · 10⁴

3.

- a. 1 · 10⁷ + 2 · 10⁶ + 1 · 10⁵ + 6 · 10² + 6 · 10¹ + 5 · 10⁰
- b. 6 · 10⁶ + 2 · 10⁵ + 3 · 10⁴ + 5 · 10² + 5 · 10¹
- c. 3 · 10⁸ + 1 · 10⁷ + 2 · 10⁶ + 9 · 10⁵ + 8 · 10⁴ + 1 · 10¹ + 1 · 10⁰
- d. 3 · 10⁷ + 4 · 10⁶ + 2 · 10⁵ + 3 · 10⁴ + 5 · 10¹
- e. 8 · 10⁷ + 2 · 10⁶ + 9 · 10⁵ + 8 · 10⁴ + 7 · 10³ + 3 · 10² + 2 · 10¹ + 1 · 10⁰
- f. 2 · 10⁹ + 9 · 10⁸ + 8 · 10⁷ + 8 · 10⁶ + 9 · 10⁴ + 5 · 10² + 4 · 10¹ + 4 · 10⁰

4.

- a. 1295
- b. 524898
- c. 62 689 578

5.

Es una multiplicación por la potencia 10¹³.

Para concluir

- a. Cada número representa una cantidad dependiendo del lugar posicional del número, eso es su valor posicional. Si un número, se expresa en potencia, se debe tener en cuenta el lugar posicional, por la cantidad de ceros que contiene.
- b. Respuesta de reflexión personal.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Página 64

1.

- a. Ciento cuarenta y nueve millones seiscientos mil.
- b. Dos mil setecientos setenta y dos billones.
- c. Respuesta variable, por ejemplo: "Que son números muy extensos y pueden confundir al escribir o leer."

Página 65

2.

- a. 3,52 · 10⁸
- b. 2,25 · 10¹³
- c. 3,897 · 10¹⁵
- d. 1,38 · 10¹⁷
- e. 2,7 · 10¹⁷
- f. 7,98 · 10¹⁹

3.

- a. 24 000 000 000
- b. 701 000
- c. 500 000 000 000
- d. 4500
- e. 39 000 000
- f. 5 645 000 000 000

Página 66

4.

- a. 7 · 10⁹
- b. 1,5 · 10¹¹
- c. 7,6 · 10¹²
- d. 6,5 · 10⁷
- e. 1,7 · 10⁷
- f. 7,4 · 10¹⁹

5.

- a. Solo las masas están en notación científica.
Sol ⇒ Volumen: 1,412 · 10¹⁸ km³, radio: 6,96 · 10⁵ km
Tierra ⇒ Volumen: 1,08321 · 10¹² km³, radio: 6,378 · 10³ km.
- b. El cociente es ≈ 3,329 · 10⁵.
- c. El producto es ≈ 4,439 · 10⁹.
- d. El cociente es ≈ 1,303 · 10⁶.

Para concluir

- Respuesta variable. El esquema debe incluir las estrategias para el planteamiento y el desarrollo de un número expresado en notación científica.
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar

Página 67

1.	Base	Exponente	Multiplicación reiterada	Potencia	Valor de la potencia
	10	4	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	10^4	10 000
	10	0	1	10^0	1
	10	6	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	10^6	1 000 000
	10	8	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	10^8	100 000 000

- $9 \cdot 10^0, 7 \cdot 10^1, 1 \cdot 10^2, 7 \cdot 10^2$
 - $4 \cdot 10^0, 1 \cdot 10^1, 5 \cdot 10^1, 3 \cdot 10^3$
- $9 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$
 - $4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^0$
 - $2 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2$
 - $1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1$
- Hay 10^{10} milímetros en 10^4 km.
 - Aproximadamente $1,399 \cdot 10^9$ m.
- Las superficies de Europa, Antártica, África, América y Asia están en notación científica.
 - Oceanía: $9 \cdot 10^6$

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Repaso

Página 69

- $|-5|, 4, 0, -3, -4, -25$.
 - $|-6|, 5, 4, |-3|, 1, -3, -6$.
 - $|18|, 13, |-5|, 0, -17, -|-30|, -56$.
- 43
 - 27
- 25 metros.
- Respuesta variable, por ejemplo: Un delfín se encuentra a 58 metros de profundidad y desciende 26 metros ¿A qué profundidad se encuentra? Respuesta: 84 metros de profundidad.
- $\$22\,569,5 \approx \$22\,570$
 - $\$33\,728,5 \approx \$33\,729$
- $0,56 = \frac{56}{100}$
 - $0,34 = \frac{34}{100}$
- 20 minutos.
- $\frac{21}{10}$
- El valor disminuirá $\$65\,096,5 \approx \$65\,097$
- $1 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
- $3,5 \cdot 10^{10} + 7,8 \cdot 10^{10} = 1,13 \cdot 10^{11}$

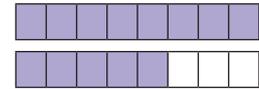
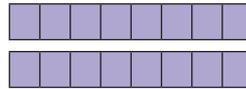
¿Qué aprendí?

Página 70

- Keops
- $46\,332,5625 \text{ m}^2$
- $1,47 \cdot 10^{11} \text{ m}$
- $\approx 7,5 \text{ cm}$
- Respuesta variable, por ejemplo: El tesoro se encuentra escondido a 23 metros bajo tierra.
- 4 números.
- 27
 - 12
- 3°C
- Recorrió en promedio 10,92 km por litro.

Página 71

10. $3\frac{5}{8} = \frac{29}{8} = 3,625$



- 13 frascos.
- $\frac{3}{92}$
- 486,54
 - 851,4
 - 390
 - 1083
- 2 301 009
 - 52010090

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Unidad 2. Álgebra y funciones

Página 72

- $8000 = 100 \cdot a \Rightarrow 80 = a$. El otro lado mide 80 cm.
- Demorará 9,6 segundos.

Página 73

- $6x$. Donde x es el número de autos.

Activo lo que sé

Página 74

- 19
 - 7
- 202
 - 7
- 0,32
 - $\frac{19}{150}$
- Sí, si alcanza a terminar.
- 85%
 - $\$272\,000$
- $x = 4$
 - $x > -2$
- $3x - 2x$
 - $2x + 8$
- $P = 11,8r + 12m$
- 30 kilómetros. En una hora y media, 54 kilómetros.
 - Debe pagar $\$6750$.
- A (1, 2), D (2, 0), E (0, 1)

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 7. Lenguaje algebraico

Página 76

➤ Respuesta de reflexión personal.

➤ Un tiempo desconocido que no se ven.

1. Juego en aula.

2.

- a. $2x + 10$ c. $0,25x$ e. $K - 3$
 b. $3(x + 4)$ d. $0,5x + 2x$ f. $3(x - 3)$

3.

- a. $3(j + m) = 120$ d. $12 = v + 10$
 b. $x + (x \cdot 2) = x + 5$ e. $x - 7 > 6$
 c. $3c + 3n = 102$

4. Respuestas variables, por ejemplo:

- a. Se desean dividir 4 trozos de torta entre p personas.
 b. ¿Cuánto es veinticinco veces una unidad?
 c. La edad de Pedro disminuida en 8 años.
 d. De mis 65 bolitas voy a dar 9 a mi hermano y cierta cantidad a un amigo. ¿Cuántas me quedan?
 e. Tengo 50 billetes y me gasto cierta cantidad.
 f. En un juego primero gané 800 puntos, después gané 500 y finalmente gané algunos puntos más.
 g. Quiero comprar 57 lápices y cada uno cuesta y pesos.
 h. Tenía p pesos, me pagaron 550 y gasté 90.
 i. El perímetro de un cuadrilátero de lados a , b , c y d .

Página 77

5.

- a. $P = 2(a + b)$
 b. $A = a^2$
 c. $A = \frac{1}{2}b \cdot h$
 d. $P = a + b + c$
 e. $P = 2a + b$

➤ Las fórmulas de área y perímetro.

6. Las personas tienen a , $5 + a$ y $a + 10$ años.

7.

- a. La información necesaria son las fracciones de su vida.
 b. Se deben sumar $\frac{1}{6}$ de 72, $\frac{1}{12}$ de 72, $\frac{1}{7}$ de dicha magnitud aumentada en 5 unidades, $\frac{1}{2}$ de 72 aumentado en 4 y comprobar que sea igual a 72.
 c. Respuesta variable, por ejemplo: la suma de Juan y Pedro suman 25, si Juan tiene un año más que Pedro ¿Cuáles son sus edades?

Para concluir

- a. Respuesta variable, por ejemplo nos ayuda a comprender la operatoria en algún ejercicio.
 b. Respuesta de reflexión personal.
 c. Respuesta de reflexión personal.

Página 78

1.

- a. $A = y^2$. $P = 4y$
 b. $A = v \cdot w$. $P = 2v + 2w$
 c. $A = \frac{qn}{2}$. $P = s + t + n$

2.

Término algebraico	Coefficiente numérico	Factor literal
$5 \cdot a^3 \cdot b$	5	a^3b
$0,7x^2$	0,7	x^2
$\frac{1}{9} \cdot a^7 \cdot b^3$	$\frac{1}{9}$	$a^7 \cdot b^3$
$12z^3x$	12	z^3x
$-3,75a^3pq$	-3,75	a^3pq
$\frac{4}{11}stu$	$\frac{4}{11}$	stu

➤ Respuesta variable, el coeficiente numérico es el número en la expresión y factor literal son las letras.

Página 79

3.

- a. Binomio. c. Trinomio. e. Binomio.
 b. Monomio. d. Polinomio. f. Binomio.

4.

- a. Naranja: $3x$. Celeste: $6x - 4$
 b. Verde: La mitad del número y luego aumentado en 14 unidades. Morada: El doble del número, disminuido en una unidad

Para concluir

- a. $p + b + 2p + 100$
 b. Respuesta de reflexión personal.
 c. Respuesta de reflexión personal.

Página 80

1.

- a. $P = 2x + z + y + w$ c. $P = 41$ cm
 b. $P = a + 2b + 2c + 3d + 4e$ d. $P = 116$ cm

➤ Respuesta de reflexión personal.

Página 81

2.

- a. 84 b. 81 g c. \$883 000

3. Se le aplicó una fuerza de $500 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Para concluir

- a. Se reemplazan los valores de cada letra. En las propiedades de las operaciones.
 b. Respuesta de reflexión personal.
 c. Respuesta de reflexión personal.

Página 82

1. Donde c : cebollas, a : ají.

- a. $4c + 2c + 3a + 4a$. b. $6c + 7a$

Página 83

2.

- a. $11x - 14y + 7z$ d. $11bc + 3bd$
 b. $11f - 21g + 14$ e. $a + 7ab + 7b$
 c. $-9pq - 8rs$ f. $-2v$

3.

- a. $P = a + 5b + 2c$ b. $P = a + 2x + y + w$

4.

- a. $A = 9, B = 6$ c. $A = 5, B = -6$
 b. $A = 7, B = 11$ d. $A = -3, B = 2$

5. La cinta debe tener $22a + 12b$ metros de largo.

6.

- a. Sí, ya que se usa la propiedad distributiva.
 b. $a(5b + 4c - 7)$

Para concluir

- a. Deben tener el mismo factor literal.
- b. Respuesta personal.
- c. Respuesta personal.

Antes de continuar

Página 84

1.
 - a. $3(n+2)$
 - b. $x+(x+1)$
 - c. $\frac{t}{3}$
 - d. $4(h+j)$
 - e. $2(p-3)$
2.
 - a. $P=4a+12$
 - b. $P=4p+16a$
 - c. $P=9k+6$
3.
 - a. $11f-21g+14$
 - b. $-4v+5p-4$
 - c. $-7m-5n+20$
 - d. $7ap+9p-10$
4.
 - a. 4
 - b. -3
 - c. 3
 - d. -4
5.
 - a. \$2250 y \$2750.
 - b. 35 años.
 - c. 19, 20 y 21.
 - d. 1300 m^2 .

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 8. Relaciones proporcionales

Página 85

1.
 - a. 10 cm la silueta, 500 cm real.
 - b. 5 cm silueta, 350 cm real.
 - c. 5 cm silueta, 250 cm real.
 - d. Cocodrilo: 5 m. Elefante: 3,5 m. Delfín: 2,5 m.

- El elefante.

Página 86

2.
 - a. 3: 17
 - b. 17: 4
 - c. 1: 2
 3.
 - a. 8: 11
 - b. 11: 8
 - c. 11: 19
 - d. 19: 8
- No, el orden importa.
4. Si la cantidad de amigos aumenta al doble se deben gastar \$120 000. Si asisten 11 se deben pagar \$165 000. 1 : 15000

Página 87

5.
 - a. No
 - b. Sí
 - c. Sí
 - d. Sí
6.
 - a. 25 niñas.
 - b. 96 sillas.
 - c. 15 años.
7.
 - a. No
 - b. Sí
 - c. No
 - d. No
 - e. Sí
 - f. No
 - g. No
 - h. Sí
8.
 - a. Ambas están en lo correcto
 - b. Mantienen la misma proporción.

Para concluir

- a. Diagrama debe contener, razones y proporciones.
- b. Respuesta personal.
- c. Respuesta personal.

Página 88

1.
 - a. Con la motocicleta.
 - b. Con la motocicleta.
 - c. Rojo: motocicleta y azul: auto.
 - d. Auto: 60 km. Moto: 150 km.
 - e. Es una p. directa.
 - f. Es constante.

Página 89

2.
 - a. Sí
 - b. Sí
 - c. No
 - d. No
 - e. Si
3.
 - a. No
 - b. Sí
 - c. Sí
4.
 - a. 4
 - b. 252
 - c. 24
 - d. 12

Página 90

5.
 - a. Frutillas: \$750. Manzanas: \$850. Tomates: \$330. Cerezas: \$475. Cebollas: \$675
 - b. \$4500.
 - c. \$1320.
 - d. $k=850$
 - e. Tabla de p. directa construida por el estudiante.
- No corresponde a una p. directa ya que no hay k entre las cantidades dadas.
6.
 - a. $5\text{ cm} - 25\text{ cm}^2 - 20\text{ cm} / 7\text{ cm} - 49\text{ cm}^2 - 28\text{ cm} / 10\text{ cm} - 100\text{ cm}^2 - 40\text{ cm}$
 - b. Sí.
 - c. No.
7.
 - a. \$2000
 - b. \$5000
 - c. $k=20$, representa el valor por minuto.
- Usando un gráfico, debe ser una recta que pasa por el origen. Porque $k \cdot 0 = 0$ para cualquier k.

Página 91

8.
 - a. Sí. El gráfico es una recta que pasa por el origen.
 - b. 112 archivos.
9.
 - a. 15 toneladas.
 - b. 60 ton en 120 días.
- Cambia la proporción ya que cambia la k.
10.
 - a. En el A ya que el precio aumenta proporcionalmente con la hora.
 - b. El A.
 - c. El A, ya que se pagarían \$4410 versus los \$4430 que habría que pagar en el estacionamiento B.
 - d. Gráfico adecuado a los datos, con todos sus elementos, a elección del estudiante.

Para concluir

- a. Respuesta variable, se puede explicar sobre la suma constante de ambos elementos.
- b. Respuesta personal.
- c. Respuesta personal.

Página 92

1.
 - a. Asumir que era una proporcionalidad directa.
 - b.

Cantidad de trabadores	Tiempo (días)
10	120
20	60
30	40
40	30

- c. Tardan 60 días. 40 máquinas lo hacen en 30 días.
- d. 60 máquinas.
- e. Sí, 40 máquinas.
- f. Se debe reducir a la mitad.

- g. Gráfico de una curva en el primer cuadrante que no pasa por el origen.
- h. El gráfico de una proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen mientras que el de una inversa es una línea curva que no pasa por el origen.

Página 93

➤ $k = 120$

2.

- a. Sí
- b. No
- c. No
- d. No

3.

- a. Todos poseen igual superficie porque mantienen la proporción entre sus lados.
- b. Disminuye.
- c. $k = 200$, representa el área del terreno.

Página 94

4.

- a. 60 km/h
- b. 20 km/h
- c. 10 km/h

➤ Al despejar y , queda $y = \frac{k}{x}$ formándose una hipérbola.

5. $1D - 2A - 3F - 4B - 5H - 6I - 7G$

6.

- a. Gráfico con todos los elementos a elección del estudiante.
- b. 24 días.
- c. No ya que 240 no es múltiplo de 7.

Página 95

7.

- a. Si se abren 2 llaves la piscina tarda 12 horas en llenarse, si se abren 3, se demoran 8 horas. Si se abren 4 llaves el llenado tarda 6 horas.
- b. 288 minutos.

8.

- a. 10 días.
- b. 9 sacos.
- c. La constante de proporcionalidad es 150.

➤ Porque es una variable directa, cuando más grande el perro más alimento necesita.

Para concluir

- a. Si x disminuye a la mitad, y se duplica. Si x se triplica, y disminuye a la tercera parte. Si x disminuye a un 25%, y aumenta a un 400%.
- b. El gráfico de una proporción inversa es una curva que no pasa por el origen.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Página 96

1.

- a. 560 cm. Tiene forma cuadrada.
- b. Cuadrado de 210 cm. $A = 44\,100 \text{ cm}^2$.
- c. 245 cm y por 140 cm. Su superficie es $34\,300 \text{ cm}^2$.
- d. Aumentaría $96\,000 \text{ cm}^2$.
- e. 6 horas.

Página 97

2.

- a. Las magnitudes son directamente proporcionales. Su gráfica es una recta que pasa por el origen.
- b. Las magnitudes son inversamente proporcionales. Su gráfica es una curva que no pasa por el origen.

3.

- a. Cada dado cuesta \$375. Es p . directa.
- b. Puedo comprar 40 vasos. Es p . inversa.
- c. 1,25 horas. Es p . inversa.
- d. Han pasado 20 segundos. Es p . directa.
- e. Tardan 6 días. Es p . inversa.
- f. La velocidad aumenta. Es p . directa.
- g. Podrá hacerlo por 5 días. Es p . inversa.
- h. Se necesitarán 90 máquinas. Es p . inversa.

Para concluir

- a. La gráfica de la proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen, mientras que la de una proporcionalidad inversa es una línea curva que no pasa por el origen.
- b. Respuesta de reflexión personal.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar

Página 98

1.

- a. Directa. $k = 0,5$
- b. Directa. $k = 7$
- c. Inversa. $k = 15$
- d. Inversa. $k = 17$

2.

- a. Empresa roja.
- b. Empresa azul.
- c. La empresa azul porque se paga menos.

3.

- a. $X = 33$
- b. 37,5 segundos.
- c. Q vale $\frac{100}{3}$.

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 9. Ecuaciones e inecuaciones

Página 99

1.

- a. 225 días.
- b. 323 años.
- c. 88 días.
- d. 84 años.

➤ El periodo aumenta a medida que se alejan del sol. Esto ocurre ya que su órbita es cada vez más grande.

2.

- a. $3x + 4 = x + 10$. Cada cilindro masa 3 kg.

Página 100

3.

- a. Un cubo equivale a $\frac{1}{4}$ de esfera.
- b. Un cubo equivale a 0,4 de esfera.
- c. Un cubo equivale a $\frac{4}{3}$ esfera.
- d. Un cubo equivale a un tercio de esfera.

4.

- a. Sí, los saltos son de igual longitud y al final retrocede 0,6 m quedando en los 12,27 m.
- b. Cada uno de sus saltos midió 4,29 m. La ecuación es $3x = 12,27 + 0,6$
- c. Habría alcanzado una distancia de 12,87 m si no hubiese apoyado las manos.

5.

- a. $4x + 10 = 38 \cdot x = 7$
- b. $5x - 2 = 28 \cdot x = 6$
- c. $3x + 9 = 30 \cdot x = 7$

Página 101

- 6.
- a. $x = 3$ c. $x \approx 2,6$ e. $x = 2$
 b. $x \approx 2,14$ d. $x = 1$ f. $x = 3,25$
- 7.
- a. $x = 5$ c. $x = 3$ e. $x = 100$
 b. $x = 12$ d. $x = 8$ f. $x = \frac{1}{2}$
- 8.
- a. $43 = 3s + 4 \cdot s = 13$. Sandra tiene 13 años.
 b. $n + 30 = 4n \cdot n = 10$. Nicolás: 10 y padre: 40.
 c. $a + 2a + 4a + 8a = 90a = 6$. Los n° son 6, 12, 24 y 48.
 d. $x + x + 1 + x + 2 = 66x = 21$. Los n° son 21, 22 y 23.
9. Para que la respuesta sea un número natural a puede tomar los valores {1, 2, 5, 10} ya que son divisores de 10.

Para concluir

- a. Respuesta variable, el diagrama debe contener definición de ecuaciones e incógnita, estrategia de balanzas, recta numérica y operatoria inversa.
 b. Respuesta personal. c. Respuesta personal.

Página 102

- 1.
- a. Se deben vender como mínimo 34 números. La inecuación es $1350x > 45000$.
 b. Se deben vender como mínimo 100 boletos.
 c. Se deben vender más de 144 boletos.
 d. Habrían pérdidas en lugar de ganancias porque no se alcanza a recuperar lo invertido en los premios.

Página 103

- 2.
- a. $6 + 8x < 16 + 6x$ c. $3 + 8x < 11 + 4x$
 b. $12 + 4x < 4 + 8x$ d. $3 + 8x < 12 + 4x$
- 3.
- Las soluciones son a: $x < 5$; b: $2 < x$; c: $x < 4$; d: $x < \frac{9}{4}$
 a. Si se plantea en \mathbb{N} la solución no puede tomar valores negativos ni 0 mientras que en \mathbb{Z} sí.
 b. Con una recta numérica.
- 4.
- a. $x \leq 3$ b. $x > 4$ c. $x < 18$
- Si el círculo es blanco la desigualdad es estricta mientras que si es negro si se considera el valor.

Página 104

5. Cada barra de hormigón masa más de 5 toneladas.
- 6.
- a. $15 < w$ c. $x > 5$ e. $x > 1$
 b. $h < 4$ d. $y > 0$ f. $x > 4$
7. Respuestas variables, por ejemplo:
- a. {16, 20, 32, 47, 53} d. {1, 7, 13, 27, 35}
 b. {3, 0, -5, -12, -27} e. {2, 5, 18, 23, 34}
 c. {6, 14, 21, 28, 49} f. {5, 10, 34, 57, 101}
- 8.
- a. Sí b. No c. Sí d. Sí
9. La estructura debe tener como máximo 24 pisos.
10. La solución es $x < 2$, en \mathbb{N} , el único valor posible es 1. En una recta numérica la solución sería solo un círculo negro sobre el número 1.

Para concluir

- a. Respuesta de reflexión personal.
 b. Hay que considerar el conjunto de elementos sobre el cual se describe la solución (\mathbb{N} o \mathbb{Z}).
 c. Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar**Página 105**

- 1.
- a. $4p + 3e = 2p + 2e$. Un cilindro equivale a 1,5 esfera.
 b. $3p + 8e = 11p + 4e$ Un cilindro equivale a 0,5 esfera.
- 2.
- a. $4 + 8x < 10 + 3x$ b. $5x + 6 > 7x + 1$
- 3.
- a. $x = 8$ c. $x = \frac{45}{7}$ e. $x = 18$
 b. $x = 12$ d. $x = 7$ f. $x = -\frac{672}{31}$
- 4.
- a. $x < 3,5$. {3, 0, -1.5, -10, 21}
 b. $x > \frac{62}{21}$. {3, 10, 27, 31, 36}
 c. $x < 8$. {7, 0, -1, 5, -1.8}
 d. $x > 5$ {6, 20, 21.6, 30, 56}
 e. $x < 5$ {4, 2.5, 0, -8, 1}
 f. $x < 36$ {35, 7, 0, -5, 2.8}
5. Los posibles valores para el largo de la cerámica son {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} cm.

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Refuerzo**Página 107**

- 1.
- a. $P = 18y - 24 = 30$ b. $P = 12x + 8y - 4 = 68$
- 2.
- a. $11x - 14y + 7z$ c. $11f - 21g + 14$
 b. $-9pq - 8rs$ d. $11bc + 3bd$
- 3.
- a. $y = x$. b. 30 minutos.
- 4.
- a. $b = 5, a = 600$ b. $b = 10, a = 5$
- 5.
- a. 150 llamados. b. $\approx 1,15$ minutos
- 6.
- a. $x = 50$ b. $h < 18$ c. $k = -\frac{1}{3}$ d. $x \leq 21$
- 7.
- a. Debe separar las piedras en partes iguales y colocarlas en la balanza. Naturalmente un lado será más pesado, toma esas piedras y las divide en partes iguales, nuevamente un lado será más pesado y así hasta encontrar la piedra más pesada.

¿Qué aprendí?**Página 108**

- 1.
- a. Fotografía 1: 6×9 cm. Fotografía 2: 8×12 cm. Fotografía 3: $5 \times 7,5$ cm. Fotografía 4: 8×12 cm.
 b. La razón es $\frac{2}{3}$.
 c. Sí, porque tienen la misma razón en sus lados.
 d. Sí, lo son.

2. a. La constante de proporcionalidad es 1,5. Se calcula dividiendo el largo por el ancho.
b.
- $90 \times 60 \text{ cm}$
 - $120 \times 80 \text{ cm}$

3. a. $d = 2m - 6$ c. $x + (x + 1)$
b. $a + b + c + 12$

4. a. $P = a + 5b + 2c$ b. $P = a + 2x + y + w$

Página 109

5. a. P inversa. b. $k = 36$. c. 3

6. a. $n - 10 = 3(15 - 10) \cdot n = 25$. Nicolás tiene 25 años.
b. $1000x - 250 > 1000 \cdot x > 1,25$. {1,5, 2, 3, 10, 14}.

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Unidad 3. Geometría

Página 110

1. Respuesta variable. Los listados deben contener figuras 2D como triángulos, cuadrados, paralelepípedos, etc. y 3D como prisma de base hexagonal, cuadrada y pirámides.
2. Paralelas y perpendiculares.
3. No. En la pirámide hay ángulos acutángulos.
4. No. Faltan datos.

Página 111

5. Una circunferencia.

Activo lo que sé

Página 112

1. a. Sí. b. No.
2. a. Traslación: Desplazar los puntos de la figura la misma cantidad en una determinada dirección
b. Reflexión: Reflejo de una imagen respecto a un eje.
c. Rotación: Movimiento alrededor de un punto que mantiene la forma de la figura.
3. a. Ángulo agudo: mide más de 0° y menos de 90° .
b. Ángulo recto: mide exactamente 90° .
c. Ángulo obtuso: mide más de 90° y menos de 180° .

4. a. $y = 39^\circ$ b. $z = 38^\circ$

Reflexiono

- Respuesta según reflexión del estudiante.

Lección 10. Polígonos

Página 113

1. Respuesta a partir de la observación de los alumnos.

Página 114

2. a. 13 lados: tridecágono, 14 lados: tetradecágono, 15 lados: pentadecágono, 16 lados: hexadecágono, 17 lados: heptadecágono, 18 lados: octodécágono.
b. Un círculo

3. a. Octógono regular. c. Hexágono regular.
b. Triángulo regular.

- ☞ Triángulo equilátero

4. Respuesta según trabajo del estudiante.

Página 115

5. a. Siempre es acutángulo. No, porque puede tener sus lados de distinta medida.
b. Sí, solo debe tener un ángulo recto.

6. a. Respuesta de investigación.

7. a. Trapezoide, sus ángulos interiores suman 360° .
b. Rombo, sus ángulos interiores suman 360° .
c. Trapezoide, sus ángulos interiores suman 360° .

8. a. $n - 2$.
b. 10 lados: 8 triángulos, 12 lados: 10 triángulos, 15 lados: 13 triángulos, 20 lados: 18 triángulos

Para concluir

- a. La medida de sus lados y sus ángulos.
b. Respuesta personal. c. Respuesta personal.

Página 116

1. a. Observar proceso.
b. Porque la suma de los ángulos interiores es 180° .
c. Porque por cada vértice se forma un ángulo.
d. No porque los ángulos serían diferentes entre sí.
e. Cada ángulo interior mediría 108° .
f. Cuadrado: 360° , heptágono: 900° , octógono: 1080° .
☞ Cuadrado: $(n - 2) \cdot 180 = (4 - 2) \cdot 180 = 360$
Heptágono: $(n - 2) \cdot 180 = (7 - 2) \cdot 180 = 900$
Octógono: $(n - 2) \cdot 180 = (8 - 2) \cdot 180 = 1080$

Página 117

2. a. 1440° c. 1800° e. 3240°
b. 1080° d. 2340° f. 17640°
☞ Respuesta variable, ejemplo: "los 1800° , son divididos por el número de vértices, cada ángulo mide 150° ".

3. a. 90° c. $\approx 128,57^\circ$ e. 162°
b. 120° d. 140° f. $172,8^\circ$

- ☞ Tienden a acercarse a los 180° .

4. a. $x = 104^\circ$ b. $x = 73^\circ$
c. Extendiendo el lado y completando el ángulo extendido entre el ángulo interior y su suplementario.
d. 360° .

Página 118

5. a. $\beta = 45^\circ$ b. $c = 50^\circ$

6. a. **Hexágono.** \sphericalangle central: 60° ; ángulo de las bases del triángulo isósceles: 60° ; \sphericalangle interiores: 120°
Decágono. \sphericalangle central: 36° ; Ángulo de las bases del triángulo isósceles: 72° ; \sphericalangle interiores: 144°
b. Siguiendo el procedimiento enseñando.

Para concluir

- Sus ángulos interiores miden $\approx 158,82^\circ$ y sus ángulos exteriores $\approx 21,18^\circ$.
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar

Página 119

- Irregular.
 - Irregular.
 - Regular.
- Trapezio
 - Cuadrilátero
 - Trapezoide
- Int: 60° . Ext: 120° .
 - Int: 90° . Ext: 90° .
 - Int: 108° . Ext: 72° .
 - Int: 120° . Ext: 60° .
 - Int: 150° . Ext: 30° .
 - Int: 160° . Ext: 20° .
- $b = 40^\circ$
 - $c = 58^\circ$
 - $d = 66^\circ$

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 11. Áreas de polígonos

Página 120

- 1, 6 y 7 son triángulos. 2 es un cuadrado. 3 y 5 trapecios. 4 es un rectángulo.
 - Los terrenos 2 y 5, porque ambos tienen $4u^2$. Los terrenos 3 y 4, porque ambos tienen $6u^2$.
 - El terreno más barato es el 1, porque es el terreno más pequeño. Los más caros son 4 o 3, porque tienen los terrenos más grandes.
- Los trapecios ya que se pueden formar un rectángulo al trasladar una parte (triángulo).

 - El área del terreno 5 es de 4 unidades cuadradas.
 - Conocer la medida de la altura y un lado.

Página 121

- Si, es posible.
- Es posible si cuenta con la medida de la altura.
- 56 m^2 .
 - 15 cm^2 .
 - 78 cm^2 .
 - 180 m^2 .
- Respuesta de reflexión personal.
- 25 m^2 .
 - 56 m^2 . Se calcula el área del cuadrado morado y se le resta el área amarilla.
 - 144 m^2 .
 - Para la parte roja se necesitaron 48 cajas, para la superficie morada 19 y para la amarilla, 9 cajas.

Página 122

- 1500 m^2 .
 - Rojo: 72 m^2 . Naranja: 288 m^2 . Amarillo: 360 m^2 . Azul: 420 m^2 . Verde: 360 m^2 .
 - Rojo: 8 litros. Naranja: 32 litros. Amarillo: 40 litros. Azul: $46,6$ litros. Verde: 40 litros.
 - Rojo: 2 tarros. Naranja: 8 tarros. Amarillo: 10 tarros. Azul aproximadamente 12 tarros. Verde: 10 tarros. Se gastarán $\$504\,000$ en adquirirlos.

Página 123

- $b = 23 \text{ cm}$
 - $h = 7 \text{ cm}$
- La región morada ocupa un área de 166 cm^2 .
- 32 cm^2
 - 224 cm^2
 - 4 cm^2

Para concluir

- 216 cm^2
 - $75\,600 \text{ cm}^2$
 - 350 adoquines
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 124

- 60 m^2 .
 - 30 m^2 porque la figura está dividida en dos.
 - Se debe conocer la base y la altura, al calcular como área, el producto de ambos se divide en dos.
 - Figuras 1 y 3, porque los triángulos son congruentes.
 - En los casos en que las partes de la figura no sean iguales entre sí.

Página 125

- 12 m^2 .
 - 6 cm^2 .
 - 9 m^2 .
 - $82,5 \text{ dm}^2$.
- Sí ya que todas las figuras tienen la misma base y altura. Sus áreas son iguales.
 - Cada triángulo tendría una superficie de 20 m^2 .
- $27,5 \text{ m}^2$.
 - $38,5 \text{ m}^2$.
 - 33 m^2 .
 - $19,25 \text{ m}^2$.
 - $13,75 \text{ m}^2$.

Página 126

- Para duplicar la superficie, la altura debe aumentar 6 dm. Para triplicarla, 12 dm.
 - Para duplicar la superficie, la altura debe aumentar 9 mm. Para triplicarla, 18 mm.
 - Para duplicar la superficie, la altura debe aumentar 5 cm. Para triplicarla, 10 cm.
- Para el doble, se debe sumar consigo mismo, y para el triple, sumar con el doble.
- 16 cm^2
 - 30 m^2
 - $45,5 \text{ m}^2$
- Respuesta variable, por ejemplo: "Cuando no se conoce la fórmula, se puede usar esta estrategia"
- Si, pero deben ser con figuras que en su interior tengan triángulos congruentes"
- Á roja: 50 hm^2 . Á verde: 20 hm^2 . Á amarilla: 8 hm^2

Página 127

- $x = 10 \text{ mm}$
 - $x = 8 \text{ cm}$
 - $x = 6 \text{ cm}$
- 90 mm^2
 - 200 cm^2

Para concluir

- Respuesta variable, el resumen debe contener las fórmulas de área de: paralelogramo, triángulo, rombo y pasos cuando hay un valor desconocido como el triángulo y paralelogramo.
- Respuesta de desarrollo personal.
- Respuesta de desarrollo personal.

Página 128

- Romboide.
 - Multiplicando su largo por su ancho.
 - $(B + b) \cdot h$
 - Dividirla por 2, porque son dos mesas congruentes.
 - El área de cada cubierta es de 4050 cm^2 .
 - $162\,000 \text{ cm}^2$
- Respuesta variable, por ejemplo: "Que son polígonos y cuadriláteros, ahora se calcular el área"

Página 129

- 160 dm^2
 - 35 m^2
 - 32 cm^2
 - 100 cm^2
- La superficie es $34,5 \text{ cm}^2$.
 - Respuesta variable, por ejemplo: "Primero calcula el área de la región en blanco, luego, el área de la región celeste y después restar del área blanca."
- Debe llevar la primera cerámica.

Página 130

- $h = 7 \text{ m}$
 - $h = 4 \text{ cm}$
- Debe existir 14 cm de separación entre las bases.
- 200 m^2
- La otra base mide 20 hm , es mayor a la explicada.
 - Respuesta variable, por ejemplo: "Primero ordeno los valores en la fórmula, notando que queda una ecuación, y voy siguiendo el procedimiento para despegar la incógnita."
 - Respuesta de reflexión personal.
 - Respuesta de reflexión personal.

Para concluir

- Respuesta dependiendo de la realidad del alumno.
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar**Página 131**

- $x \approx 1,71 \text{ mm}$
 - $x = 24 \text{ km}$
 - $x = 10 \text{ dm}$
- Á verde: 396 dm^2 . Á amarilla: 66 dm^2
 - Á morada: 117 mm^2 . Á naranja: 18 mm^2 . Á amarilla: 9 mm^2
- 45 mm^2 .
 - $58,5 \text{ hm}^2$.

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 12. Círculo y circunferencia**Página 132**

- Respuesta según desarrollo del alumno.
 - Es la misma distancia.
 - Son iguales, porque van desde el centro al borde de la circunferencia.
 - No, es el segmento más extenso dentro de la circunferencia.
 - El diámetro mide el doble que el radio.
 - Es menor o igual al radio.
 - Radio: segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia. Diámetro: segmento que une 2 puntos de la circunferencia pasando por el centro. Centro del círculo: punto que está a la misma distancia de cualquier otro punto de la circunferencia. Circunferencia: todos los puntos cuya distancia al centro sea igual al radio.

Página 133

- Circunferencia de radio 6 cm .
 - Circunferencia de diámetro 12 cm .
- Todos los aspersores riegan todos los sectores.
 - Todos los sectores reciben agua de todos los aspersores.
 - El aspersor 4 porque abarca el jardín casi completo.
 - Se podría dividir el jardín en sectores cuadrados y colocar cada aspersor en el centro de éstos.

Para concluir

- Respuesta variable, el mapa deba contener circunferencia, círculo, radio y diámetro.
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 134

- Respuestas variables dependiendo de los objetos cilíndricos o esféricos.
 - Respuesta variable dependiendo de los objetos.
 - El cociente es cercano a $3,15$.

Página 135

- $25,12 \text{ cm}$
 - $78,5 \text{ cm}$
 - $21,98 \text{ cm}$
- Porque pi es un decimal infinito.
- El círculo superior debe tener un perímetro de 157 cm , y el círculo de la base, 314 cm .
 - $40\,009,88 \text{ km}$.
 - $12\,712 \text{ km}$.
 - 49 vueltas. Demora ≈ 147 segundos.

Página 136

- $d = 10 \text{ cm}$
 - $d = 5 \text{ m}$
 - $r = 7,5 \text{ mm}$
- $P = 12,56 \text{ cm}$
 - $P = 37,68 \text{ cm}$
 - $P = 26,28 \text{ cm}$
 - $P = 57,96 \text{ cm}$

Página 137

6. $P = 43,96 \text{ m}$

- 7.
- El perímetro también se duplica.
 - El perímetro debiese medir 100,48 cm porque es el doble que el de una circunferencia con radio de 8 cm.

➤ Respuesta variable, por ejemplo: "Para calcular el perímetro de forma más sencilla"

- 8.
- El ciclista demora aproximadamente 14 minutos y 10 segundos en recorrer la cancha.

➤ Respuesta según procedimiento utilizado.

Para concluir

- El perímetro de cada una es de 25,12 cm. Son radios congruentes, los 16 cm se dividen en 4 y el resultado es el radio.
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 138

- 1.
- | | |
|------------------------|------------------------|
| a. Rectángulo. | d. Radio y diámetro. |
| b. 32 cm^2 . | e. 64 cm^2 . |
| c. Menor. | f. Mayor. |
- g. $32 < AO < 64$ Una buena estimación para el área sería 48 cm^2 .

Página 139

- 2.
- $18 < 27 < 36$
 - $32 < 48 < 64$
 - $72 < 108 < 144$
- 3.
- Base = $\pi \cdot r$
 - La altura corresponde al radio.
 - $A = \pi \cdot r^2$

Página 140

- 4.
- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| a. $A = 12,56 \text{ cm}^2$ | c. $A = 50,24 \text{ cm}^2$ |
| b. $A = 176,625 \text{ cm}^2$ | |
- 5.
- Buscar dos factores iguales para el resultado.
 - Al diámetro.
 - El área de la piscina es de $113,04 \text{ m}^2$.
 - Quedan $30,96 \text{ m}^2$ de pasto aproximadamente.
- Respuesta variable, por ejemplo: "Restar el área del círculo del área del cuadrado"
- 6.
- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a. $A = 113,04 \text{ cm}^2$. | c. $A = 19,625 \text{ cm}^2$. |
| b. $A = 63,585 \text{ mm}^2$. | d. $A = 78,5 \text{ cm}^2$. |
- Elementos del círculo, triángulos y su clasificación, entre otros.
- 7.
- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a. $28,26 \text{ m}^2$. | b. $27,74 \text{ m}^2$. |
|--------------------------|--------------------------|
- Respuesta variable.

Página 141

- 8.
- | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|
| a. $r = 3 \text{ m}$ | b. $r = 5 \text{ m}$ | c. $r = 9 \text{ cm}$ |
|----------------------|----------------------|-----------------------|

9.

- | | | |
|-----------|-------------|-------------|
| a. 16 cm. | b. \$31 400 | c. \$11 304 |
|-----------|-------------|-------------|

➤ Respuesta variable, por ejemplo: "calcular el diámetro, calcular el área completa, resta el área del vidrio y el marco"

10.

- El área de la figura coloreada es de $1093,5 \text{ cm}^2$.
- Respuesta variable, por ejemplo: calcular el área del rectángulo y después restar el área de los semicírculos.

Para concluir

- Si se duplica la medida de r , el área se cuadruplica.
- Respuesta personal.
- Respuesta personal.

Página 142

- 1.
- | | |
|---------------------------|---|
| a. Triángulos y trapecio. | c. 648 cm^2 y 3888 cm^2 . |
| b. Sí, son suficientes. | d. 2268 cm^2 . |

➤ Respuesta variable, por ejemplo: "Si, están bien los cálculos"

Página 143

- 2.
- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a. $A = 276 \text{ m}^2$ | b. $A = 735 \text{ mm}^2$ |
|--------------------------|---------------------------|
- c. Sí, es posible, ya que se dividen exactamente en figuras ya conocidas.

3.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| a. $A = 560,34 \text{ cm}^2$. | b. $A = 296,52 \text{ cm}^2$ |
|--------------------------------|------------------------------|

➤ Respuesta variable, por ejemplo: "se calcula las figuras de forma separada y después se suman teniendo el área total."

Página 144

- 4.
- | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a. $1,14 \text{ cm}^2$ | b. $64,26 \text{ cm}^2$ | c. $19,26 \text{ cm}^2$ |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|

5.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a. $56,52 \text{ cm}^2$ | b. $87,48 \text{ cm}^2$ |
|-------------------------|-------------------------|
- c. Respuesta variable, por ejemplo: "Al área del cuadrado le reste el área del camino."

6.

- | | |
|-----------------|---------------------------|
| a. 15 baldosas. | b. $423,9 \text{ cm}^2$. |
|-----------------|---------------------------|
- c. La superficie verde será de $116,1 \text{ cm}^2$.

Para concluir

- El resumen debe contener la suma de áreas para figuras compuestas, las figuras contenidas en otras figuras y el área de regiones pintadas en una figura.
- Respuesta personal.
- Respuesta personal.

Antes de continuar**Página 145**

- 1.
- | |
|--|
| a. Júpiter: $4389,72 \text{ u}$. Saturno: 3768 u . Marte: $427,04 \text{ u}$.
Tierra: $398,78 \text{ u}$. |
| b. Marte: $7259,68 \text{ u}^2$. Saturno: 565200 u^2 . Júpiter: $767103,57 \text{ u}^2$. Tierra: $6330,63 \text{ u}^2$. |

2.

- | |
|--|
| a. $P = 62,8 \text{ cm}$. $A = 78,5 \text{ cm}^2$. |
| b. $P = 64,26 \text{ cm}$. $A = 34,83 \text{ cm}^2$. |

3.

- $176,625 \text{ m}^2$ y $283,385 \text{ m}^2$ respectivamente.
- En un galpón quedan $112,375 \text{ m}^2$ sin luz y en el otro $157,615 \text{ m}^2$.

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 13. Posición y desplazamiento

Página 146

- (2, 1)
 - (6, 4)
- Respuesta variable, por ejemplo: "el primer número se ubica en el eje X y el segunda en el eje Y. Si se invierte el orden, el punto queda mal ubicado."
- 3 espacios hacia la derecha y dos hacia arriba.
 - 2 espacios hacia la izquierda y 5 espacios hacia arriba.
- La coordenada es (-2, 5)

Página 147

- Estadio: (-3, 2). Parque de diversiones: (-1, 2). Playa (-1, -1).
 - No, no es correcto ya que el puerto está en (-5, -3).
 - 13 unidades hacia la izquierda y 6 hacia abajo.

Página 148

- Rectángulo $OPQR$. Ubicado en los cuadrantes III y IV. Vértices: $O(-3, -3)$; $P(1, -3)$; $Q(1, -1)$ y $R(-3, -1)$.
 - Rombo $DEFG$. Ubicado en los cuadrantes I y IV. Vértices: $D(3, -2)$; $E(6, -2)$; $F(5, 1)$ y $G(2, 1)$
 - Triángulo escaleno ABC . Ubicado en el cuadrante I. Vértices: $A(2, 2)$; $B(5, 2)$ y $C(4, 4)$
- Triángulo isósceles. Ubicado en el cuadrante I.
 - Romboide. Ubicado en los cuadrantes I y II.
 - Cuadrado. Ubicado en el cuadrante III.
 - Rectángulo. Ubicado en los cuadrantes I y IV.
 - En todas las figuras con segmentos paralelos al menos un par de puntos coincide en al menos una de sus coordenadas.
- (8, 3)
 - (1, 2); (7, 2); (7, 5); (1, 5).
- Para marcar cualquiera de sus puntos es necesario conocer el centro y el radio.
- Respuesta según reflexión del estudiante.

Página 149

- Es necesario unir los puntos que tengan igual abscisa. Para el lado horizontal se unen los que tengan igual ordenada.
- Respuesta variable, por ejemplo: $C(-2, 1)$ o $C(-2, 7)$.
 - $C(-2, 0)$; $D(2, 0)$. $C(-8, 2)$; $D(2, 8)$
 - Es posible formar un triángulo equilátero colocando el punto C en $(0, 4 - \sqrt{12})$. Para formar uno isósceles basta con poner el punto C sobre el eje Y , a cualquier altura.
- Respuestas personales de acuerdo al proceso.

Para concluir

- Las coordenadas de la figura podrían ser: $A(-2, -1)$; $B(3, -1)$; $C(2, 2)$; $D(-1, 2)$.
- Respuesta personal.
- Respuesta personal.

Página 150

- Respuesta variable, por ejemplo: "Por medio de una flecha"
 - (6, 4)
 - Se trasladó de A a B .

Página 151

- El vector que desplaza el rombo es $v(4, 2)$. El vector del trapecio es $v(5, -3)$
 - El vector que desplaza el rombo sería $v(-4, -2)$. El vector del trapecio sería $v(-5, 3)$
- $E'(5, 3)$; $F'(8, 3)$; $G'(6, 6)$.
 - $J'(11, 4)$; $L'(8, 4)$; $M'(8, 6)$; $N'(11, 6)$
- Respuesta variable, por ejemplo: "que conserva su forma, solo cambia la ubicación y sucede lo mismo con las coordenadas y "
- Restando las coordenadas de la imagen a las del punto inicial.

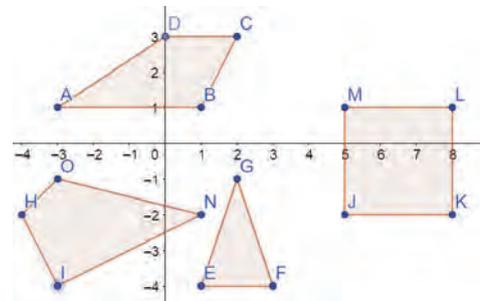
Para concluir

- (9, 7)
- Respuesta personal.
- Respuesta personal.

Antes de continuar

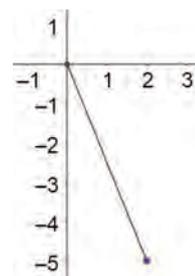
Página 152

- Respuestas a, b, c y d.



- $V(5, 3)$
- $P'(1, 1)$; $Q'(3, 1)$; $R'(2, 3)$; $S'(0, 3)$
-
-

a.



b. $v(2, -5)$

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 14. Rectas y congruencia

Página 153

- Las líneas que dividen al tríptico son paralelas entre sí y perpendiculares a las líneas del borde superior.
 - La línea de en medio sería paralela a las del borde y perpendiculares a las que dividen al tríptico.

2.
 - a. Respuesta variable según medida realizada.
 - b. No, porque son paralelas.

Página 154

- Respuesta variable, por ejemplo: “en edificios, cuadernos o ventanas”
3.
 - b. Midiendo el ángulo entre ambas rectas con una escuadra o transportador.
 - c. Construir rectas perpendiculares. Se utiliza en construcción.
 - d. 90 grados.

Página 155

4. L_1 y L_3 serán paralelas entre sí.
5. Las respuestas correctas corresponderán a lo solicitado respetando las medidas solicitadas y los ángulos rectos donde corresponda.
- Respuesta variable, por ejemplo: “con una escuadra”

Para concluir

- a. El resumen debe contar con los pasos de construcción de rectas paralelas y perpendiculares, construcción de figuras y medición.
- b. Respuesta de reflexión personal.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Página 156

1.

a. $m(P'Q')$: 10,5 cm.	c. $m(R'S')$: 7,5 cm.
b. $m(F'G')$: 6 cm.	d. $m(J'K')$: 13,5 cm.

- Midiendo el segmento y replicarlo con la regla
2. Respuesta de investigación.

Página 157

3.
 - a. Respuesta variable, por ejemplo: **Paso 1:** Trazar una recta de tamaño igual al lado mayor del triángulo. **Paso 2:** Con el compás abierto en la medida de uno de los lados, trazar un arco de circunferencia sobre uno de los extremos el segmento anterior. **Paso 3:** Repetir el paso 2 con la medida del otro lado desde el otro extremo del segmento inicial. **Paso 4:** Unir los extremos del segmento con la intersección de los arcos de circunferencia trazados.
 - b. Los lados miden lo mismo.
 - c. Respuesta variable, por ejemplo: con la regla y transportador.
 - d. Sí, se podría.
4. Respuesta variable, por ejemplo: en *GeoGebra* para copiar un segmento o ángulo, debe hacer clic con el botón izquierdo en el objeto y hacer clic en la opción “copiar”, después se selecciona un lugar en el plano y con el botón izquierdo se hace clic en la opción “pegar”.

Página 158

5. Respuesta variable. La respuesta correcta corresponde a tres pares de cuadriláteros congruentes entre sí. Los cuadriláteros deben tener la misma medida de lados y ángulos.
6.

a. LAL	b. LLL	c. ALA
--------	--------	--------

Para concluir

- a. Claudio debe entregar 3 datos que podrían ser: los 3 lados, 2 ángulos y un lado, 2 lados y un ángulo o los 3 ángulos.
- b. Respuesta de reflexión personal.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar

Página 159

1.
 - a. Los bellotos, los abedules y Los Boldos.
 - b. Los bellotos, los álamos, los abedules y Los Boldos.
 - c. Los alerces.
2. Respuesta dependiendo de la creación de cada estudiante.
3.

a. No es posible.	b. Solo una.
-------------------	--------------
4.
 - a. Sí. Criterio LLL.
 - b. No son congruentes.
 - c. No son congruentes.
 - d. Sí. Criterio LAL.
5.
 - a. Respuesta variable según la ubicación del ángulo en el IV cuadrante del plano. El ángulo debe medir 40° .
 - b. Respuesta variable según la ubicación del ángulo en el IV cuadrante del plano. El ángulo debe medir 125° .

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 15. Elementos notables del triángulo

Página 160

1.
 - a. Midiendo la distancia entre los extremos y ubicando el punto que está justo a la mitad.
 - b. A la construcción de la recta perpendicular.

Página 161

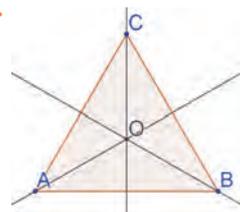
2.
 - a. Respuesta según el desarrollo del alumno.
 - b. Para Δ obtusángulos queda fuera. Para Δ rectángulos, el punto queda en un lado. Para Δ acutángulos, adentro.
 - c. La circunferencia pasa por sus vértices.

- Respuesta variable, por ejemplo: “para la construcción de edificios”

Página 162

3. En 2 y 3. La recta pasa por su punto medio y es perpendicular al lado del triángulo.

4.
 - a. (en la imagen b.)
 - b.



- c. Cada uno se encuentra a 46,2 cm del mazo.

5.
 - a. Las distancias son las mismas siempre.
 - b. Las medidas de AC y BC son las mismas a medida que el punto C se aleja y acerca del centro.
6. A 20 cm de cada vértice.

Página 163

7.
 - a. Porque están a igual distancia del circuncentro.
 - b. En Δ acutángulos se encuentra en su interior, en los Δ rectángulos en un lado y en los Δ obtusángulos fuera.

Para concluir

- a.
 - $\approx 6,8$.
 - Ubicar los puntos del segmento donde se hará la simetral, ocupar el compás que marque el camino para trazar la mediatriz.
- b. Respuesta personal. c. Respuesta personal.

Página 164

1.
 - a. Cualquier cuadrilátero en que su diagonal coincida con la bisectriz.
 - b. Cualquier cuadrilátero en que la suma de sus lados opuestos sean iguales.

Página 165

2.
 - a. Mide lo mismo para cada lado.
 - b. Ubicar círculo dentro del triángulo.

➤ No es posible.

Página 166

3.
 - a. Ángulo original: 55° . Ángulos bisectados: $27,5^\circ$.
 - b. Ángulo original: 120° . Ángulos bisectados: 60° .
 - c. Ángulo original: 35° . Ángulos bisectados: $17,5^\circ$.
4. L_2 corresponde a la mediatriz y L_1 a la bisectriz.
5. Respuesta personal. 6. Respuesta personal.

Página 167

7.
 - a. Cualquier cuadrilátero en que su diagonal coincida con la bisectriz.
 - b. Cualquier cuadrilátero en que la suma de sus lados opuestos sean iguales.

➤ Una mediatriz.

8.
 - a. $m = 80^\circ$
 - b. $3a = 45$
 - c. $\frac{1}{2}x = 52,5^\circ$
 - d. $y = 30^\circ$

Para concluir

- a. Respuesta variable, por ejemplo “la bisectriz divide el ángulo, la mediatriz divide el lado”.
- b. Respuesta personal. c. Respuesta personal.

Página 168

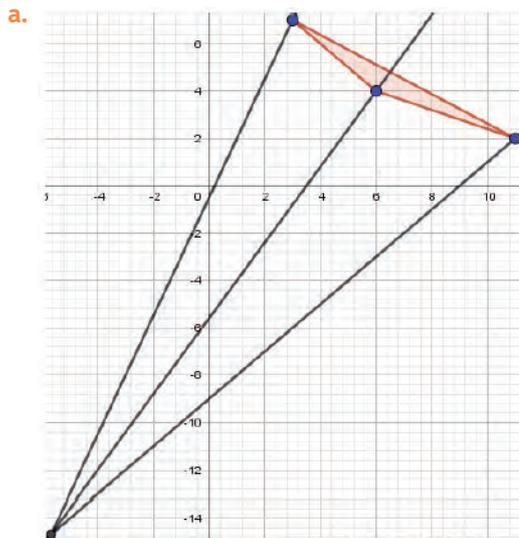
1. Debería formar un ángulo recto.
2.
 - a. La altura del cuadrilátero.
 - b. Respuesta variable, por ejemplo: “que es perpendicular a la base”.

Página 169

3. Respuesta variable, por ejemplo: “La escuadra se ubica por la base, y se desliza hasta que se encuentre con el vértice opuesto, se traza la línea de forma que quede un ángulo recto”
4.
 - a. Forma un ángulo recto.
 - b. El ortocentro se ubica fuera del triángulo.
 - c. Sobre el \sphericalangle recto.

Página 170

5.



- a.
- b. El ortocentro se ubica en el punto $(-5.67, -14.67)$
- c. Está fuera de la figura.
- d. En los triángulos obtusángulos.

6.

- a. A las dos.
- b. Medir el ángulo que se forma y medir la distancia entre la intersección con el lado opuesto y sus respectivos vértices.
- c. El segmento forma un ángulo de 90° y corta al ángulo opuesto en la mitad.

7.

- a. Respuestas variables a partir del desarrollo del alumno.
- b. Se forman dos triángulos rectángulos isósceles.

8. En cualquier Δ equilátero coinciden ambos puntos.

➤ Respuesta de reflexión personal.

➤ Respuesta de reflexión personal.

Página 171

9.

- a. $2x = 30^\circ$
- b. $\frac{1}{2}n = 30^\circ$
- c. $0.25y = 5^\circ$
- d. $q = 40^\circ$
- e. $3a = 75^\circ$
- f. $x = 70^\circ$

Para concluir

- a. Debe ubicar el letrero sobre el lado de 2 metros
- b. Respuesta personal. c. Respuesta personal.

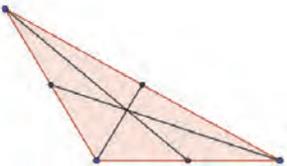
Página 172

1. Actividad de desarrollo en el aula.
- Solo se pueden equilibrar en ese punto.

Página 173

2.
 - b. Sólo en el segundo triángulo se puede asegurar.
3. Respuestas según el desarrollo del alumno.
4. Respuestas según el desarrollo del alumno.
Respuesta c: Las rectas, segmentos y puntos que componen la mediatriz, bisectriz, altura y transversal de gravedad en un triángulo equilátero coinciden.
5. El triángulo debe ser equilátero.
5.
 - a. Alturas
 - b. Transversales de gravedad.

Página 174

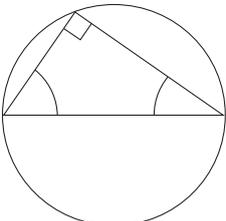
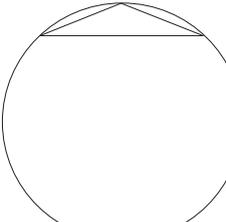
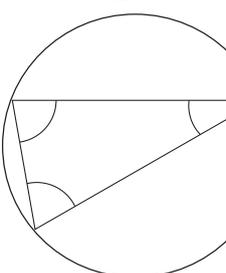
6.
 - a.
 
 - b. El baricentro se encuentra dentro del triángulo
 - c. No, no es posible.
7. No es posible que suceda. En un triángulo rectángulo dos alturas coinciden con los lados del triángulo.

Para concluir

- a. Respuesta variable según el desarrollo del alumno.
- b. Respuesta variable según el desarrollo del alumno.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar

Página 175

1.
 - a.
 
 - b.
 
 - c.
 

2.
 - a. Respuestas según el desarrollo del estudiante.
 - b. Las mediatrices.
 - c. Circuncentro.
3. Respuestas variables según el desarrollo del alumno.
4.
 - a. Falsa. La circunferencia no está contenida en el triángulo.
 - b. Verdadera.
 - c. Falso. Es solo un segmento.
 - d. Falso. Ya que G no pertenece a la \odot azul.

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Repaso

Página 177

1.
 - a. \angle int suman 720° y \angle ext miden 60° .
 - b. \angle int suman 1440° y \angle ext miden 36° .
 - c. \angle int suman 2700° y \angle ext miden $\approx 21,2^\circ$.
2.
 - a. 49 m^2
 - b. 160 dm^2
 - c. 9 cm^2
3.
 - a. $P = 20,096 \text{ cm}$. $A = 32,1536 \text{ cm}^2$.
 - b. $P = 39,564 \text{ dm}$. $A = 124,6266 \text{ dm}^2$.
4. $A = 6,88 \text{ cm}^2$.
5. $A(2, 3)$; $B(1, 1)$; $C(4, 0)$; $D(-2, 2)$; $F(-1, 3)$; $G(3, -3)$; $H(-2, 1)$; $I(3, 2)$; $J(1, -1)$; $K(-1, -2)$; $M(-3, -2)$.
6. $C'(-5, 0)$; $D'(1, -2)$; $E(1, 1)$.
7. Respuestas variables según el desarrollo del alumno.
8. Respuestas variables según el desarrollo del alumno.

¿Qué aprendí?

Página 178

1. $F1: 9900 \text{ mm}^2$, $F2: 9000 \text{ mm}^2$ y $F3: 4500 \text{ mm}^2$
2. $F1: 4500 \text{ mm}^2$, $F2: 5400 \text{ mm}^2$ y $F3: 9900 \text{ mm}^2$
3. $F1: 14400 \text{ mm}^2$, $F2: 14400 \text{ mm}^2$ y $F3: 14400 \text{ mm}^2$
4. Son iguales ya que tienen las mismas formas.
5. Respuesta variable.
6.
 - a. 180°
 - b. 540°
 - c. 720°
 - d. 1080°
 - e. 1260°
 - f. 3240°
7.
 - a. $A = 113,04 \text{ cm}^2$
 - b. $A = 34,54 \text{ cm}^2$
8.
 - a. $v(-1, 4)$
 - b. $v(11, 9)$
9.
 - a. 8 cm^2
 - b. 15 cm^2

Página 179

10. Respuestas variables según desarrollo del alumno.
11.
 - a. Son paralelas.
 - b. Son paralelas.
 - c. Las rectas BC no es paralela ni perpendicular a ninguna recta, lo mismo con la recta CI .

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Unidad 4. Estadística y probabilidad

Página 180

1. Muy poca, ya que es 1 de 200 000 seguidores.

Página 181

2. 110 000 mujeres y 90 000 hombres.
3. No es posible, porque falta información en el gráfico.
4. En Chile.

Página 182

Activo lo que sé

1.
a. 640 b. 610 c. El 7°A.
2.
a. Violín. b. Danza. c. Violín.
3.
a. Falso. b. Verdadero. c. Falso.
4.
a. Amarillo más y rojo menos probabilidad.
b. 2 o más bolitas.
• Respuestas de reflexión personal.

Lección 16. Organización y representación de datos

Página 183

1.
a. Las dos tienen razón ya que esos colores son los que más se repiten en las extracciones.
b. Rojo.
c. Respuesta variable, por ejemplo: 16 amarillas, 16 verdes, 10 moradas, 8 rojas.
d. Respuesta variable, por ejemplo: sacar otras 5 cartas.
2.
a. Pasatiempos que realizan los estudiantes.
b. A la gran mayoría le gusta realizar deporte y a muy pocos les gusta la lectura.
c. Sí, porque son estudiantes del colegio.
d. Porque esas son las respuestas del curso y las otras del total del colegio.
e. Respuesta variable, por ejemplo: No, en cuanto a lectura y videojuegos son casi iguales, en deporte y televisión difieren del promedio del colegio.

Página 184

3.
a. Color verde predomina por sobre el azul.
b. Aproximadamente 70% verde y 30% azules.
c. Respuesta según los resultados de los alumnos.
4.
a. P: Estudiantes de Chile. M: 10 colegios de Chile.
b. P: Habitantes del edificio. M: 3 dptos con internet.
c. P: Recién nacidos fallecidos. M: Centros hospitalarios nacionales.

Página 185

- d. Población: Egresados del colegio en cualquier año. Muestra: Egresados en 2016, 2017 y 2018
e. Población: Empleados de una empresa. Muestra: 5 funcionarios por cada departamento.

5.

- a. Cualitativa nominal. f. Cuantitativa discreta.
b. Cuantitativa continua. g. Cualitativa nominal.
c. Cuantitativa discreta. h. Cualitativa nominal.
d. Cualitativa nominal. i. Cuantitativa continua.
e. Cuantitativa continua. j. Cualitativa discreta.

Para concluir

- a.
• P: Ampolletas fabricadas. M: 100 unidades de ampolletas. Tipo de variable: cualitativa nominal.
• P: Estudiantes de un colegio. M: 42 estudiantes. Tipo de variable: cuantitativa continua.
b. Respuesta de reflexión personal.
c. Respuesta de reflexión personal.

Página 186

1.
a. 8, 45, 23 y 8
b. 3 estrellas.
c. 3 estrellas.
d. Los hoteles de 2 y 5 estrellas tienen el menor porcentaje de oferta.
e. 76 hoteles.

Página 187

2.
a. 0%.
b. 15 personas, esto se ve en la frecuencia acumulada.
3.
a.

Kilogramos de basura por hogar				
Cantidad de kilogramos	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia acumulada (F)	Frecuencia relativa (fr)	Frecuencia relativa (f _g)
0	1	1	≈0,0714	7,14 %
1	3	4	≈0,214	21,4 %
2	3	7	≈0,214	21,4 %
3	4	11	≈0,286	28,6 %
4	2	13	≈0,143	14,3 %
5	1	14	≈0,0714	7,14 %
Total	14		≈1	≈100 %

b.

Mascotas que tienen mis amigos				
Cantidad de mascotas	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia acumulada (F)	Frecuencia relativa (fr)	Frecuencia relativa (f _g)
0	3	3	≈0,136	13,6 %
1	7	10	≈0,318	31,8 %
2	5	15	≈0,227	22,7 %
3	4	19	≈0,181	18,1 %
4	3	22	≈0,136	13,6 %
Total	22		≈1	≈100 %

Página 188

4.

a.

Respuesta	f	F	fr	f _%
Sí	867	867	0,30	30%
No	2023	2890	0,70	70%

b.

Nivel socioeconómico	f	F	fr	f _%
ABC1	1 088 383,32	1 088 383,32	0,072	7,2%
C2	2 327 930,99	3 416 314,31	0,154	15,4%
C3	3 386 081,44	6 802 395,75	0,224	22,4%
D	5 260 519,38	12 062 915,13	0,348	34,8%
E	3 053 519,87	15 116 435	0,202	20,2%

Página 189

5.

- a. f: 50 / fr%: 4%, 14%, 16%, 10%, 100% /
fr (fracción): $\frac{24}{50}, \frac{2}{50}, \frac{7}{50}, \frac{8}{50}, \frac{4}{50}, \frac{5}{50}, \frac{50}{50}$.
- b. Deporte favorito, es del tipo cualitativa nominal.
- c. 50 estudiantes. e. 14%
- d. Fútbol. f. 26%
6. Respuestas variables, de acuerdo a los datos recopilados por los estudiantes.

Para concluir

a.

Estado civil	f	F	fr	f _%
Casado	675	675	0,45	45%
Soltero	765	1440	0,51	51%
Separado	60	1500	0,04	4%

- b. Respuesta de reflexión personal.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Página 190

1.

- a. País y precio en dólares.
- b. Gráfica creada por el estudiante.
- c. Estados Unidos y Canadá.
- d. Finlandia.
- e. Sí, en un gráfico de líneas.
- f. Es más fácil hacer comparaciones entre los datos.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 191

2.

- a. Respuestas variables de acuerdo a la elección del estudiante.
- b. Respuesta variable dependiendo del gráfico escogido.
- c. Respuesta según procedimiento del estudiante.
- d. Respuesta según procedimiento del estudiante.

Página 192

3.

- a. Variable: Grupo sanguíneo de un grupo de personas
Clasificación: Cuantitativa nominal
Gráfico: barra o circular

- b. Variable: Cantidad de turistas que entraron al país por cada mes.
Clasificación: Cuantitativa discreta.
Gráfico: líneas, barra o circular.
- c. Variable: Duración de una pila.
Clasificación: Cuantitativa discreta.
Gráfico: líneas o barra.

Página 193

4.

- a. Viernes porque la barra en ese día es la más alta.
- b. Lunes, martes y viernes.
- c. Miércoles.

5.

a.

Fruta	f	F	fr	f _%
Manzana	20	20	0,5	50%
Plátano	10	30	0,25	25%
Naranja	8	38	0,2	20%
Pera	2	40	0,05	5%

- b. Variable: Frutas que consume un grupo de personas. Tipo: Cualitativa nominal.
- c. 10 personas. d. Pera
- e. Respuesta variable, por ejemplo "también se puede usar un gráfico de barras".
- Respuesta variable, por ejemplo: "En la forma o cantidades que refleja"
- Respuesta variable, por ejemplo: "cuando nos interesa un análisis más profundo"
- Respuesta variable, por ejemplo: "para entender información en noticias y redes sociales."

Página 194

6.

a.

¿Tú dirías que la mayoría de las personas en situación de pobreza en Chile son...?			
Opinión	f	F	fr
No alcanzan condiciones de vida dignas en salud, trabajo, educación y vivienda	414	414	0,41
Viven en hogares que no consiguen obtener un mínimo de ingreso al mes	232	646	0,23
Discriminadas o excluidas por su origen social, su cultura, género u otras razones	172	818	0,17
No trabajan o no se esfuerzan	172	990	0,17
Otro	20	1010	0,02

- b. Un gráfico circular.
- c.
- Porque es fácil de representar porcentajes.
 - Respuesta de reflexión personal.
 - Respuesta de reflexión persona.

7.

- a. 46 alumnos.
- b. Más baja: 3,0 y más alta: 7,0
- c. 2 estudiantes.

- Para comparar dos grupos de datos o para obtener visualmente donde y como se acumulan datos.

Página 195

- 8.
- No, porque hace pensar que los clientes retenidos por la compañía *B* son muchos más que la compañía *A* y solo equivalen a 10 personas.
 - El eje *Y* comienza en 68.
- 9.
- A*: Entre 10 y 22 horas. *B*: Entre 5 y 16 horas.
 - A*: jornada completa. *B*: jornada vespertina.
 - B*: 9 y 11 horas. *A*: 16 y 19 horas.
 - Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta según reflexión del estudiante.

Para concluir

- Actividad en aula, la cartulina debe presentar gráfico de barras simple, barras agrupadas, tallo y hora, circular, líneas, etc.
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 196

1. Respuestas variables, dependiendo de la información recopilada en la encuesta realizada.
- Pueden ser graficadas pero no sirven para comparar información.
- Respuesta variable, por ejemplo: son importante para resumir información.

Página 197

- 2.
- Analizar el nivel de sedentarismo en los estudiantes.
 - 50.
 - $F: 2, 7, 13, 29, 40, 50 / fr: 0,04; 0,1; 0,12; 0,32; 0,22; 0,2$.
 - 6 a 8 horas, se ve en la tabla.
 - Gráfico a elección del estudiante.
 - El 74% de los encuestados realizan por lo menos 6 horas de su deporte favorito a la semana.
 - Respuestas variables de acuerdo a la temática de la encuesta y los datos recopilados:
 - Respuestas variables de acuerdo a la temática de la encuesta y los datos recopilados:
 - Respuestas variables de acuerdo a la temática de la encuesta y los datos recopilados. Un ejemplo de respuesta es: No, no se asemejan.
 - Según respuesta en *i*. Porque cambian las muestras.

Para concluir

- Respuesta variable, por ejemplo: se escoge el tema de la encuesta, y las posibles variables y la muestra donde se realizara la encuesta.
- Respuesta variable, por ejemplo: porque nos ayuda comprender información más concisa.
- Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar

Página 198

1. Respuesta según procedimiento del estudiante.
- 2.
- 8
 - 17
 - 4
 - Tabla de frecuencias creada por el estudiante.
 - Un gráfico de barras, porque nos muestra la cantidad por categoría.
- 3.
- Viernes, porque la barra es más alta.
 - Lunes, martes, miércoles y viernes.
 - Miércoles y jueves.
 - Porque se muestra exactamente la cantidad por día y es fácil de comparar las cantidades.
 - 4
 - Danza
 - 18
 - Porque muestra porcentajes y se ven como un todo.

Reflexiono

- Respuesta de reflexión personal.

Lección 17. Medidas de tendencia central

Página 199

- 1.
- En promedio pasan 3,6 horas en redes sociales.
 - Porque ella no pasa tiempo en redes sociales.
 - Respuesta de reflexión personal.

- Respuesta de reflexión personal.

Página 200

- Siempre que hay un dato muy alejado de los otros hace que el promedio cambie.
- 2.
- $\bar{X} = 6,5$. Sí, ya que los datos están agrupados.
 - $\bar{X} = 5,125$. No, ya que el 30 se aleja del resto de los datos.
 - $\bar{X} \approx 29,29$. No, el 2 se aleja muchos de los datos.

- 3.
- 50 personas.
 - 14,14 años.
 - 17 es el valor máximo y 12 el valor mínimo.
 - 5 años.
4. No, no es posible ya que ninguno de los valores es igual o superior a 1,67.

Página 201

5. No, no influye ya que es igual al promedio.
- 6.
- Inglés: 0,6 y Ciencias naturales: 2,7. Las notas en inglés son más regulares que las de Ciencias.
 - Inglés: $\approx 5,9$. Ciencias naturales: $\approx 5,9$.
 - Gráfico creado por el estudiante.
 - El promedio es más representativo en inglés ya que las notas no se alejan tanto de él.
7. Porque el promedio será solo el tiempo medio.
8. No, ya que pueden haber personas con un sueldo excesivamente alto y otras con uno muy bajo.

- No, porque pueden haber datos muy alto o muy bajos y esto hace que no sea representativo del promedio

Para concluir

- Respuesta variable, el cuadro debe contar con medidas de tendencias central, promedio y rango
- Respuesta variable, por ejemplo: Estudiar el comportamiento de los datos a través del rango o un gráfico.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 202

1.

a.

Acción	<i>f</i>	<i>F</i>	<i>fr</i>	<i>f</i> _%
Plantar árboles	15	15	≈0,289	28,9%
Reciclar	18	33	≈0,346	34,6%
Recoger basura	7	40	≈0,135	13,5%
Cuidar animales abandonados	12	52	≈0,231	23,1%

- 52 personas.
- Reciclar.
- Recoger basura.
- Respuesta personal.
- Respuesta personal.

Página 203

2.

a.

¿Has sido víctima de cyberbullying?				
Curso	<i>f</i>	<i>F</i>	<i>fr</i>	<i>f</i> _%
7°	3	3	≈0,115	≈11,5%
8°	10	13	≈0,385	≈38,5%
1°	7	20	≈0,269	≈26,9%
2°	1	21	≈0,038	≈3,8%
3°	5	26	≈0,192	≈19,2%

- Gráfico de barras con todos sus elementos, creado por el estudiante.
- La moda es 8°, gráficamente es la barra más alta y en la tabla es la entrada con mayor frecuencia relativa y frecuencia absoluta.

3.

- Moda: ganar partidos, significa que de todos los encuentros jugados, se ganaron la mayoría
- Moda: 3 televisores. Significa que de todos los hogares de la ciudad, la mayoría tiene 3 televisores.

- Que es la barra o el porcentaje más grande en comparación con los otros.

- Respuesta variable dependiendo de los datos recopilados por el estudiante.

Para concluir

- Respuesta variable, por ejemplo: es el número que más se repite en la tabla o gráfico.
- Respuesta personal.
- Respuesta personal.

Página 204

1.

- 12
- Habrían dos términos centrales, 12 y 14.

2.

- Mediana: 2 cartones, lo que significa que la mitad de personas que compra 2 o menos cartones.

Página 205

3.

- La mediana es 1,625.
- No varía porque se están sacando el dato mayor y el dato menor, esto solo reduce la cantidad de datos pero el central sigue siendo el mismo.
- Respuesta personal.

- Respuestas variables, por ejemplo:

Valor	<i>f</i>	<i>F</i>
10	2	2
20	2	4
30	1	5
50	1	6
60	1	7
70	1	8
80	1	9
100	1	10

Valor	<i>f</i>	<i>F</i>
90	1	1
92	2	3
108	1	4
110	1	5
111	1	6
118	1	7
120	1	8
160	2	10

Para concluir

- Para impar, el número que quede es la mediana. Si es par, los dos números se deben promediar.
- La mediana es el valor que está al medio entre todos. La media corresponde al promedio entre todos los valores.
- Respuesta de reflexión personal.

Página 206

1.

- Respuesta variable, por ejemplo: El promedio es más representativo en el grupo 2 que en el grupo 1, ya que el rango del grupo 2 es menor.
- Porque la moda solo entrega el dato que más se repite, no es posible relacionarla con otros aspectos que entreguen más información.

Página 207

2.

- Depende de las edades de los asistentes, por ejemplo: 6.
- Respuesta variable, por ejemplo: 15, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 20, 20, 20, 21.
- Actividad de aula.
- No, no es único.
- No, podrían ser otras.
- Respuesta variable dependiendo de propuesta del estudiante, por ejemplo en este caso son iguales.
- Si es útil ya que nos podría dar un mayor indicio de la distribución que tienen las edades.

- Respuesta de investigación.

Para concluir

- Respuesta variable, por ejemplo: 5 – 6 – 6 – 7.
- Respuesta de reflexión personal.
- Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar

Página 208

- Moda: 6 años. Mediana: 56 años. Media: 44.179.
Rango: 83.
 - La municipalidad debe realizar actividades para adultos.
- La moda es el taller de guitarra.
 - Significa que la mayoría de los alumnos inscritos en un taller, lo hicieron en el de guitarra.
 - La moda cambia y ahora sería natación.
- En el 7°C.

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Lección 18. Probabilidad

Página 209

- Aleatorio.
 - Aleatorio.
 - Determinístico.
 - Determinístico.
 - Aleatorio.
 - Determinístico.
 - Aleatorio.

Página 210

- Se pueden elegir los números {1, 2, 3, 4, 5, 6}
 - No. Todos tienen la misma probabilidad de salir.
 - No. Todos tienen la misma probabilidad de salir.
 - No, no se puede ya que los lanzamientos son aleatorios y pueden variar.
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Casos favorables = {2, 3, 5, 7}.
Suceso equiprobable: Obtener un número par en el lanzamiento = {2, 4, 6, 8}
 - $\Omega = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$.
Casos favorables = {CSS, SCS, SSC}.
Suceso equiprobable: Obtener exactamente dos caras y un sello = {CCS, CSC, SCC}
 - $\Omega = \{NB, BB, NN, BN\}$. Casos favorables = {NB-BN}.
Suceso equiprobable: Obtener 2 bolitas del mismo color = {BB, NN}.

Para concluir

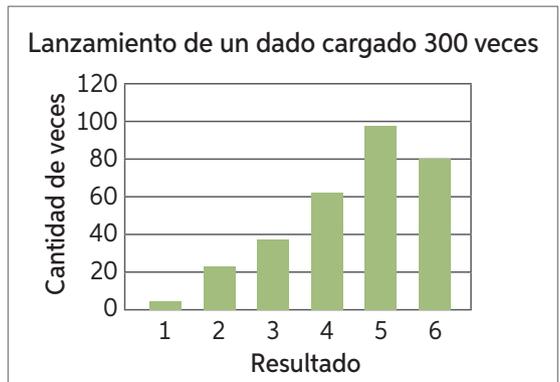
- Diagrama debe contener espacio muestral, sucesos, casos favorables, experimento determinístico y aleatorio.
- Respuesta personal.
- Respuesta personal.

Página 211

- Tabla de frecuencia completa.
 - Gráfico de líneas, con todos sus elementos, creado por el estudiante.
 - Tiende a 0,5.
 - Cara y sello tienen igual probabilidad de salir.
- Mayor o igual que cero, menor o igual que 1.
- Para relacionar la fr con la probabilidad.

Página 212

- Respuesta a partir del resultado del experimento.
-



- $1: \approx 0,006$ - $2: 0,08$ - $3: 0,12$ - $4: \approx 0,206$ - $5: 0,32$ - $6: \approx 0,26$
 - No. Probabilidad calculada es distinta a la teórica.
 - El 5 porque tiene más probabilidades de salir.
 - Porque no todos los números tienen la misma probabilidad de salir, esto se refleja en el gráfico y en los resultados obtenidos.
- Respuesta de reflexión personal.
 - Respuesta variable, por ejemplo en concursos o juegos de azar.

Página 213

- Por cada bolita azul hay dos bolitas rojas.
 - Se espera que la probabilidad de obtener una bola roja sea el doble que la de obtener una bolita azul.
 - Rojo = $\frac{8}{12} \approx 66,6\%$ Azul = $\frac{4}{12} \approx 33,3\%$
 - $1: 0,098$ - $2: 0,1026$ - $3: 0,1002$ - $4: 0,0982$ - $5: 0,1016$ - $6: 0,1012$ - $7: 0,0986$ - $8: 0,0996$ - $9: 0,1004$ - $10: 0,0996$
 - La diferencia es de 0,0046.
 - No es significativo ya que son 5000 extracciones.
 - Cada valor debería tender a 0,1.
 - 0,1.
- Respuesta de reflexión personal.

Para concluir

- No, ya que al aumentar las repeticiones solo nos aseguramos de obtener un valor más cercano al real.
- Respuesta de reflexión personal
- Respuesta de reflexión personal.

Página 214

- 1 de 10 en todos los casos.
 - Es la misma para el resto de los números.
 - $\frac{1}{10}$
 -
 - Hay 10 casos posibles o resultados
 - Hay 5 casos favorables al evento. Los cuales son: {2, 4, 6, 8, 10}
 - $\frac{1}{10}$. La probabilidad de extraer un par es de $\frac{5}{10}$ o $\frac{1}{2}$.

g. $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

h. Casos favorables sobre casos totales.

Página 215

▶ Porque son proporciones.

2.

a. $P(x = \text{verde}) = \frac{300}{750} = \frac{2}{5}$

b. $P(x = \text{blanca}) = \frac{200}{750} = \frac{4}{15}$ y $P(x = \text{fucsia}) = \frac{250}{750} = \frac{1}{3}$

3.

- a. 30%
- b. 5%
- c. 40%
- d. 75%
- e. 95%
- f. 60%

▶ Restar al 100% la probabilidad que tenía cada uno.

Página 216

4.

a. Casos favorables = 5

b. $P(x = \text{japonés}) = \frac{5}{20} = 25\%$

5.

a. $P(x) = \frac{3}{8}$

c. $P(x) = \frac{1}{8}$

e. $P(x) = \frac{4}{8}$

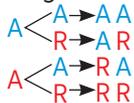
b. $P(x) = \frac{3}{8}$

d. $P(x) = \frac{7}{8}$

f. $P(x) = \frac{1}{8}$

6.

a. Diagrama de árbol de ficha azul y ficha roja.



b.

• $P(x) = \frac{9}{25}$

• $P(x) = \frac{13}{25}$

• $P(x) = \frac{6}{25}$

• $P(x) = \frac{12}{25}$

Página 217

7.

a. Hay 81 estudiantes del colegio técnico que son hombres y que estudian mecánica.

b. $P(x) = \frac{11}{200}$

c. $P(x) = \frac{54}{135} = \frac{2}{5}$

8.

a. $P(x) = \frac{13}{52}$

c. $P(x) = \frac{8}{52}$

e. $P(x) = \frac{4}{52}$

b. $P(x) = \frac{4}{52}$

d. $P(x) = \frac{1}{52}$

f. $P(x) = \frac{26}{52}$

Para concluir

- a. Respuesta variable, el resumen debe contener cálculo de probabilidad, casos probables y casos posibles, diagrama de árbol y espacio muestral.
- b. Facilita a ver el espacio muestral.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Página 218

1.

- a. (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6);
- b. 36 elementos.
- c. Respuesta según los resultados del experimento.

- d. Respuesta según los resultados del experimento.
- e. Respuesta según los resultados del experimento. Por ejemplo: para números cercanos es 0,056 y para números iguales es de 0,028.
- f. Respuesta según los resultados del experimento.

Por ejemplo: $P(x = (5, 6)) = \frac{2}{36}$. $P(x = (6, 6)) = \frac{1}{36}$.

Es más probable obtener 5 y 6 que 6 en ambas caras.

- g. Diferentes números ya que para obtener por ejemplo una pareja de 3 su probabilidad es $\frac{1}{36}$, mientras que para obtener un 3 y otro número está la opción de sacar (3, x) o (x, 3) por lo tanto su probabilidad es $\frac{2}{36}$.

- h. $P(x = (3, \text{par})) = \frac{6}{36}$. $P(x = (\text{impar}, \text{impar})) = \frac{9}{36}$. Es más probable obtener dos números impares que un 3 y un número par.

- i. Respuesta según los resultados del experimento. Por ejemplo: $\frac{1}{36} = 0,028$ y la calculada es 0,028.

- j. Para hacer que se acerquen ambos valores se debe aumentar la cantidad de lanzamientos de los dados.

▶ Respuesta de reflexión personal.

Página 219

2. Respuestas según el experimento realizado.

3.

- a. A medida que aumenta el número de lanzamientos la frecuencia relativa se asemeja cada vez más a la probabilidad teórica.
- b. A medida que se aumente el número de lanzamientos las líneas se parecerán cada vez más.

▶ Se puede observar la tendencia de los resultados.

▶ Con un gráfico circular o de barras.

Página 220

4. Respuestas según el experimento realizado.

Para concluir

- a. Respuesta variable, por ejemplo: Casos favorables / casos totales.
- b. Respuesta de reflexión personal.
- c. Respuesta de reflexión personal.

Antes de continuar

Página 221

1. Aleatorios:

- Extraer una bolita de una urna donde hay bolitas azules, amarillas y blancas.
- De un curso de 45 estudiantes, escoger una mujer que le gusten las matemáticas.

Determinísticos:

- Comprobar si el piso está mojado después de un día de lluvia.
- Comprobar si al lanzar al aire 3 piedras, estas caen.

2.

a. Se prepararon 298 postres.

b. $P(\text{fruta}) = \frac{120}{298}$. $P(\text{NO fruta}) = \frac{178}{298}$

3.

- a. $P(x = 12) = \frac{5}{30}$ c. $P(x < 14) = \frac{13}{30}$
 b. $P(x > 13) = \frac{17}{30}$
 d. Es más probable que tenga 15 años porque hay más niños de 15 que de 11.

4. Respuestas a partir del experimento realizado.

Reflexiono

- Respuesta de reflexión personal.

Repaso

Página 223

1.

- a. Manipulación.
 b. Agresiones. c. 38 %
 d.

Tipo de acoso	f	fr	f%
Bloqueo social	90	0,18	18 %
Hostigamiento	100	0,2	20 %
Manipulación	125	0,25	25 %
Exclusión social	60	0,12	12 %
Agresiones	50	0,1	10 %
Amenazas	75	0,15	15 %

e. Gráficos de barras con todos sus elementos.



2.

- a. 24 personas.
 b. Media: $\approx 3,33$. Mediana: 3. Moda: 3

3.

- a. $\approx 75,43$. b. 70.

4.

- a. Ciencia ficción, es la categoría que tiene más casos favorables.
 b. 0,3.

5.

- a. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ casos posibles.
 b. Tienen la misma probabilidad, ya que la mitad son pares y la otra impares.
 c. Sí, porque los números mayores son $6 + 6 + 6$, que suman 18.

¿Qué aprendí?

Página 224

1. América. 4. 890 536 personas.
 2. $\approx 1,94\%$ 5. $\approx 0,087$.
 3. $\approx 1,19\%$ 6. $\approx 0,844$.
 7.
 a. Respuesta variable, depende del experimento.
 b. 0,5
 c. Respuesta variable, depende del experimento.
 8.
 a. Gráfico de barra con todos sus elementos.
 b. $\approx 10\%$
 c. No, son datos nominales, no tienen orden.
 d.
 • $\approx 0,07$. • $\approx 0,04$. • $\approx 0,03$.

Reflexiono

- Respuestas de reflexión personal.

Página 225

9.



Bibliografía

ÁLVAREZ, R. (2013). *Conjuntos numéricos y aritmética*. Colombia: Universidad de Medellín.

ENGLER, A., GREGORINI, M., MÜLLER, D. y VRANCKEN, S. (s/f). *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad del Litoral, Argentina. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/228584198_Los_errores_en_el_aprendizaje_de_matematica

MARTINEZ, S. y VARAS, L. (2013). *Recursos para la formación inicial de profesores de educación básica*. Algebra. Santiago de Chile: Ediciones SM.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2 medio*. República de Chile. Santiago de Chile.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2016). *Programa de Estudio Séptimo Básico*. República de Chile. Santiago de Chile.

OVIEDO, L., KANASHIRO, A., BNZAQUEN, M. y GORROCHETEGUI, M. (2012). *Los registros semióticos de representación en matemática*. Revista Aula Universitaria, 13, 29-36.

Sitios Web

- Educación: www.educarchile.cl
- Geogebra: www.geogebra.org
- El portal de las matemáticas: www.sectormatematica.cl
- Icarito: www.icarito.cl
- Instituto Nacional de Estadísticas: www.ine.cl
- Ministerio de Educación: www.mineduc.cl
- Programa Explora Conicyt: www.explora.cl
- Real Academia Española de la Lengua: www.rae.es
- Sismología: www.sismologia.cl
- Facultad de ciencias físicas y matemáticas, Universidad de Chile: <http://ingenieria.uchile.cl/>
- Formula e: <https://www.fiaformulae.com/>

**NO LO RAYES
NI SUBRAYES**



**TÓMALO
CON CUIDADO**



**NO LO MANCHES
CON COMIDAS,
BEBIDAS Y/O AGUA**



**NO DOBLES
SUS ESQUINAS
NI SAQUES HOJAS**



**GUÁRDALO
EN UN LUGAR
ADECUADO**



Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile

ISBN 978-956-363-726-7



9 789563 637267