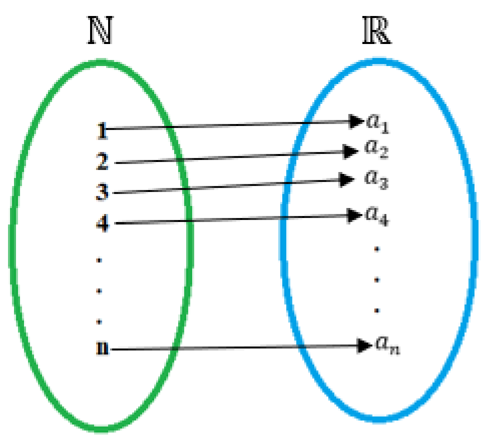
Guía contenidos 1 4° Diferenciado 1 2020
Unidad de Aprendizaje: Procesos Infinitos
Tema: Sucesiones y sumatoria

Coordinación: Natalia Carrasco

Aprendizajes Esperados:
1.- Conocen las transformaciones que producen diferentes tipos de iteraciones y establecen relaciones cuantitativas
2.-Reconocen que una suma se puede representar en forma compacta por medio de la notación de sumatoria.
3.- Conocen propiedades de la sumatoria

Sucesiones

Si a cada número natural se le hace corresponder un número real $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$, el conjunto $A_n = \{a_1, a_2, a_3, a_{4,\ldots,} a_n\}$ se denomina sucesión. Por lo tanto, toda sucesión es un conjunto de infinitos términos.



Obs: Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su recorrido es un subconjunto de los números reales

Ejemplos:

- La sucesión formada por los números pares tiene por término general:

$$\boldsymbol{a_n = 2n}$$

De modo que si reemplazamos "n" por los números naturales 1,2,3,…, se originan los términos:
$a_1 = 2 \cdot 1 = 2;\ a_2 = 2 \cdot 2 = 4;\ a_3 = 2 \cdot 3 = 6; \ldots$, con lo cual se obtiene el conjunto de los números pares: {2,4,6,8…}

- El término general de la sucesión de números impares es:

$$\boldsymbol{a_n = 2n - 1}$$

Luego,
$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1;\ a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3;\ a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5; \ldots$, con lo cual se obtiene el conjunto de números impares: {1,3,5,7…}

- Los términos de una sucesión definida por $\boldsymbol{a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)}$ son:

$$a_1 = (-1)^1 \cdot \left(\frac{1}{1+1}\right) = -\frac{1}{2}; \quad a_2 = (-1)^2 \cdot \left(\frac{2}{2+1}\right) = \frac{2}{3}; \quad a_3 = (-1)^3 \cdot \left(\frac{3}{3+1}\right) = -\frac{3}{4} \ldots$$

Luego, obtenemos la sucesión: $a_n = -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

Obs: Considerando que una sucesión no es más que una ordenación de números, se ha podido comprobar que algunas de ellas no tienen una regla de formación de término general, como es el caso de la sucesión de números primos.

- Dada la sucesión $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}}, \ldots$ para encontrar la expresión del término general, es necesario analizar el numerador y denominador por separado, así notamos que el numerador corresponde a la ordenación de números naturales, y el denominador es una unidad mayor, entonces el término general será:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{n}{n+1}}$$

- $\boldsymbol{a_n = 9, 13, 17, 21}$ ... Determinar la expresión del término general

Podemos notar que la sucesión va aumentando de 4 en 4, entonces:

$a_1 = 4n + \_\_\_\_ = 9 \longrightarrow a_1 = 4 \cdot 1 + \_\_\_\_ = 9 \longrightarrow a_1 = 4 \cdot 1 + 5 = 9$
$a_2 = 4n + \_\_\_\_ = 13 \longrightarrow a_2 = 4 \cdot 2 + \_\_\_\_ = 13 \longrightarrow a_2 = 4 \cdot 2 + 5 = 13$
$a_3 = 4n + \_\_\_\_ = 17 \longrightarrow a_3 = 4 \cdot 3 + \_\_\_\_ = 17 \longrightarrow a_3 = 4 \cdot 3 + 5 = 17$
$\cdots$

Luego el término general será : $\boldsymbol{a_n = 4n + 5}$

- $\boldsymbol{a_n = 3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, 9, \frac{21}{2}, 12}$ ... Determina la expresión del término general

En este caso, el denominador de cada término de la sucesión es 2 y en los términos de orden impar está simplificado, entonces anotamos la sucesión equivalente:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{6}{2}, \frac{9}{2}, \frac{12}{2}, \frac{15}{2}, \frac{18}{2}, \frac{21}{2}, \frac{24}{2}} \ldots$$

Notamos que el denominador siempre es 2, y el numerador aumenta de 3 en 3, entonces realizamos lo siguiente:

$a_1 = 3n + \_\_\_\_ = 6 \longrightarrow a_1 = 3 \cdot 1 + \_\_\_\_ = 6 \longrightarrow a_1 = 3 \cdot 1 + 3 = 6$
$a_2 = 3n + \_\_\_\_ = 9 \longrightarrow a_2 = 3 \cdot 2 + \_\_\_\_ = 9 \longrightarrow a_2 = 3 \cdot 2 + 3 = 9$
$a_3 = 3n + \_\_\_\_ = 12 \longrightarrow a_3 = 3 \cdot 3 + \_\_\_\_ = 12 \longrightarrow a_3 = 3 \cdot 3 + 3 = 12$
$a_4 = 3n + \_\_\_\_ = 15 \longrightarrow a_4 = 3 \cdot 4 + \_\_\_\_ = 15 \longrightarrow a_4 = 3 \cdot 4 + 3 = 15$
$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$
$a_n = 3 \cdot n + 3$ (término general para numerador)

Entonces la expresión del término general de la sucesión es:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{3n + 3}{2}}$$

Sumatoria

A veces se necesita determinar la suma de muchos términos de una sucesión infinita. Para expresar con facilidad esas sumas, se usa la notación de sumatoria. Dada una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n, \ldots.$ el símbolo $\sum_{k=1}^{m} a_k$ representa la sumatoria o suma sucesiva de los primeros "m" términos como se ve a continuación

Notación de sumatoria $\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_m$

La letra griega sigma mayúscula Σ, indica tal suma sucesiva, y el símbolo a_k representa el k-ésimo término. La letra k es el índice (o variable) de sumatoria, y los números 1 y m indican los valores mínimos y máximo de tal índice o variable, respectivamente.

Evaluación de una sumatoria

Determinar la sumatoria $\sum_{k=1}^{4} k^2 (k-3)$

Solución:

En este caso $a_k = k^2(k-3)$. Para evaluar la sumatoria, solo se sustituye, consecutivamente, k por los enteros 1,2, 3 y 4 y se suman los términos resultantes

$$\sum_{k=1}^{4} k^2(k-3) = 1^2(1-3) + 2^2(2-3) + 3^2(3-3) + 4^2(4-3) = -2 + (-4) + 0 + 16 = 10$$

Observación 1
No importa la letra que se usa para representar la variable de sumatoria. Por ejemplo, si j es la citada variable, entonces $\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m$ es la misma suma $\sum_{k=1}^{m} a_k$. En el ejercicio anterior también se puede representar como $\sum_{j=1}^{4} j^2 (j-3)$.

Si n es un entero positivo, entonces la suma de los n primeros términos de una sucesión infinita se representará con S_n. Por ejemplo, dados $a_1, a_2, a_3 ......, a_n ,....$

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

En general $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$
Nótese que también se puede escribir
$S_1 = a_1$
$S_2 = S_1 + a_2$
$S_3 = S_2 + a_3$
$S_4 = S_3 + a_4$
Y, para toda $n > 1$ $S_n = S_{n-1} + a_n$

Al número real S_n se le denomina $n-ésima$ suma parcial de la sucesión infinita $a_1, a_2, a_3 ,......, a_n ,....$ y la sucesión $S_1, S_2, S_3 ,..... S_n ,....$ es una sucesión de sumas parciales.

<u>**Cálculo de los términos de una sucesión de sumas parciales**</u>

Ejemplo: Calcular los cuatro primeros términos, y el n-ésimo, de la sucesión de sumas parciales relacionada con la sucesión 1, 2, 3, 4, 5,….., n de los enteros positivos

Solución.
Si $a_n = n$, entonces los cuatro primeros términos de la sucesión de sumas parciales son
$S_1 = a_1 = 1$
$S_2 = S_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$
$S_3 = S_2 + a_3 = 3 + 3 = 6$
$S_4 = S_3 + a_4 = 6 + 4 = 10$

La n-ésima suma parcial S_n (es decir, la suma de 1,2,3,4,5,….,n) se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas:
$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...(n-2) + (n-1) + n$
$S_n = n + (n-1) + (n-2) +,......, +3 + 2 + 1$
Sumando los términos correspondientes en cada lado de las ecuaciones se obtiene:
$2S_n = (1+n) + (1+n) + (1+n) + ... + (1+n) \quad (n\ veces)$
Como la expresión $(n+1)$ aparece n veces en el lado derecho de la última ecuación, entonces $2S_n = n(n+1)$ o, en forma equivalente:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$$

Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{25} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 25 = \frac{25(25+1)}{2} = 325$$

$$\sum_{k=1}^{50} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{50(50+1)}{2} = 1275$$

Sumatoria de los cuadrados de los n primeros números naturales

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{30} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 30^2 = \frac{30(30+1)(2\cdot 30+1)}{6} = 9455$$

Sumatoria de los cubos de los n primeros números naturales

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{60} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 60^2 = \left[\frac{60\,(60+1)}{2}\right]^2 = 3348900$$

Teoremas

Teorema 1: de la suma de una constante $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

Demostración

Si a_k es igual para todo entero positivo k, por ejemplo $a_k = c$ para un número real c, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$$

$$= c + c + c + c + c + \ldots + c = nc$$

Ejemplo $\sum_{k=1}^{10} \pi = 10\pi$

Teorema 2: de la suma de una constante que no parte desde cero $\sum_{k=m}^{n} c = (n-m+1)c$

Demostración: Se restan los primeros $(m-1)$ términos de la suma de n términos

$$\sum_{k=m}^{n} c = \sum_{k=1}^{n} c - \sum_{k=1}^{m-1} c$$

$= nc - (m-1)c$ (se aplica teorema 1 a ambas expresiones)

$= (n-m+1)c$ (se saca c como factor)

Ejemplo:

$$\sum_{k=3}^{8} 9 = (8-3+1)\cdot 9 = 6\cdot 9 = 54$$

Observación: Como se muestra en la propiedad (2) del teorema anterior, el dominio de la variable de sumatoria no necesita comenzar en 1

Ejemplo $\sum_{k=4}^{8} a_k = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$

Otra variante: si el primer término de una sucesión infinita es a_0, como en $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$

Entonces se consideran sumatorias de la forma $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n$

Que es la suma de los $(n+1)$ primeros términos de la sucesión

Ejemplo:

Evaluar $\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k+1} = \frac{2^0}{0+1} + \frac{2^1}{1+1} + \frac{2^2}{2+1} + \frac{2^3}{3+1}$

$$= 1 + 1 + \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{3}$$

Para los teoremas 3 ,4 y 5 considere que: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ y además $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_n \ldots\ldots$ son sucesiones infinitas, entonces, para todo número entero positivo

Teorema 3: de la suma de sucesiones $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

Teorema 4: de la diferencia de sucesiones $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

Teorema 5: de la multiplicación de una sucesión por un escalar $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

Ejemplo: Evalúa la sumatoria $\sum_{k=1}^{5} 2k-7$

Solución

$$\sum_{k=1}^{5} 2k-7 = (2\cdot 1-7)+(2\cdot 2-7)+(2\cdot 3-7)+(2\cdot 4-7)+(2\cdot 5-7)$$
$$= (2-7)+(4-7)+(6-7)+(8-7)+(10-7)$$
$$= -5+-3+-1+1+3$$
$$= -5$$

Usando propiedades se obtiene

$$\sum_{k=1}^{5} 2k-7 = 2\sum_{k=1}^{5} k - \sum_{k=1}^{5} 7$$
$$= 2\frac{5\cdot 6}{2} - 7\cdot 5$$
$$= 30-35$$
$$= -5$$

Ejemplo: Calcula $\sum_{k=3}^{6} \frac{k-5}{k-1}$

Solución

$$\sum_{k=3}^{6} \frac{k-5}{k-1} = \frac{3-5}{3-1} + \frac{4-5}{4-1} + \frac{5-5}{5-1} + \frac{6-5}{6-1}$$
$$= \frac{-2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{0}{4} + \frac{1}{6} = \frac{-7}{6}$$

Ejemplo: Utilizando propiedades calcula:

$$\sum_{i=1}^{20} 3i^2 + 2i + 4 = 3\sum_{i=1}^{20} i^2 + 2\sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 4$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6}\right) + 2 \cdot \left(\frac{20 \cdot 21}{2}\right) + 20 \cdot 4$$

$$= 8610 + 420 + 80 = 9110$$

Veamos el procedimiento cuando el límite inferior es distinto de 1:

$$\sum_{k=4}^{16} 5k - 2 = \sum_{k=1}^{16} (5k-2) - \sum_{k=1}^{3} (5k-2)$$

Obs: Se realiza una diferencia entre dos sumatorias, donde la primera de ellas considera desde el 1 hasta el límite superior (en este caso el 16) y la segunda de ellas con límite inferior 1 y límite superior correspondiente a una unidad menor al límite inferior (en este caso 4 -1=3). Luego se resuelve utilizando las propiedades conocidas:

$$\left(5\sum_{k=1}^{16} k - \sum_{k=1}^{16} 2\right) - \left(5\sum_{k=1}^{3} k - \sum_{k=1}^{3} 2\right) = \left(5 \cdot \frac{16 \cdot 17}{2} - 16 \cdot 2\right) - \left(5 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} - 3 \cdot 2\right)$$
$$= 624$$

Propiedad Telescópica

Si $\{a_n\}_n$ es una sucesión, la suma de las diferencias de sus términos consecutivos está dada por:

$\sum_{k=M}^{N} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_M$ (Propiedad que se conoce como propiedad telescópica)

Nota:

La propiedad telescópica se aplica sobre la diferencia de dos términos consecutivos de una sucesión, independiente del orden en que estos se restan.

Ejemplo

1. $\sum_{k=M}^{N} (a_k - a_{k+1}) = a_M - a_{n+1}$
2. $\sum_{i=p+2}^{N} (a_{i+3} - a_{i+2}) = a_{N+3} - a_{p+4}$

Ejercicios resueltos

1. $\sum_{k=1}^{48} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{48+1} - \sqrt{1} = \sqrt{49} - \sqrt{1} = 7 - 1 = 6$
2. $\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) =$ ¿Se puede aplicar la propiedad telescópica?

SI porque la sumatoria dada es sobre la diferencia de dos términos consecutivos de la sucesión (Si $a_k = \frac{1}{2k-1}$ entonces $a_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)-1} = \frac{1}{2k+1}$)

$$\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2 \cdot 100 + 1} = 1 - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$$

Para complementar el estudio puedes estudiar del libro de "Algebra" del Ministerio de Educación desde la página 459 a la página 467.